

«Теоремы Чебы и Менелая»

*Работа ученика 9-А класса
Муниципального общеобразовательного учреждения
«Гимназия № 20»*

Храмеева Максима

*Научный руководитель – учитель математики
Бондаренко Ольга Валентиновна*

2011 год

«Обладая литературой более обширной, чем алгебра и арифметика вместе взятые, и, по крайней мере, столь же обширной, как анализ, геометрия в большей степени, чем любой другой раздел математики, является богатейшей сокровищницей интереснейших, но полузабытых вещей, которыми спешащее поколение не имеет времени насладиться».

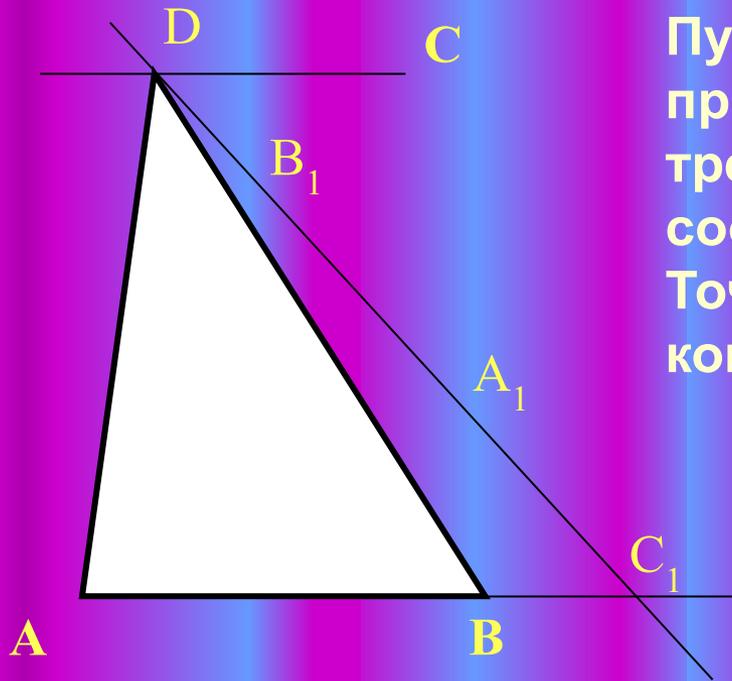
Е. Т. Белл.

Цели исследования:

- Изучить состояние проблемы в научной литературе и школьной программе.
- Выявить теоретические положения для доказательства теорем и научно обосновать способы доказательства теоремы Чебы и Менелая.
- Проанализировать теоремы и их применение при решении задач
- Проверить эффективность и целесообразность применения теорем при решении задач.

- Медианы треугольника пересекаются в одной точке.
- Высоты треугольника пересекаются в одной точке.
- Биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке
- И многие другие известные соотношения.

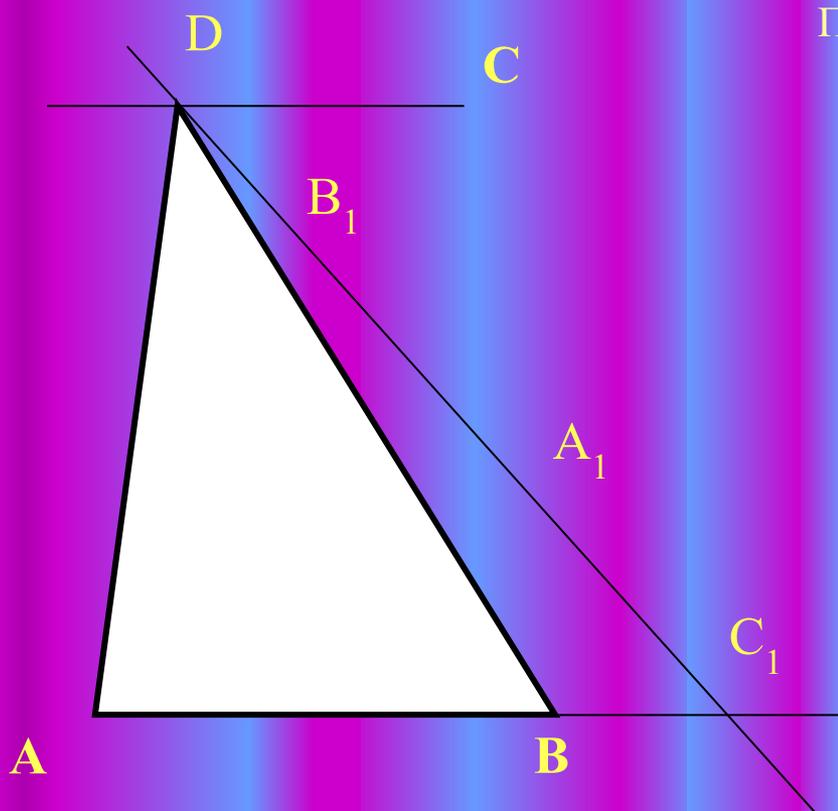
Теорема Менелая



Пусть на сторонах BC, AC и продолжении стороны AB треугольника ABC взяты соответственно точки A_1 , B_1 и C_1 . Точки лежат на одной прямой тогда, когда выполняется равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$

Доказательство:



Пусть прямая пересекает стороны BC и CA $\triangle ABC$ в точках A_1 и B_1 , а продолжение стороны AB в точке C_1 .

1. Через вершину C $\triangle ABC$ проведем прямую $CD \parallel AB$; которая пересечет прямую A_1B_1 в точке D.

2. $\triangle A_1BC_1 \sim \triangle A_1CD$ по двум углам

3. $\triangle B_1AC_1 \sim \triangle B_1CD$ по двум углам

4. из пунктов 2 и 3 следует, что

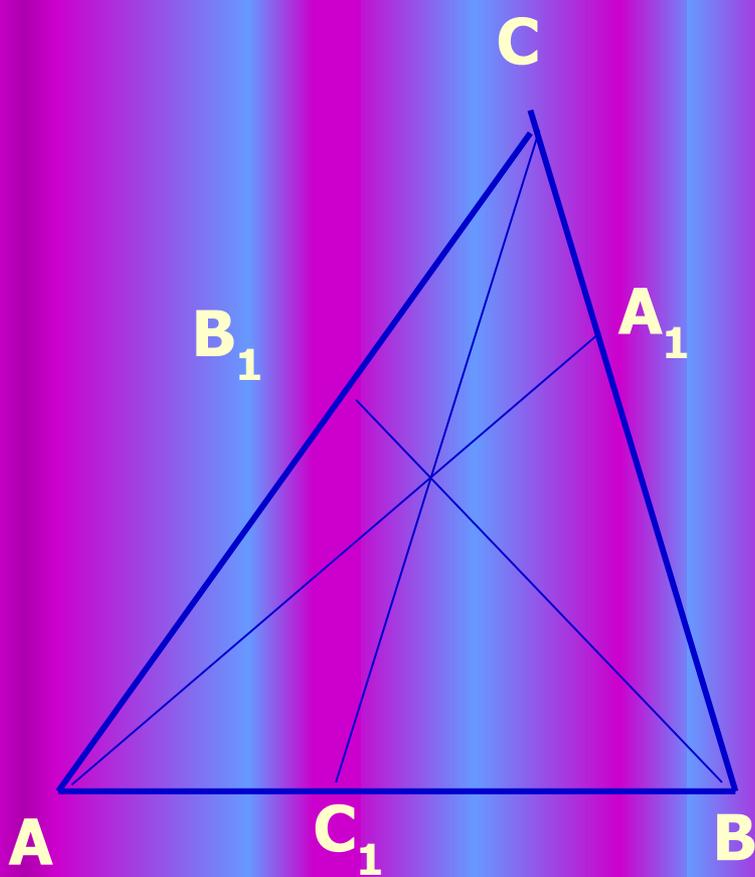
$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BC_1}{CD} \quad \text{и} \quad \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{CD}{AC_1}$$

5. Перемножим эти равенства, получим доказываемое соотношение.

Обратная теорема:

- Если выполняется равенство $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$ то точки A_1 , B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

Теорема Чебы



Пусть на сторонах АВ, ВС и АС треугольника АВС взяты точки

A_1, B_1, C_1

Прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$

Доказательство:

I) Пусть прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в точке O , лежащей внутри или вне треугольника ABC . В том и другом случае, применив теорему Менелая к треугольнику BCC_1 и секущей AA_1 , Получим:

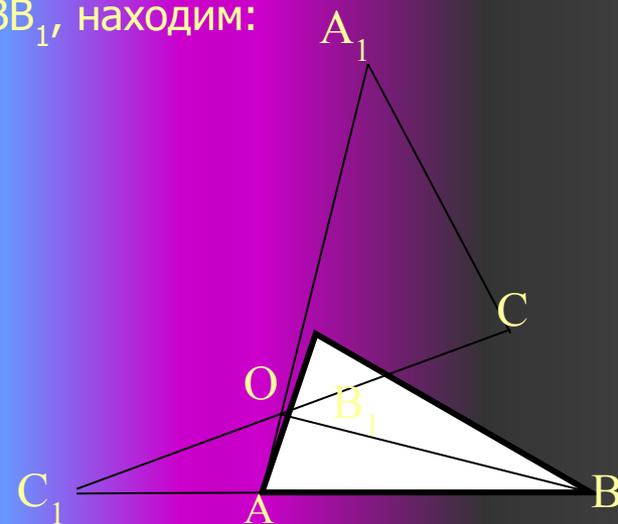
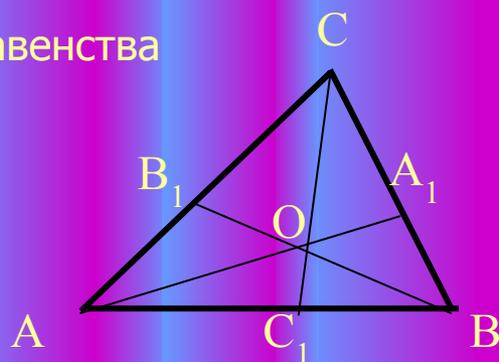
$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{CO}}{\overline{OC_1}} \cdot \frac{\overline{C_1A}}{\overline{AB}} = -1$$

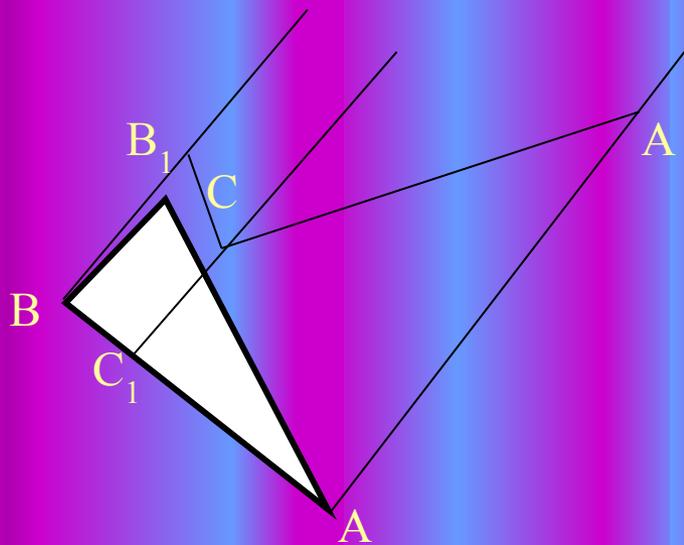
Аналогично из треугольника ACC_1 , пересеченного прямой BB_1 , находим:

$$\frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{BC_1}} \cdot \frac{\overline{C_1O}}{\overline{OC}} = -1.$$

Перемножим последние два равенства почленно и получим:

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} \cdot \frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} = 1.$$





Рассмотрим случай, когда прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 параллельны. Пусть точка B_1 лежит на продолжении стороны AC , точка A_1 лежит на стороне BC , точка C_1 лежит на стороне AB . Тогда достаточно доказать, что

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} \cdot \frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} = 1$$

Используя теорему об отрезках, отсекаемых на сторонах угла параллельными прямыми, имеем:

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{CA_1}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{C_1A}} \text{ и } \frac{\overline{CB_1}}{\overline{AB_1}} = \frac{\overline{BC_1}}{\overline{AB}}$$

Подставим эти равенства

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} \cdot \frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{AC_1}} \cdot \frac{\overline{C_1B}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} = 1$$

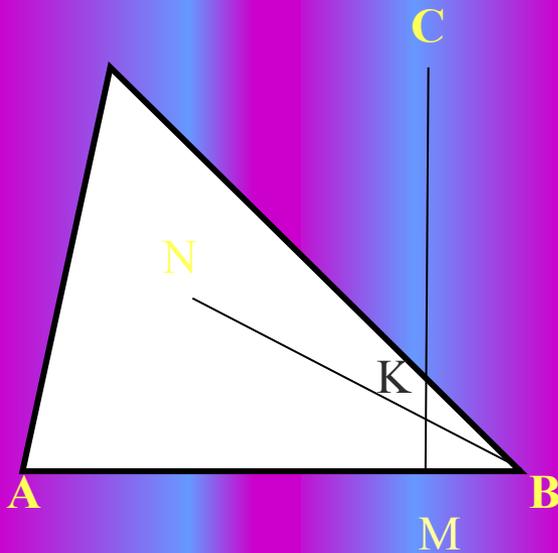
Что и требовалось доказать.

Обратная теорема

- Если выполняется равенство $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$ то прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 либо пересекаются в одной точке, либо попарно параллельны.

Замечание. Записывая отношение отрезков, следует двигаться по контуру треугольника от вершины до точки пересечения с прямой и от точки пересечения до следующей вершины.

Задача 1. На сторонах AB и AC $\triangle ABC$ взяты точки M и N так, что $\frac{AM}{MB} = \frac{CN}{NA} = 2$. Отрезки BN и CM пересекаются в точке K . Найдите отношение отрезков $\frac{BK}{KN}$.



Решение. Применим теорему Менелая к $\triangle ABN$ и секущей CM . Получим

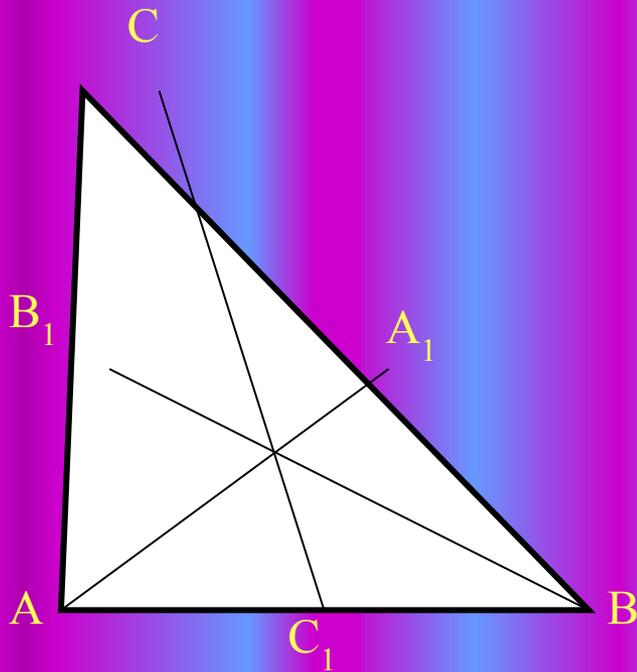
$$\frac{BK}{KN} \cdot \frac{NC}{CA} \cdot \frac{AM}{MB} = 1$$

$$\frac{NC}{CA} = \frac{2}{3}; \frac{AM}{MB} = 2$$

$$\frac{BK}{KN} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{1} = 1$$

Ответ: $\frac{BK}{KN} = \frac{3}{4}$

Задача 2: Доказать, что биссектрисы углов треугольника пересекаются в одной точке.



- Доказательство:
Пусть AA₁, BB₁, CC₁ – биссектрисы треугольника ABC, т.к. биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону на отрезки, длины которых пропорциональны противолежащим сторонам, то

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AC}{CB}; \quad \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{AB}{AC}; \quad \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{BC}{AB}.$$

- Перемножив полученные равенства, получим:

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{AC}{CB} \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{AB} = 1.$$

- Т.о. по теореме Чебы, биссектрисы пересекаются в одной точке.

Задача 3: Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.

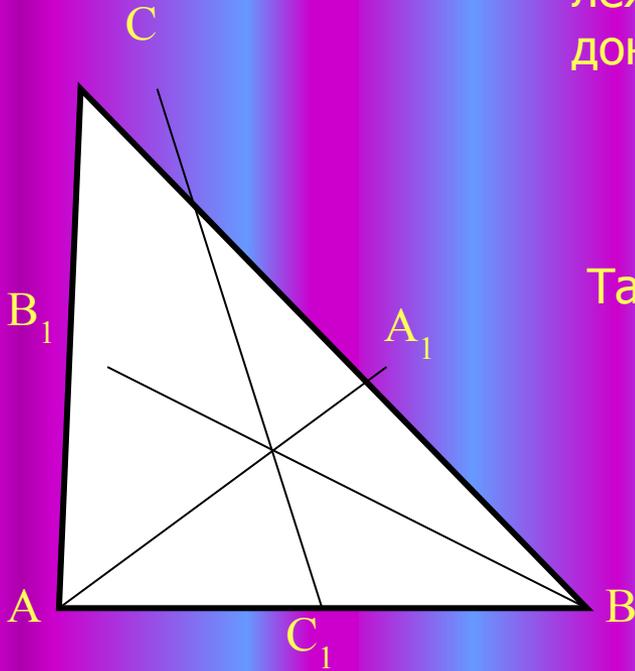
Доказательство. Так как точки A_1, C_1, B_1 лежат на сторонах треугольника, достаточно доказать, что выполняется равенство

$$\frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C}} \cdot \frac{\overline{CA_1}}{\overline{A_1B}} \cdot \frac{\overline{BC_1}}{\overline{C_1A}} = 1.$$

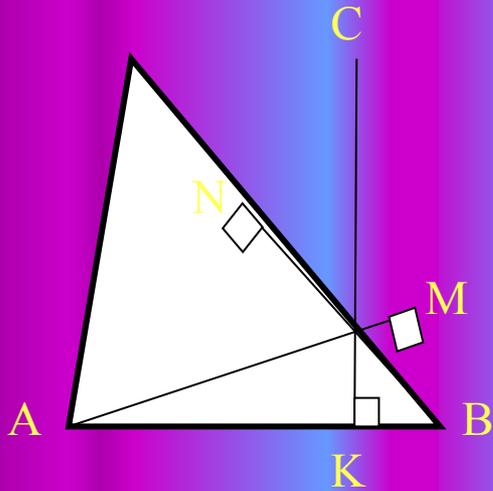
Так как BB_1, CC_1, AA_1 медианы имеем, что

$$\frac{AB_1}{B_1C} = 1; \quad \frac{CA_1}{A_1B} = 1; \quad \frac{BC_1}{C_1A} = 1.$$

Тогда в силу теоремы Чебы прямые BB_1, CC_1, AA_1 пересекаются в одной точке. Ч.т.д.



Задача 4. Докажите что высоты остроугольного треугольника пересекаются в одной точке.

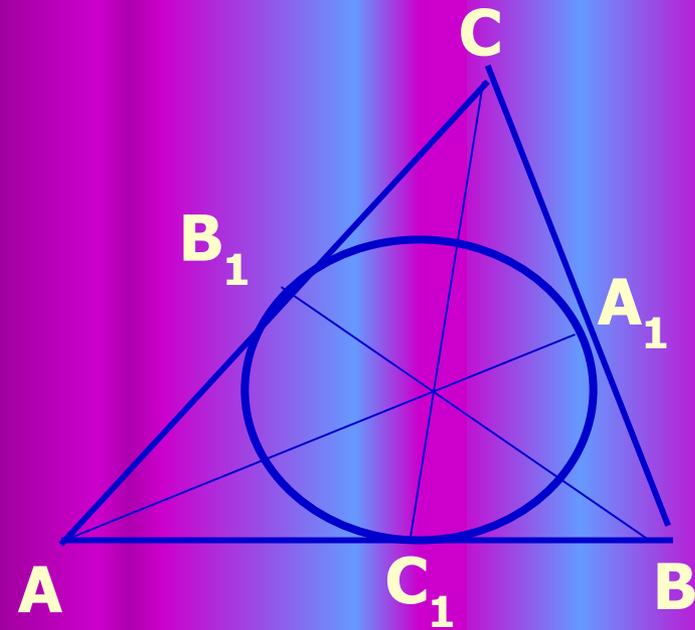


Если выполняется равенство
то точки A_1 , B_1 и C_1 лежат
на одной прямой.

Если выполняется равенство
то точки A_1 , B_1 и C_1 лежат
на одной прямой.

Точка Жергона.

Задача 5: Доказать, что прямые, проходящие через вершины треугольника и точки касания вписанной окружности, пересекаются в одной точке, называемой точкой Жергона.



Доказательство:

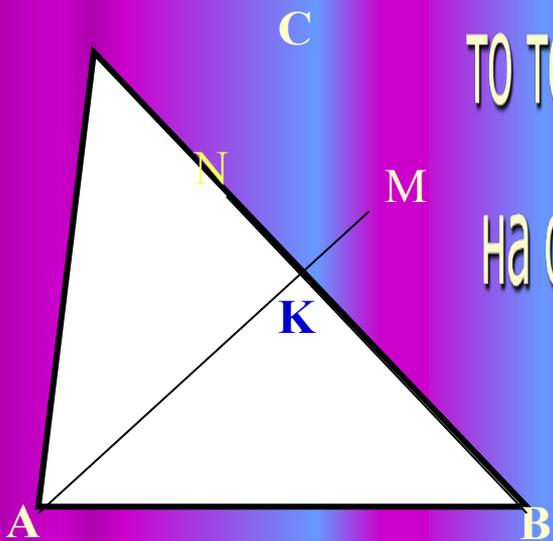
Пусть окружность касается сторон треугольника ABC в точках A_1 , B_1 , C_1 , т.к. длины касательных, проведённых из одной точки к окружности, равны, то $AB_1=AC_1$, $BC_1=BA_1$, $CA_1=CB_1$.

Тогда

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

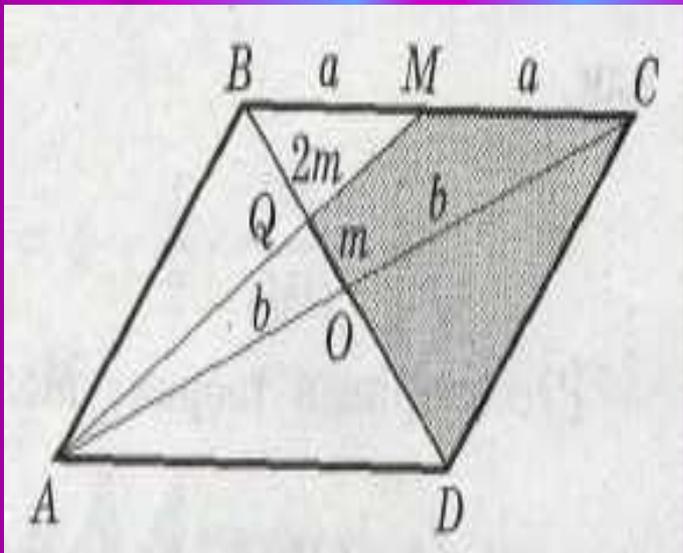
Следовательно, по теореме Чебы, данные прямые пересекаются в одной точке.

Если выполняется равенство
то точки A_1 , B_1 и C_1 лежат
на одной прямой.



Задача 7.

Через середину M стороны BC параллелограмма $ABCD$, площадь которого равна 1 , и вершину A проведена прямая, пересекающая диагональ BD в точке Q . Найдите площадь четырёхугольника $QMCD$.



$$S_{ABCD} = 1, S_{BCD} = \frac{1}{2}, S_{BOC} = \frac{1}{4},$$

Так как CO – медиана треугольника BCD , значит, делит треугольник BCD на два равновеликих треугольника.

1) MA пересекает две стороны и продолжение третьей треугольника BOC , значит, по теореме Менелая

$$\frac{BM}{MC} \cdot \frac{CA}{AO} \cdot \frac{OQ}{QB} = 1, \frac{a}{a} \cdot \frac{2b}{b} \cdot \frac{OQ}{QB} = 1,$$

Откуда

$$\frac{OQ}{QB} = \frac{1}{2}, OQ = m, QB = 2m.$$

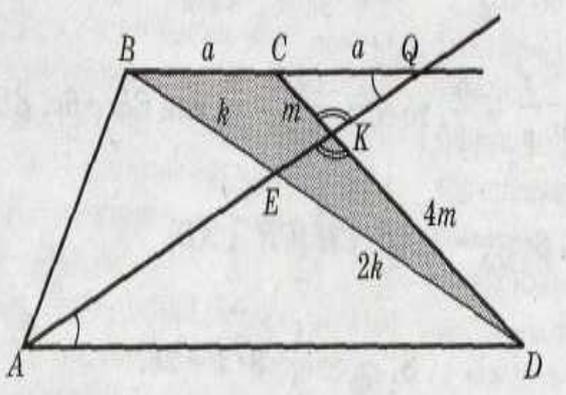
2) Треугольники BQM и BOC имеют общий угол, значит

И так,
$$S_{BQM} = \frac{1}{3} S_{BOC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

$$\frac{S_{BQM}}{S_{BOC}} = \frac{BM \cdot BQ}{BC \cdot BO} = \frac{a \cdot 2m}{2a \cdot 3m} = \frac{1}{3}.$$

$$S_{QMCD} = S_{BCD} - S_{BQM} = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{5}{12}.$$

Ответ: $\frac{5}{12}$.



Задача 8

В трапеции $ABCD$ с основанием AD и BC через середину A проведена прямая, которая пересекает диагональ BD в точке E и боковую сторону CD в точке K , причем $BE:ED = 1:2$ и $CK:KD = 1:4$. Найдите отношение длин оснований трапеции.

Пусть $BC = a$, $AD = b$. Необходимо найти $\frac{a}{b}$.

Пусть Q – точка пересечения прямых BC и AQ .

1) По теореме Менелая для треугольника BKD и секущей AQ имеем

$$\frac{DE}{EB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CK}{KD} = 1, \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{4} = 1, \frac{a + CQ}{CQ} = \frac{2}{1} \Rightarrow CQ = a, BC = CQ = a.$$

2) $CKQ \sim DKA$ (по двум углам), тогда $\frac{CQ}{AD} = \frac{CK}{KD}; \frac{a}{b} = \frac{1}{4}$.

$$\frac{BC}{AD} = \frac{1}{4}.$$

Так как $a = BC$, $b = AD$, то

Ответ: 1:4.

Теоремы Чева и Менелая применяются, когда:

- *Идёт речь, об отношении отрезков (иногда завуалированном: доказать равенство отрезков, доказать, что точка является серединой отрезка).*
- *Если на чертеже имеются элементы, присутствующие в теореме Менелая (треугольник и прямая, пересекающая его стороны или их продолжения).*
- *3. Иногда полезно применять обратную теорему (если необходимо доказать, что какие-нибудь точки лежат на одной прямой). А также при доказательстве других теорем.*