

Логические основы построения компьютера

Основные понятия алгебры логики

Логика – наука, изучающая законы и формы мышления.

Алгебра логики – раздел математики, изучающий высказывания, рассматриваемые со стороны их логических значений и логических операций над ними.

Логическое высказывание – любое повествовательное предложение в отношении которого можно однозначно сказать истинно оно или ложно.

истина – 1 ложь – 0

Установите какие из следующих предложений являются логическими высказываниями, а какие – нет (объясните почему):

- Солнце есть спутник Земли
- $6:2+9$
- Санкт-Петербург расположен на Неве
- Как вас зовут?
- Музыка Баха очень сложна
- Запишите в тетради определение
- Если сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы, то это прямоугольный треугольник

Даны логические высказывания.
Определить истинны они или ложны.

- Земля – планета Солнечной системы
- За зимой наступает весна
- $3+6 > 10$
- Квадрат это ромб
- В городе Иваново живут только граждане России
- После вторника будет воскресенье

Простое высказывание — это высказывание, которое содержит только одну простую мысль.

Например: Квадрат это ромб

Сложное высказывание — это высказывание, которое содержит несколько простых мыслей, соединенных между собой с помощью логических операций.

Например: Лил дождь, и дул холодный ветер

Значение сложного высказывания можно определить только с помощью специальной таблицы – *таблицы истинности*.

Таблица истинности – это таблица, в которой перечислены все возможные значения входящих простых логических высказываний и соответствующие им значения сложного логического высказывания

Количество строк (q) в таблице можно определить по формуле: $q = 2^n$, где n – это количество простых высказываний, входящих в сложное высказывание

Логические операции

1. Инверсия (логическое отрицание) – определяется над одним простым или сложным ЛВ. К исходному ЛВ добавляется частица «НЕ» (не A).

Обозначение: не, not, \neg , \bar{A}

Таблица истинности:

A	\bar{A}
0	1
1	0

2. Конъюнкция (логическое умножение) – определяет соединение двух ЛВ с помощью союза «И» (A и B).

Обозначение: и, &, and, ×, ·, \wedge

Таблица истинности:

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

3. Дизъюнкция (логическое сложение) – определяет соединение двух ЛВ с помощью союза «ИЛИ» (A или B).

Обозначение: или, or, +, \vee

Таблица истинности:

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

4. Импликация (логическое следование) – связывает два ЛВ, из которых первое является условием, а второе следствием из этого условия. Операция обозначается словами: «Если..., то...» (Если А, то В).

Обозначение: \rightarrow , \Rightarrow

Таблица истинности:

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

5. Эквивалентность (логическое тождество, равнозначность) – определяет результат сравнения двух ЛВ. Операция обозначается словами: «...тогда и только тогда, когда...» (А т. и т. т. когда В)

Обозначение: \leftrightarrow , $\langle = \rangle$, \equiv , \sim

Таблица истинности:

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Импликацию и эквивалентность можно заменить сочетанием первых трех операций:

$$A \Rightarrow B = \neg A \vee B$$

$$A \Leftrightarrow B = (\neg A \vee B) \& (\neg B \vee A)$$

Это первые из основных законов алгебры логики

Приоритет выполнения логических операций:

- 1) инверсия (отрицание)
- 2) конъюнкция (умножение)
- 3) дизъюнкция (сложение)
- 4) импликация (следование)
- 5) эквивалентность (тождество)

Для изменения указанного порядка выполнения логических операций используются скобки

Задание 1: Сформулируйте отрицания следующих высказываний:

- Эльбрус – высочайшая горная вершина Европы
- $2 \geq 5$
- Теннисист Кафельников не проиграл финальную игру
- Число n делится на 2
- На контрольной работе каждый ученик писал своей ручкой
- Мишень поражена вторым выстрелом
- Кит это млекопитающее

Задание 2: Найдите значение логических выражений

$$\text{а) } (1^1 \& 1^2) \& 0 = 0$$

$$1) 1 \& 1 = 1$$

$$2) 1 \& 0 = 0$$

$$\text{б) } ((1^1 \vee 0^3) \& (1^2 \& 1^5)) \& (0^4 \vee 1) = 1$$

$$1) 1 \vee 0 = 1$$

$$2) 1 \& 1 = 1$$

$$3) 1 \& 1 = 1$$

$$4) 0 \vee 1 = 1$$

$$5) 1 \& 1 = 1$$

$$\text{B) } ((\overset{1}{1}\&\overset{2}{1})\vee\overset{4}{0})\&(\overset{3}{0}\vee\overset{3}{1}) = 1$$

$$1) 1\&1 = 1$$

$$2) 1\vee 0 = 1$$

$$3) 0\vee 1 = 1$$

$$4) 1\&1 = 1$$

$$\text{Г) } ((\overset{1}{0}\vee\overset{3}{0})\&(\overset{2}{1}\&\overset{5}{0}))\vee(\overset{4}{0}\&\overset{4}{1}) = 0$$

$$1) 0\vee 0 = 0$$

$$2) 1\& 0 = 0$$

$$3) 0\& 0 = 0$$

$$4) 0\& 1 = 0$$

$$5) 0\vee 0 = 0$$

Задание 3: Даны простые ЛВ. Определить значение сложных ЛВ.

$$A = \{2 \times 2 = 4\}, B = \{2 = 3\}, C = \{4 < 2\}$$

а) $\neg A$

б) $\neg(A \& B)$

в) $(A \vee B) \& C \Rightarrow (A \& C) \vee (B \& C)$

г) $(A \& B) \vee C \Leftrightarrow (A \vee C) \& (A \& B)$

Построение таблицы истинности сложных ЛВ:

- 1) определить число простых ЛВ (n)
- 2) определить число строк в таблице истинности ($q=2^n$)
- 3) записать все возможные значения простых ЛВ
- 4) определить количество логических операций и их порядок
- 5) записать логические операции в таблицу истинности и определить для каждой значение

Задание 1: Постройте таблицу истинности
сложного ЛВ

1) $\neg A \vee B$

A	B	$\neg A$	$\neg A \vee B$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

$$2) (\overset{1}{\neg A} \vee \overset{2}{B}) \& (\overset{3}{\neg B} \vee \overset{4}{A})$$

A	B	$\neg A$	$\neg A \vee B$	$\neg B$	$\neg B \vee A$	$(\neg A \vee B) \& (\neg B \vee A)$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0
1	1	0	1	0	1	1

3) $\neg A \& (B \vee C)$

A	B	C	$(B \vee C)$	$\neg A$	$\neg A \& (B \vee C)$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	0	0

$$4) \overline{A \vee B \& C} = \text{He} (A \vee B \& C)$$

A	B	C	B&C	A∨B&C	He (A∨B&C)
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	1	0

Задание 2: Постройте таблицы истинности сложных ЛВ и сравните их:

- 1) $A \wedge B \vee C$ и A
- 2) $(A \vee B)$ и $(A \vee C)$
- 3) A и $(B \vee C)$
- 4) A или $(\text{не } B \text{ или не } C)$
- 5) $\text{не } (\text{не } A \text{ и не } (B \text{ и } C))$

Задание 3: Определите с помощью таблиц истинности, какие из ЛВ являются тождественно-истинными:

1) $\overline{\overline{A}} \text{ и } A \text{ или } B \text{ и } (A \text{ и } B \text{ или } B)$

2) $((A \text{ или } \overline{B}) \Rightarrow B) \text{ и } (\overline{A} \text{ или } B)$

3) $\overline{A \text{ и } B} \Leftrightarrow (\overline{A} \text{ или } \overline{B})$

4) $A \text{ и } B \text{ и } (\overline{A} \text{ и } \overline{B})$

5) $A \text{ и } (B \text{ и } (\overline{A} \text{ или } \overline{B}))$

Построение ЛВ по таблице истинности:

- 1) записать логическое умножение всех простых ЛВ для каждой строки, где сложное ЛВ = 1 (если значение простого ЛВ = 0, то берется его отрицание)
- 2) логически сложить, полученные выражения

Составьте сложное ЛВ по таблице ИСТИННОСТИ

A)

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

✦ не А и не В и С

✦ не А и В и не С

✦ А и не В и С

(не А и не В и С) или (не А и В и не С) или (А и не В и С)

Б)

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

✦ не А и не В и не С

✦ не А и В и С

✦ А и В и С

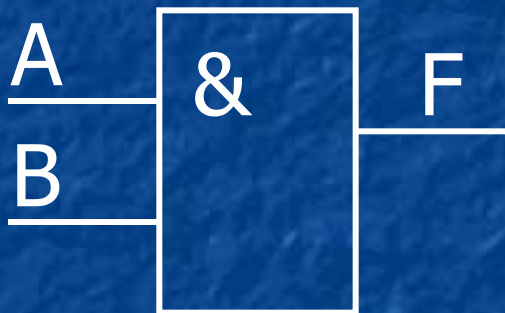
(не А и не В и не С) или (не А и В и С) или (А и В и С)

Логические элементы и основные логические устройства компьютера.

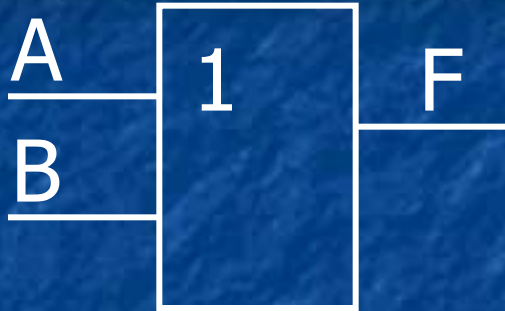
Логический элемент – электронное устройство, реализующее одну из логических функций (операций).

Простейшие логические элементы.

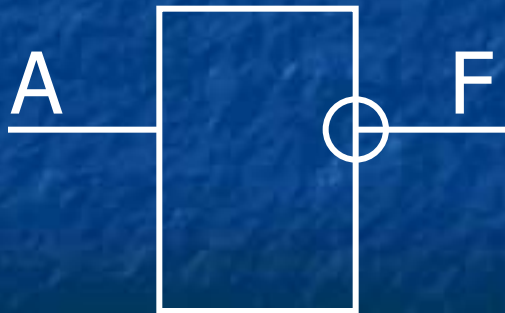
1. Конъюнктор (логический элемент И)



2. Дизъюнктор (логический элемент ИЛИ)



3. Инвентор (логический элемент НЕ)



Построение логических схем по логическому высказыванию

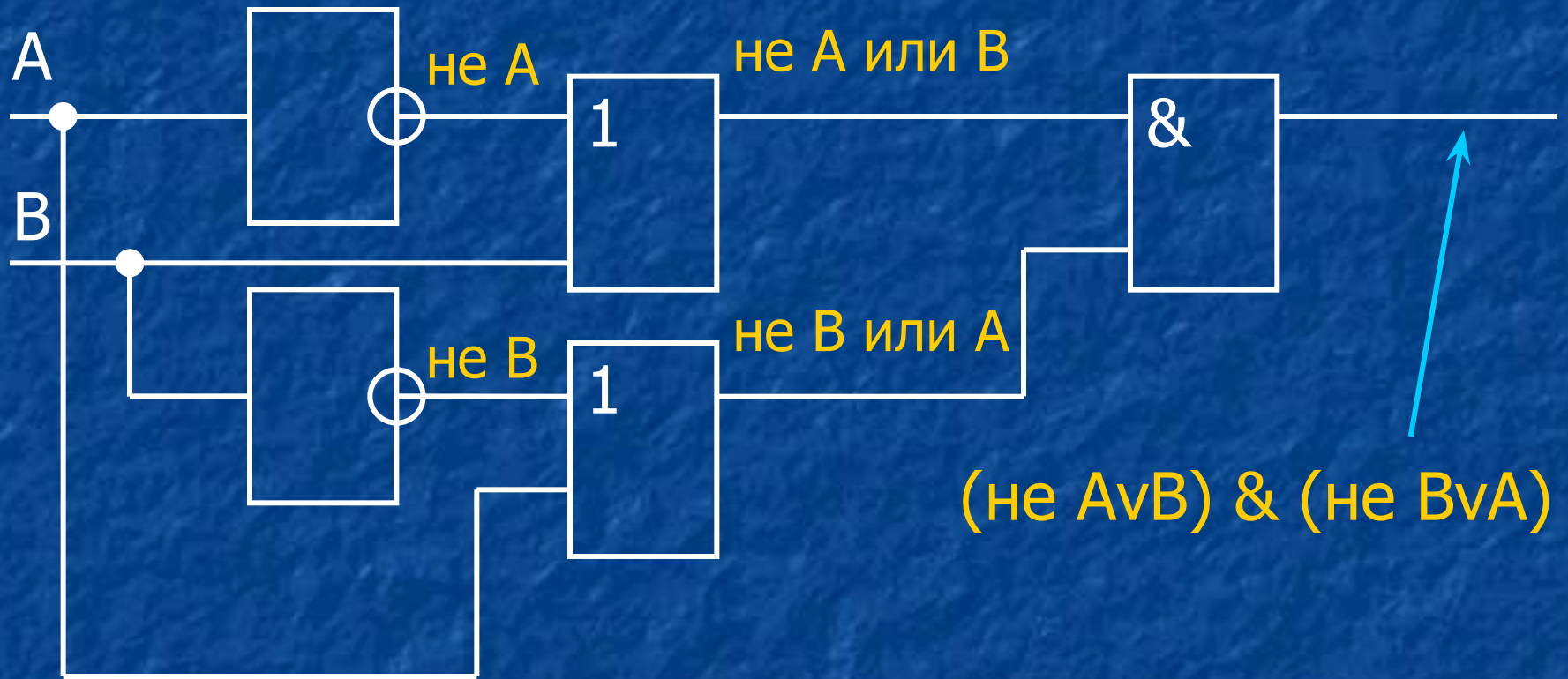
- 1) определить число простых ЛВ
- 2) определить количество логических операций и их порядок
- 3) построить для каждой логической операции схему
- 4) объединить логические схемы в порядке выполнения логических операций

Задание: постройте логическую схему по логическому высказыванию.

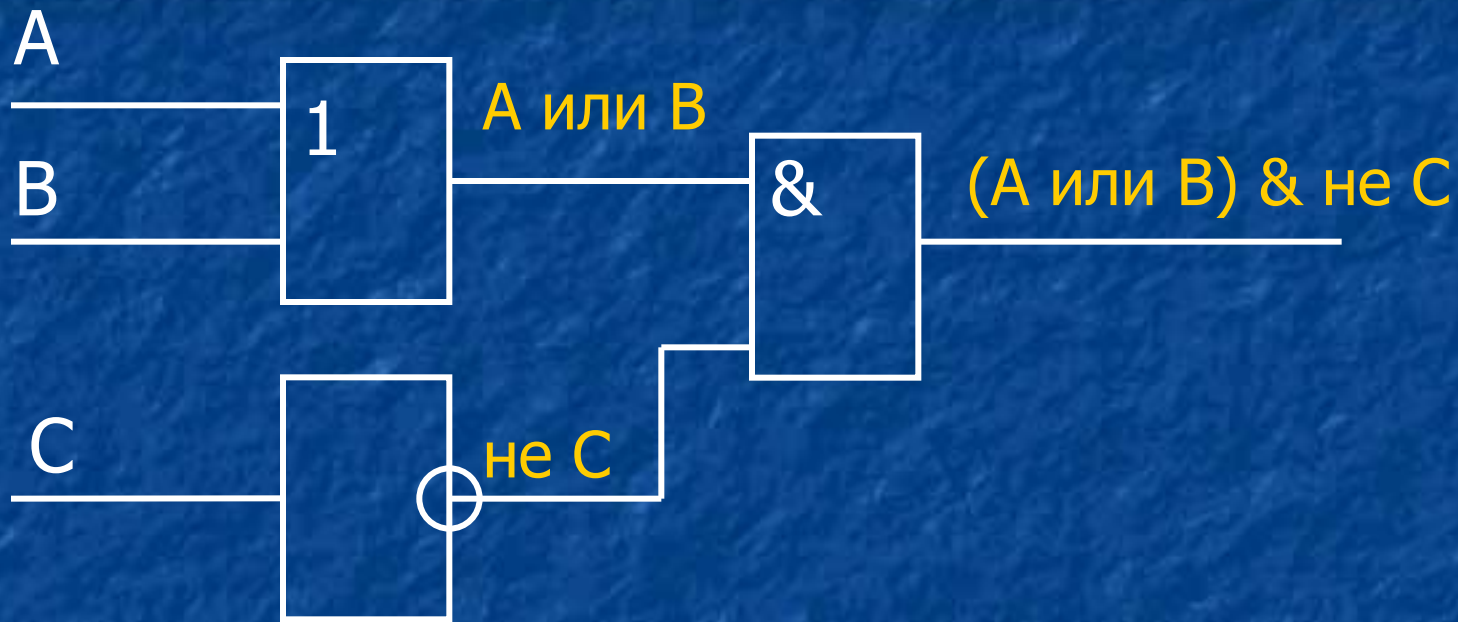
1) $\neg A \vee B$



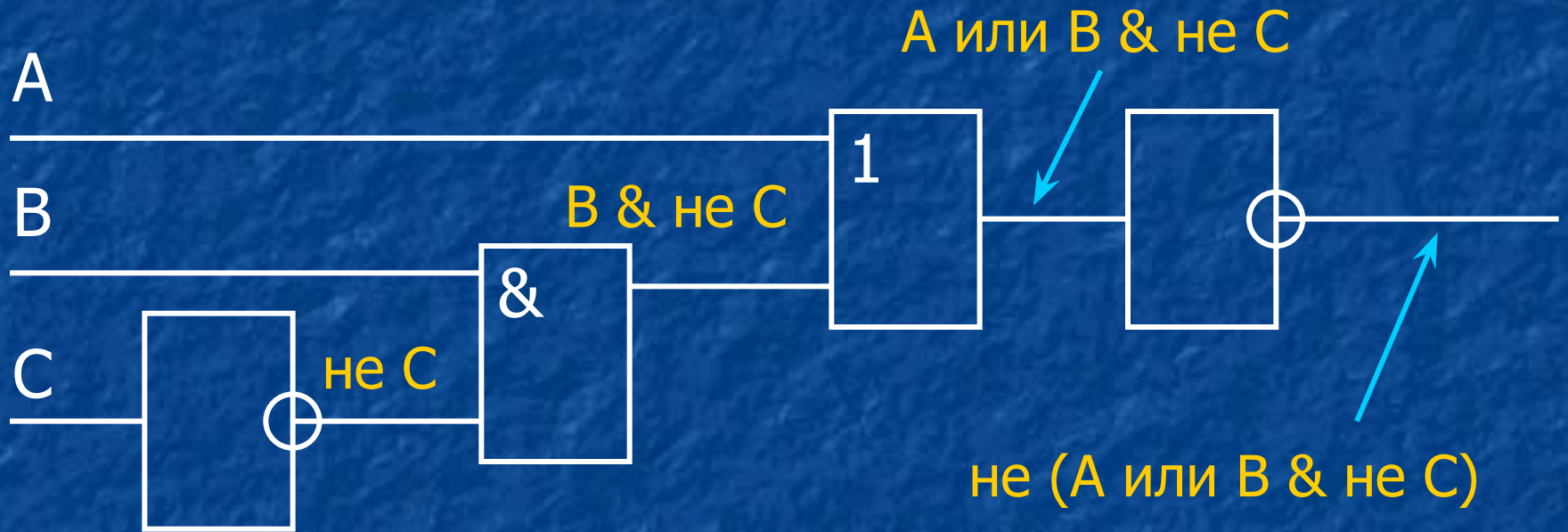
1 2 5 3 4
2) $(\neg A \vee B) \& (\neg B \vee A)$



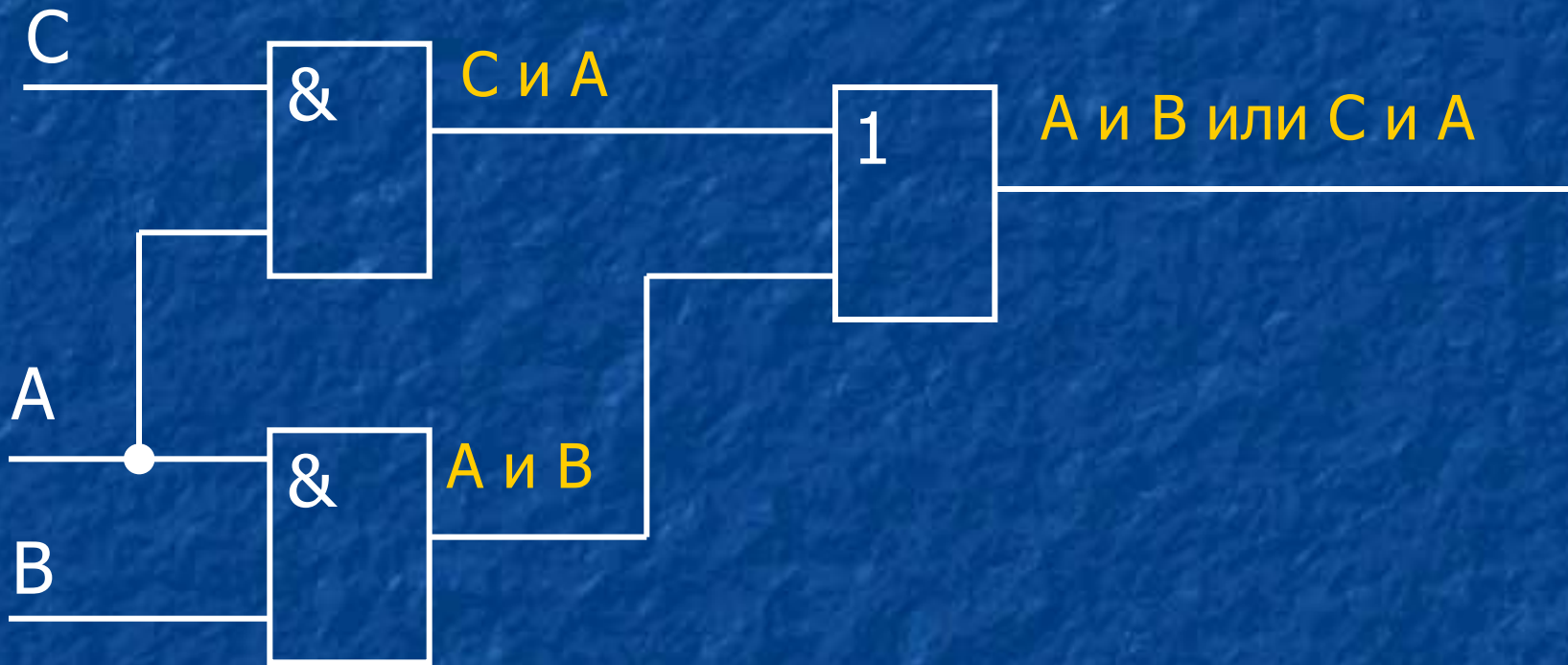
3) $(A \vee B) \& \text{не } C$



4) не (A ∨ B & не C)



1 3 2
5) $A \& B \vee C \& A$



6) $A \vee (\text{не } B \vee \text{не } C)$



Построение логического высказывания по логической схеме

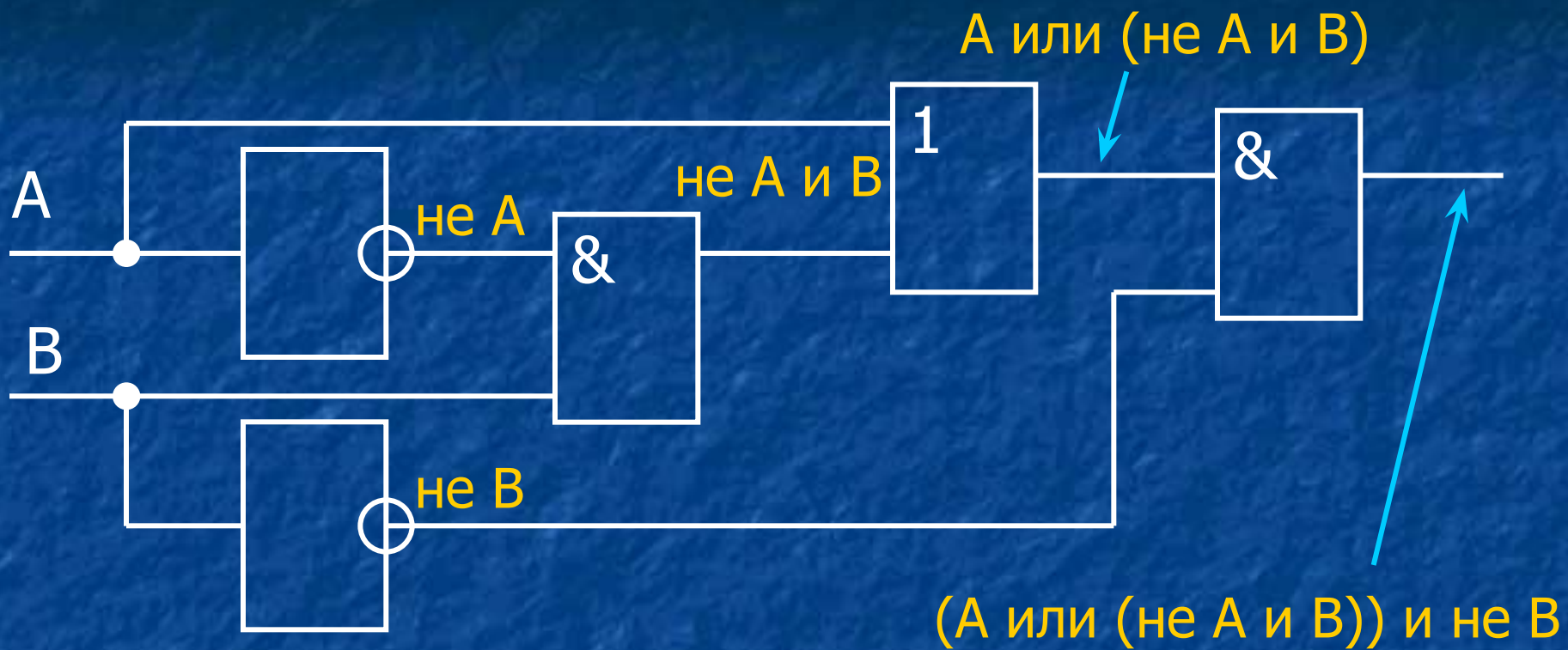
- 1) на выходе каждого логического элемента записать результат логической операции
- 2) записать получившуюся формулу на выходе последнего элемента

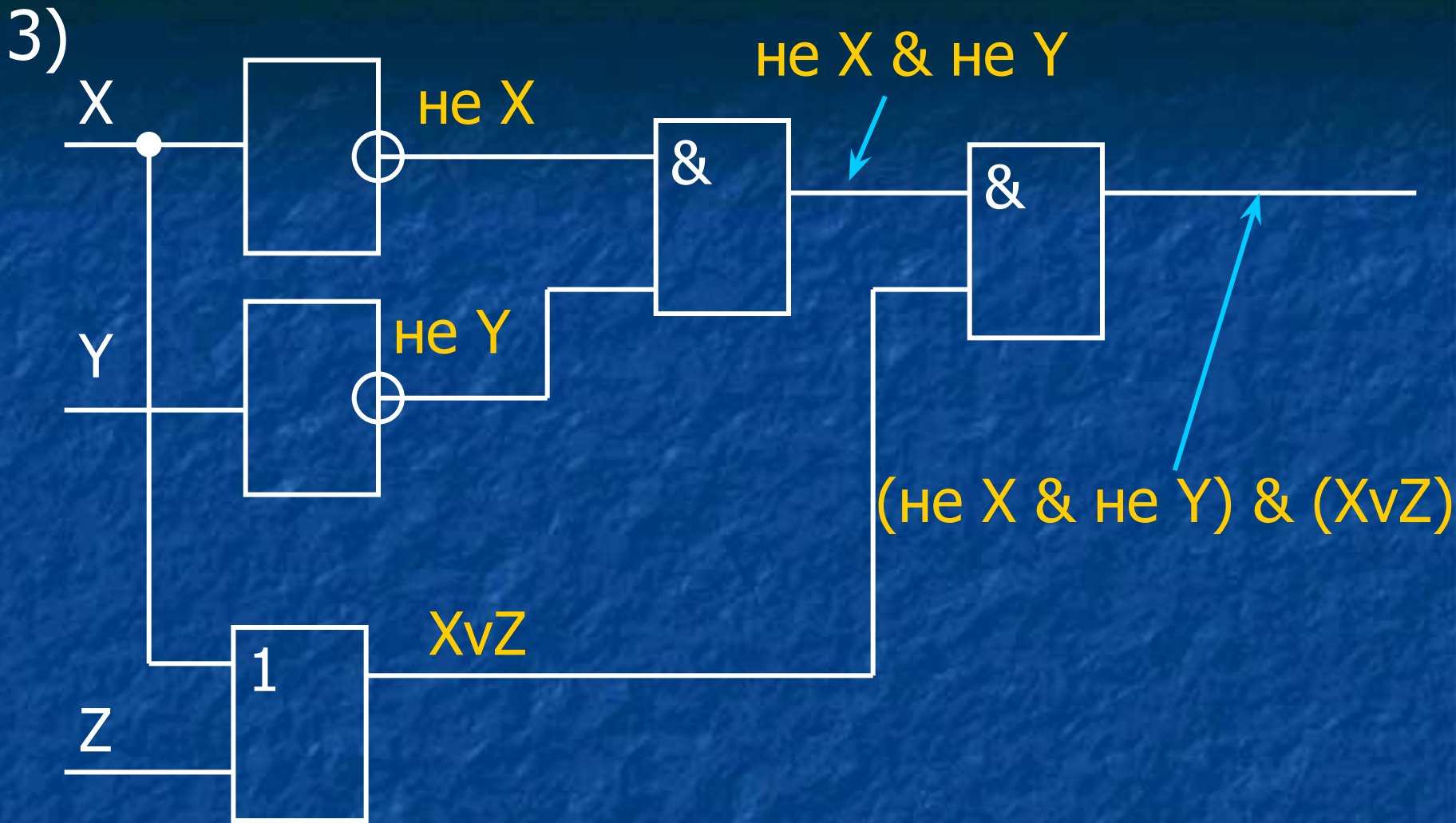
Постройте ЛВ по логической схеме:

1)

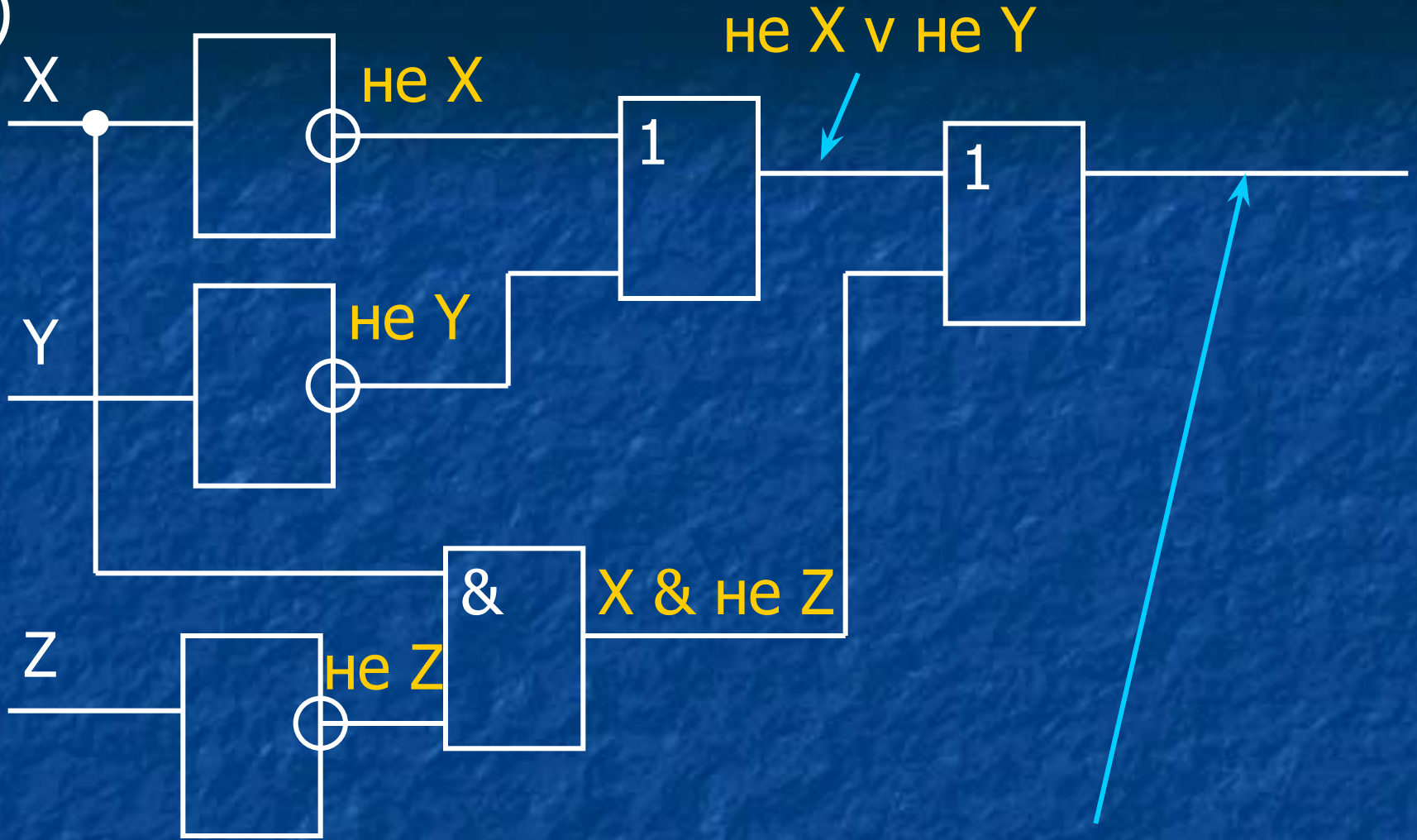


2)





4)



$(\neg X \vee \neg Y) \vee (X \wedge \neg Z)$

Работа Рыженко Елены Владимировны,
учителя информатики и математики
МБОУ г. Астрахани «СОШ № 64»