ГЛАВА 2 КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

ВВЕДЕНИЕ

Две основные задачи кинематики твердого тела

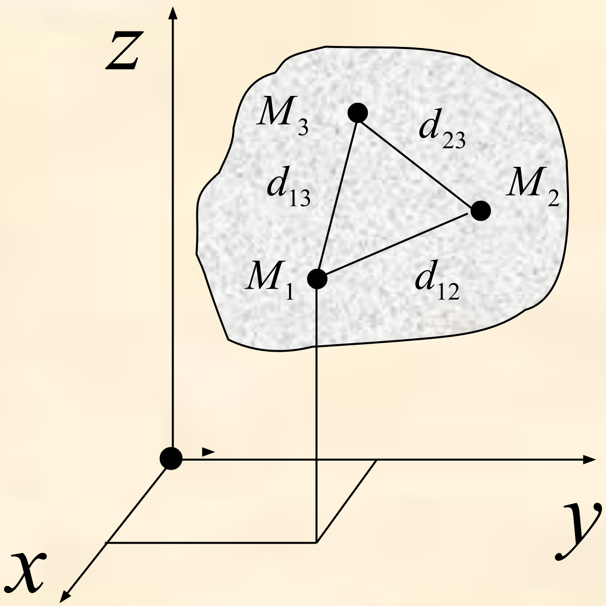
- **Задание движения твердого тела и определение кинематических характеристик тела в целом.**
- **Определение кинематических характеристик движения отдельных точек тела.**

Задать движение твердого тела – значит, указать способ определения положения любой точки тела в любой момент времени по отношению к выбранной системе отсчета.

Замечание. Количество точек в твердом теле бесконечно велико, однако их перемещения не являются независимыми, а связаны условием неизменности расстояний между этими точками. Это позволяет существенно упростить построение теории движения твердого тела.

Кинематика твердого тела

Положение твердого тела в пространстве общем случае определяется заданием 6 независимых между собой параметров.



Пусть известна зависимость от времени декартовых координат трех точек твердого тела, не лежащих на одной прямой:

$$x_k = x_k(t), y_k = y_k(t), z_k = z_k(t) \; (k = 1, 2, 3)$$

Тогда в любой момент времени должны выполняться соотношения:

$$\begin{cases} (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = d_{12}^2 = const, \\ (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2 = d_{13}^2 = const, \\ (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2 = d_{23}^2 = const. \end{cases} \quad (*)$$

Следовательно, из 9 координат, задающих положения трех рассматриваемых точек тела в пространстве, независимы лишь 6, а 3 оставшиеся можно определить из системы (*). Любая другая точка, лежащая на том же теле, должна находиться на неизменном расстоянии от точек M_1, M_2, M_3, поэтому три координаты этой точки должны удовлетворять трем уравнениям вида (*).

Замечание. В качестве 6 независимых параметров, определяющих положение твердого тела в пространстве, не обязательно выбираются декартовы координаты, а в некоторых частных случаях движения твердого тела число задаваемых параметров может быть и меньше 6.

Кинематика твердого тела

Различают следующие 5 видов движения твердого тела:

- ✔поступательное движение,
- ✔вращательное движение,

простейшие движения

- ✔плоское (плоскопараллельное) движение,
- ✔сферическое движение,
- ✔общий случай движения свободного твердого тела.

Каждый из перечисленных видов движения характеризуется определенными, только ему присущими признаками.

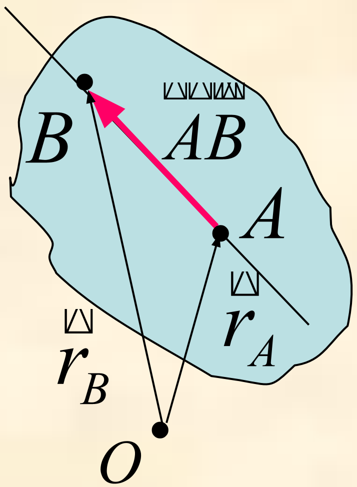
Приступая к изучению движения твердого тела, следует прежде всего установить к какому из перечисленных выше видов движения оно относится, а далее использовать хорошо разработанную теорию кинематики твердого тела.

Кинематика твердого тела

Теорема Грасгофа

Проекции векторов скоростей точек твердого тела на прямую, соединяющую эти точки, равны.

Доказательство



$$\vec{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A \ , \quad \vec{AB}\,(x_B - x_A\,,\, y_B - y_A\,,\, z_B - z_A)\,.$$

$$\left|\vec{AB}\right|^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 = const\,.$$

$$\frac{d}{dt}\left(\left|\vec{AB}\right|^2\right) = 2\cdot\big((x_B - x_A)\cdot(\dot{x}_B - \dot{x}_A) + (y_B - y_A)\cdot(\dot{y}_B - \dot{y}_A) +$$

$$+ (z_B - z_A)\cdot(\dot{z}_B - \dot{z}_A)\big) = 0.$$

$$\dot{x}_B\cdot(x_B - x_A) + \dot{y}_B\cdot(y_B - y_A) + \dot{z}_B\cdot(z_B - z_A) =$$

$$= \dot{x}_A\cdot(x_B - x_A) + \dot{y}_A\cdot(y_B - y_A) + \dot{z}_A\cdot(z_B - z_A).$$

$$\vec{V}_B\cdot\vec{AB} = \vec{V}_A\cdot\vec{AB}\ , \quad \left|\vec{V}_B\right|\cdot\left|\vec{AB}\right|\cdot\cos(\vec{V}_B\,\hat{}\,\vec{AB}) = \left|\vec{V}_A\right|\cdot\left|\vec{AB}\right|\cdot\cos(\vec{V}_A\,\hat{}\,\vec{AB})\,,$$

$$\boxed{\left|\vec{V}_B\right|\cdot\cos(\vec{V}_B\,\hat{}\,\vec{AB}) = \left|\vec{V}_A\right|\cdot\cos(\vec{V}_A\,\hat{}\,\vec{AB})\,.}$$

Теорема Грасгофа

Грасгоф Франц
Born
1826-07-11
Died
1893-10-26

Немецкий механик и машиностроитель. Родился в Дюссельдорфе. С 15 лет работал слесарем, затем посещал ремесленную школу. Окончил Берлинский ремесленный институт (1845).
С 1854 — преподаватель математики и механики там же,
в 1863 возглавил кафедру прикладной механики в Политехникуме в Карлсруэ.

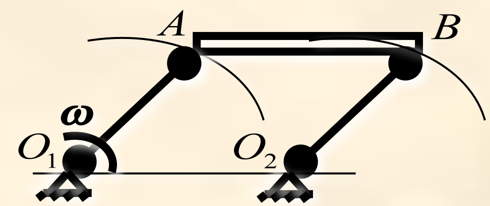
Основное направление исследований — прикладная механика. Был сторонником аналитических методов в механике. Работал также в области гидравлики, машиноведения, теплотехники.

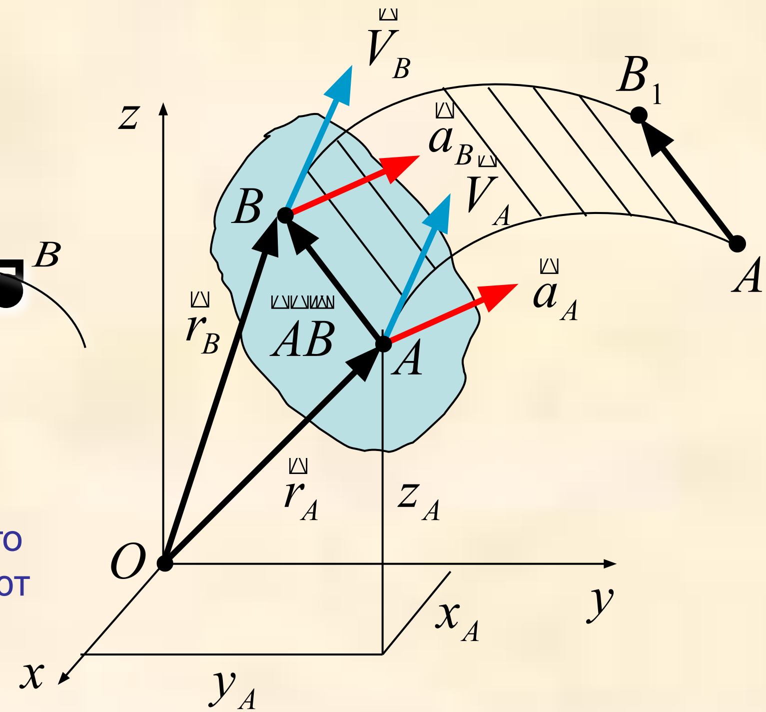
Его главный труд — «Теоретическое машиноведение» (т. 1—3, 1875—1890),в котором он развил учение Ф. Рело о кинематических парах и кинематических цепях. Разработал теорию регуляторов.
Известна теорема Грасгофа о существовании кривошипа в плоском четырехзвеннике.

Поступательное движение твердого тела

Поступательным называют такое движение твердого тела, при котором любая прямая, проведенная в теле, перемещается параллельно своему первоначальному положению.

Пример : движение спарника АВ





Теорема.

При поступательном движении твердого тела все его точки движутся одинаково: траектории точек совпадают при наложении а их скорости и ускорения в каждый момент времени геометрически равны.

Доказательство :

$$\vec r_B = \vec r_A + \vec{AB}\,, \quad (\vec{AB} = \overrightarrow{const})$$

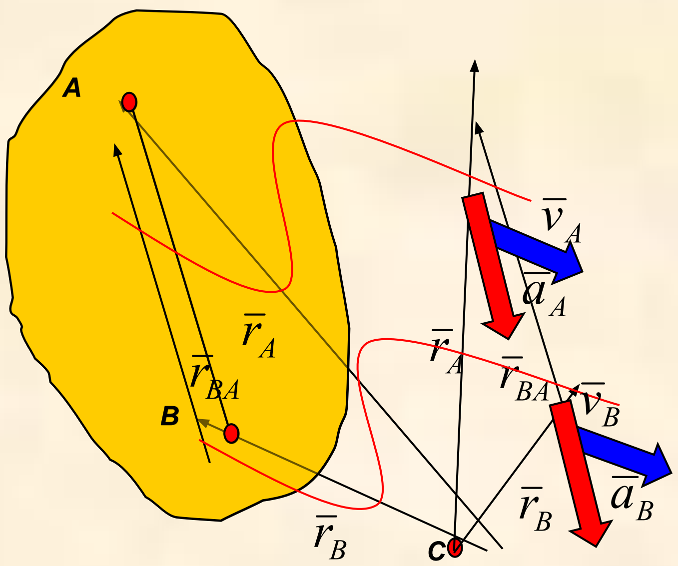
$$\vec V_B = \frac{d\vec r_B}{dt} = \frac{d\vec r_A}{dt} + \frac{d(\vec{AB})}{dt} = \vec V_A\,, \quad \vec a_B = \frac{d\vec V_B}{dt} = \frac{d\vec V_A}{dt} = \vec a_A\,.$$

Уравнения поступательного движения твердого тела:

$$\begin{cases} x_A = f_1(t) \\ y_A = f_2(t) \\ z_A = f_3(t) \end{cases}$$

КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

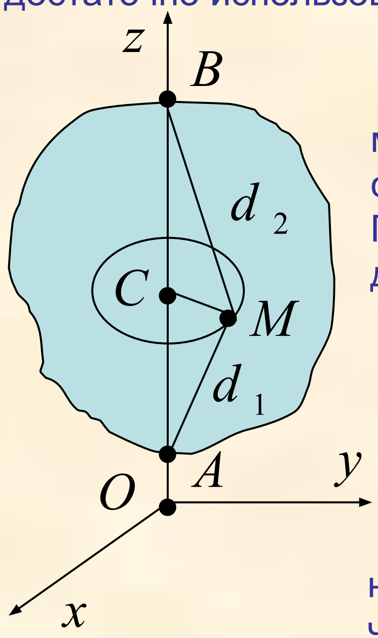
ПРИМЕР ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ



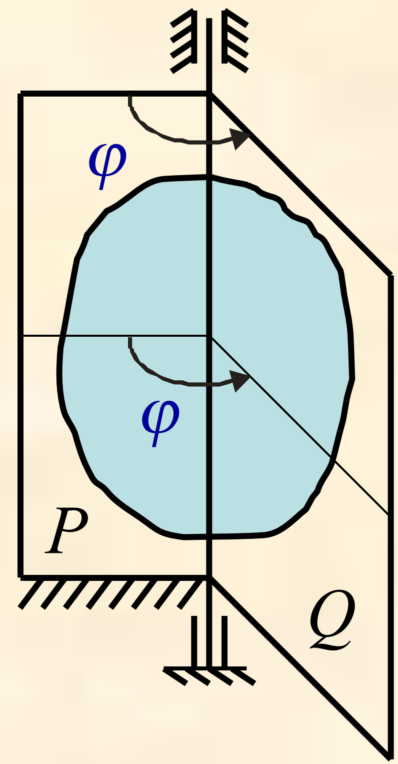
Вращательное движение твердого тела

Вращательным называют такое движение твердого тела, при котором две точки тела остаются неподвижными, а траекториями остальных точек тела являются окружности, лежащие в плоскостях, перпендикулярных прямой, проходящей через две неподвижные точки – оси вращения тела.

Покажем, что для задания вращательного движения твердого тела, достаточно использовать всего один параметр.



Действительно, три декартовых координаты произвольной точки М, лежащей на теле, в каждый момент времени должны удовлетворять двум соотношениям вида $d_1 = const$, $d_2 = const$. Поэтому для задания ее положения в пространстве достаточно задать лишь одну координату.



Однако, для задания вращательного движения твердого тела вместо задания декартовой координаты одной из его точек гораздо удобнее использовать угол поворота тела.

Углом поворота тела называют двугранный угол φ между неподвижной P и подвижной Q плоскостями, проходящими через ось вращения тела, отсчитываемый от неподвижной плоскости.

Уравнение вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси $\varphi = f(t)$.

Угловая скорость вращающегося твердого тела.

Пусть в момент времени t угол поворота тела $\varphi = \varphi(t)$, а в момент - времени t+Δt угол поворота тела $\varphi = \varphi(t + \Delta t)$.

Тогда за промежуток времени Δt приращение угла поворота $\Delta\varphi = \varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)$.

Средняя угловая скорость вращения тела: $\omega_{cp} = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}$.

Мгновенная угловая скорость поворота тела: $\omega = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \dfrac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$.

Размерность угловой скорости в системе СИ: $\left[\omega\right] = \dfrac{рад}{сек} = c^{-1}$.

В технике для характеристики скорости вращающегося

твердого тела часто используют число оборотов в минуту $n\dfrac{об}{мин}$.

Связь между ω и n дается формулой : $\omega = \dfrac{\pi n}{30}$.

Угловое ускорение вращающегося твердого тела.

Пусть в момент времени t угловая скорость тела $\omega = \omega(t)$,

а в момент времени t+Δt $\omega = \omega(t + \Delta t)$.

Тогда за промежуток времени Δt приращение угловой скорости тела

$$\Delta\omega = \omega(t + \Delta t) - \omega(t).$$

Среднее угловое ускорение тела $\varepsilon_{ср} = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$.

Мгновенное угловое ускорение тела $\varepsilon = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t} = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}$.

Размерность углового ускорения в системе СИ $[\varepsilon] = \dfrac{рад}{сек^2} = c^{-2}$.

Часто используемые законы вращательного движения:

равномерное вращение
$$\begin{cases} \varepsilon = 0, \\ \omega = \omega_0 = const, \\ \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t; \end{cases}$$

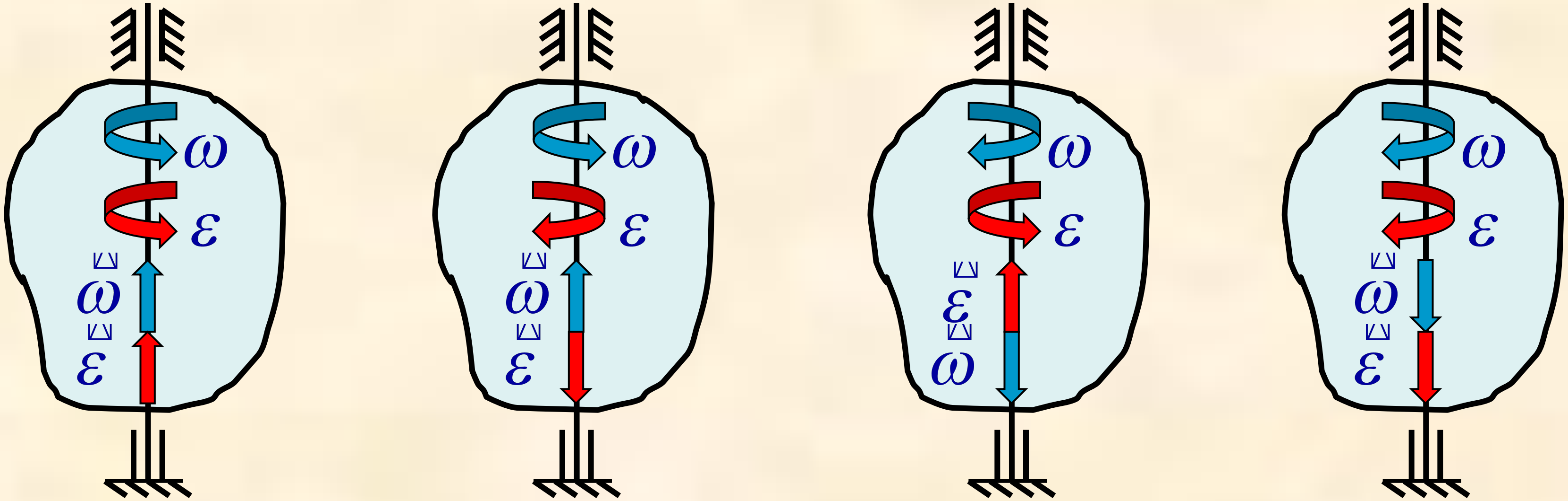
равнопеременное вращение
$$\begin{cases} \varepsilon = const, \\ \omega = \omega_0 \pm \varepsilon t, \\ \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t \pm \dfrac{1}{2}\varepsilon t^2; \end{cases}$$

гармонические колебания $\varphi = \varphi_0 \sin(kt)$.

Векторы угловой скорости и углового ускорения вращающегося твердого тела.

Вектором угловой скорости вращающегося твердого тела называют вектор $\vec{\omega}$ с модулем $|\vec{\omega}| = |\dot{\varphi}|$, направленный по оси вращения тела, в ту сторону, откуда оно кажется происходящим против хода часовой стрелки.

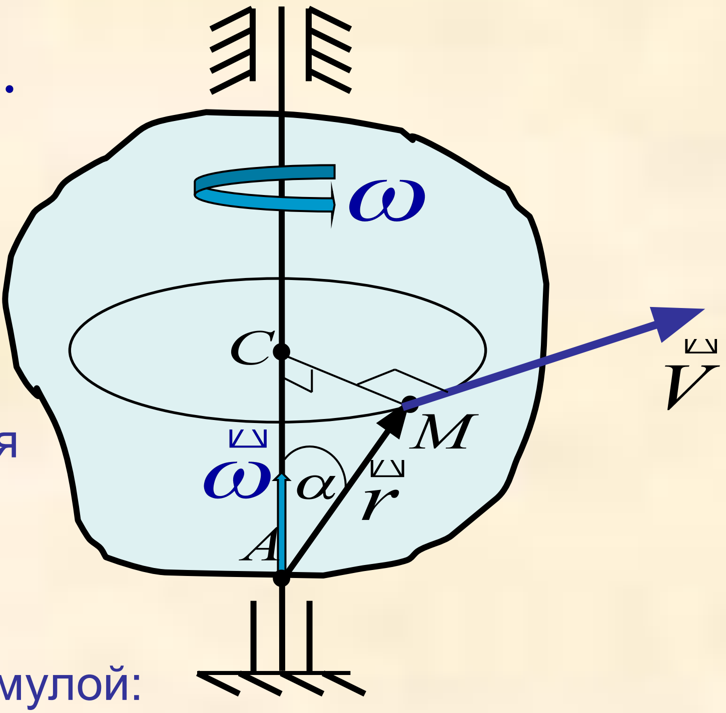
Вектором углового ускорения вращающегося твердого тела называют вектор $\vec{\varepsilon}$ с модулем $|\vec{\varepsilon}| = |\dot{\omega}|$, направленный по оси вращения тела, в туже сторону, что и вектор угловой скорости $\vec{\omega}$, при ускоренном вращении тела и в сторону, противоположную вектору угловой скорости $\vec{\omega}$, при замедленном вращении.



ускоренное замедленное замедленное ускоренное

Скорость точки вращающегося твердого тела
Выражение скорости в виде векторного произведения

Как следует из раздела «Кинематика точки» , при движении точки по окружности, её скорость имеет модуль $\left|\vec{V}\right| = \omega \cdot CM$ и направлена перпендикулярно радиусу окружности CM.



Рассмотрим векторное произведение $\vec{\omega} \times \vec{r}$.
Его модуль $\left|\vec{\omega} \times \vec{r}\right| = \left|\vec{\omega}\right| \cdot \left|\vec{r}\right| \cdot \sin\alpha = \omega \cdot CM$ совпадает с модулем вектора скорости точки $\vec{V}$, а направление совпадает с направлением вектора скорости точки, следовательно, скорость точки вращающегося твердого тела можно выразить в виде векторного произведения

$$\boxed{\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}} \quad (*)$$

В общем виде скорость точки выражается формулой:

$\vec{V} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$. В рассматриваемом случае $\left|\vec{r}\right| = const$, поэтому выражение (*)

дает правило дифференцирования вектора постоянного модуля:

$$\boxed{\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}.}$$

Ускорение точки вращающегося твердого тела. Тангенциальное и нормальное ускорения. Их выражение в виде векторных произведений.

Для нахождения ускорения точки вращающегося твердого тела продифференцируем по времени выражение скорости (*), учитывая, что $|\vec{r}| = const$:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega}\times\vec{r})}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt}.$$

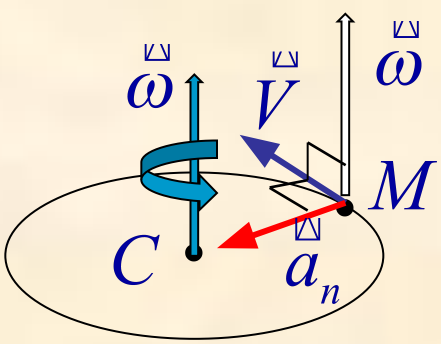
Выясним смысл отдельных слагаемых, входящих в полученное выражение

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} = \vec{\varepsilon}\times\vec{r} = \vec{a}_\tau$$

- тангенциальное (касательное) ускорение, совпадающее с вектором скорости точки при ускоренном вращении тела и направленное противоположно вектору скорости точки при замедленном вращении;

$$\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{V} = \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r} = \vec{a}_n$$

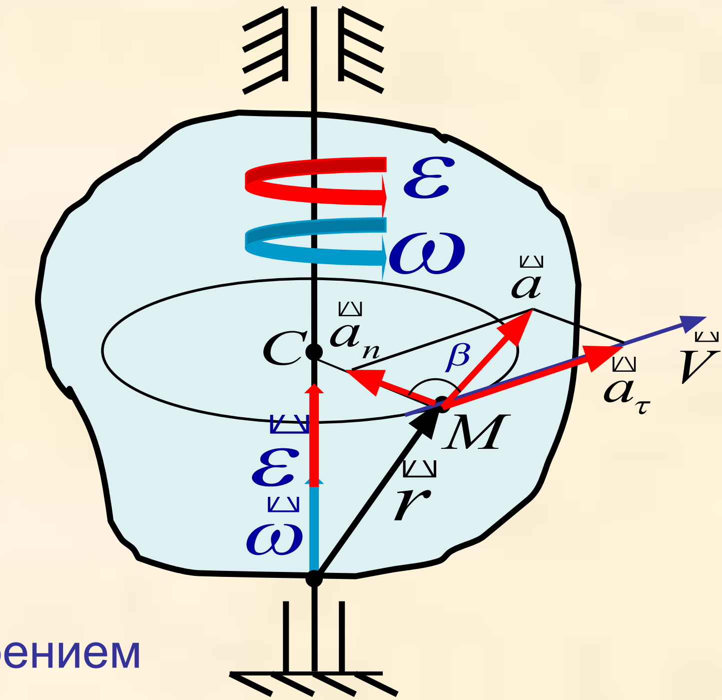
- нормальное(центростремительное) ускорение, направленное к оси вращения тела при любом характере вращения.



Ускорение точки вращающегося твердого тела.

В каждый момент времени $\vec{a}_n \perp \vec{a}_\tau$,
поэтому модуль полного ускорения точки вращающегося твердого тела можно вычислить по формуле

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \ .$$



Учитывая выражения для модулей тангенциального и нормального ускорений

$$\left|\vec{a}_\tau\right| = \varepsilon \cdot CM \, ; \quad \left|\vec{a}_n\right| = \omega^2 \cdot CM \, ,$$

получим : $\left|\vec{a}\right| = CM \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \ .$

Важно заметить, что угол между полым ускорением точки вращающегося тела и радиусом окружности

$$\beta = arctg \frac{\left|\vec{a}_\tau\right|}{\left|\vec{a}_n\right|} = arctg \frac{\varepsilon}{\omega^2}$$

остается постоянным для всех точек тела.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ КИНЕМАТИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

1. СКОРОСТЬ ТОЧКИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

$$\left|\vec{V}\right| = \omega \cdot R \;,\; \vec{V} \perp R$$

Вектор скорости точки направлен в сторону вращения тела.

2. УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

$$\left|\vec{a}_\tau\right| = \varepsilon \cdot R \;,\; \vec{a}_\tau \perp R$$

Тангенциальное (касательное) ускорение точки направлено так же как вектор скорости при ускоренном вращении тела и противоположно вектору скорости при замедленном вращении тела.

$\left|\vec{a}_n\right| = \omega^2 \cdot R \;,\; \vec{a}_n$ [illegible] R

Нормальное (центростремительное) ускорение всегда направлено к оси вращения тела.

$$\left|\vec{a}\right| = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

Полное ускорение точки.

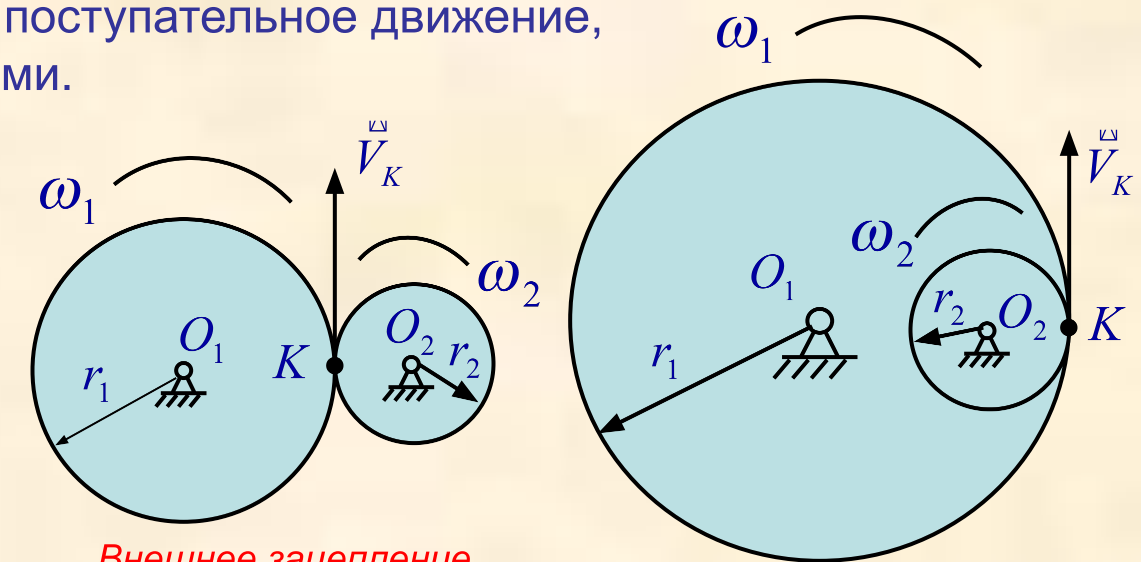
Здесь R - кратчайшее расстояние от точки до оси вращения тела.

Преобразование движений. Передаточное соотношение.

В технике часто возникает необходимость в преобразовании движений

- ✔ вращательного движения вокруг одной неподвижной оси во вращательное движение, вокруг другой неподвижной оси и с другими характеристиками;
- ✔ вращательного движения в поступательное и поступательного движения во вращательное;
- ✔ поступательного движения в поступательное движение, но с другими характеристиками.

При преобразовании вращательного движения во вращательное движение можно ввести передаточное отношение.



Внешнее зацепление

Внутренне зацепление

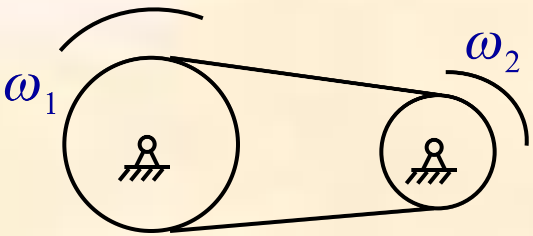
Скорость точки зацепления поверхности двух зубчатых колес, вращающихся вокруг неподвижных осей $\left|\vec{V}_K\right| = \omega_1 \cdot r_1 = \omega_2 \cdot r_2$,

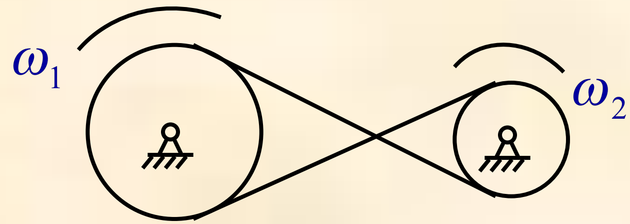
отсюда следует передаточное отношение $i_{1-2} = \dfrac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \dfrac{r_2}{r_1}$, при этом знак «+»

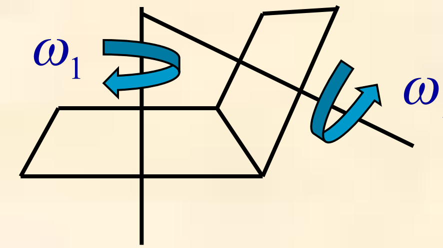
соответствует внутреннему зацеплению, а знак «-» внешнему зацеплению.

Примеры преобразования движений

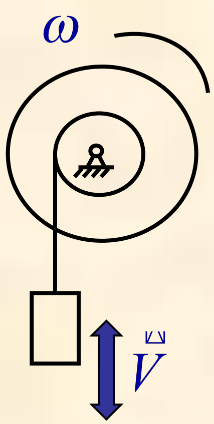
ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ➔ ВРАЩАТЕЛЬНОЕ

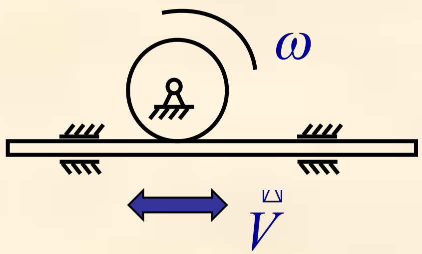


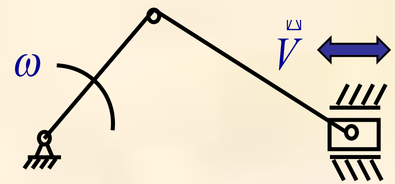


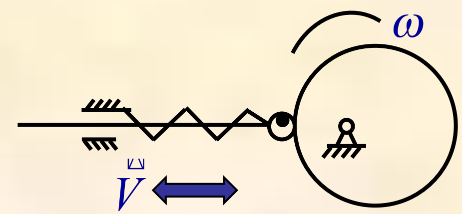


ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ⟷ ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ









ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ ➔ ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ