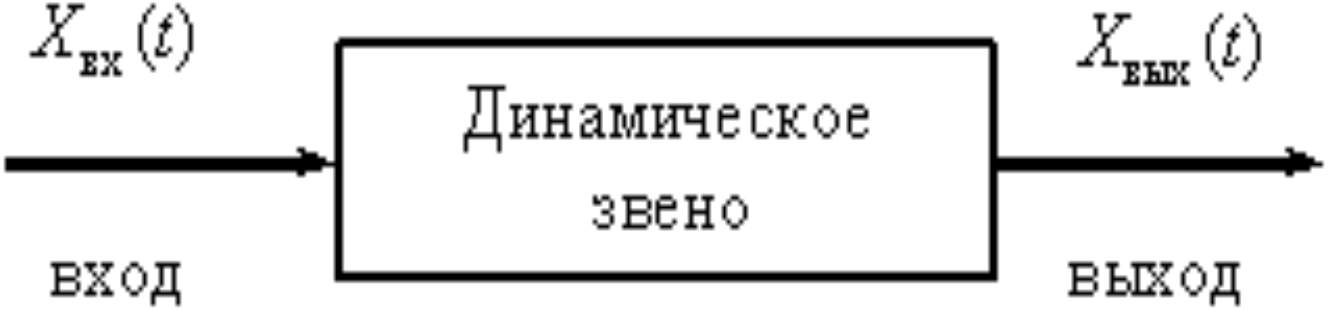
2. Понятие линейного динамического звена

2.1 Общие сведения

САУ удобно представлять для анализа и при синтезе в виде взаимосвязанной совокупности отдельных элементов – динамических звеньев.

Под <u>**динамическим звеном**</u> понимают в общем случае абстрактное устройство, имеющее вход и выход, и для которого задано уравнение, связывающее сигналы на входе и выходе, как это показано на рис. 2.1.


$X_{вх}(t)$
Динамическое
звено
$X_{вых}(t)$
вход
выход

Подробное изучение свойств реальных **ОУ** и **САУ** приводит к описанию динамических звеньев в виде нелинейных дифференциальных уравнений. Но во многих случаях их можно линеаризовать, то есть заменить нелинейные уравнения линейными, приближенно описывающими процессы в системах. Тем самым осуществляется декомпозиция задач анализа и синтеза систем, то есть первоначально используют линейное представление, а затем осуществляют учет вносимых нелинейностями особенностей. Такому подходу способствует то, что, в большинстве случаев, нормально функционирующая система работает в режиме малых отклонений, при которых нелинейности не проявляются. В дальнейшем мы будем рассматривать преимущественно аппарат изучения линейных систем.

Уравнение линейного динамического звена имеет следующий общий вид:

$$a_0 \frac{d^n X_{\text{вых}}(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} X_{\text{вых}}(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dX_{\text{вых}}(t)}{dt} + a_n X_{\text{вых}}(t) =$$

$$b_0 \frac{d^m X_{\text{вх}}(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} X_{\text{вх}}(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_{m-1} \frac{dX_{\text{вх}}(t)}{dt} + b_m X_{\text{вх}}(t),$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_m$ - постоянные коэффициенты,

Использовать такое описание динамического звена в задачах анализа и синтеза систем и объектов управления не рационально, поэтому существуют и иные формы описания и представления динамических звеньев и систем в целом.

Передаточная функция

Подвергнем предыдущее уравнение преобразованию Лапласа, считая начальные условия нулевыми и заменяя оригиналы сигналов их изображениями по Лапласу

$$X_{вх}(s) = L\{X_{вх}(t)\}, \ X_{вых}(s) = L\{X_{вых}(t)\}$$

Используя теоремы преобразования Лапласа линейности и дифференцирования, получим операторное уравнение, связывающие изображения входного и выходного сигналов

$$X_{вх}(t)$$

Преобразуем последнее уравнение к следующему виду

$$\left(a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n\right) X_{вых}(s) = \left(b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_{m-1} s + b_m\right) X_{вх}(s)$$

Получим из последнего уравнения отношение изображений выходного и входного сигналов

$$\frac{X_{вых}(s)}{X_{вх}(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n} = \frac{B(s)}{A(s)}.$$

Последнее отношение не зависит от изображений сигналов, определяется только параметрами самого динамического звена и имеет вид дробно-рациональной функции.

Отношение изображений выходного и входного сигналов при нулевых начальных условиях называют **передаточной функцией** динамического звена

$$W(s) = \frac{X_{\text{вых}}(s)}{X_{\text{вх}}(s)}$$

Уравнение вида

$$A(s) = 0, \quad a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

называют **характеристическим уравнением** динамического звена, так как знаменатель передаточной функции – это характеристический полином дифференциального уравнения, описывающего динамическое звено.

- Числитель передаточной функции называют *операторным коэффициентом передачи*. Его корни, при которых **W(p)=0**, называются <u>**нулями передаточной функции**</u>

Звено **САУ** с известной передаточной функцией называется <u>**динамическим звеном**</u>. Оно изображается прямоугольником, внутри которого записывается выражение передаточной функции. То есть это обычное функциональное звено, функция которого задана математической зависимостью выходной величины от входной в динамическом режиме. Для звена с двумя входами и одним выходом должны быть записаны две передаточные функции по каждому из входов. Передаточная функция является основной характеристикой звена в динамическом режиме, из которой можно получить все остальные характеристики.

Схема САУ, составленная из динамических звеньев, называется **структурной**.

Исследование любой **САУ** включает в себя математическое описание системы. На базе которого и исследуют статические и динамические режимы ее работы.

Математическое описание системы (математическая модель) начинается с разбиения ее на звенья. Последнее может осуществляться либо аналитически в виде уравнений, связывающих входные и выходные величины звена, либо графически в виде характеристик, описывающих эту связь.

По уравнениям или характеристикам отдельных звеньев составляются уравнения или характеристики системы в целом, на основании которых и исследуется система.

При этом систему следует разбивать на возможно более простые звенья, но вместе с тем необходимо, чтобы они обладали **направленностью действия.**

<u>Звеном направленного действия</u> называется звено, передающее воздействие только в одном направлении – со входа на выход, так что изменение состояния этого звена не влияет на состояние предшествующего звена, работающего на его вход.

В результате при разбиении системы на звенья направленного действия математическое описание каждого звена может быть составлено без учета связи его с другими звеньями.

Таким образом математическое описание всей системы в целом может быть получено как совокупность составленных независимо друг о друга уравнений или характеристик отдельных звеньев, образующих систему, дополненную уравнениями связи между звеньями.

На основании математического описания составляется **структурная схема** системы, которая и называется ее **математической моделью**.

На структурной схеме изображаются все основные устройства **ЭМС**. Устройства, функциональные части и элементы изображаются в виде прямоугольников, соединенных линиями связи, дающих представление о взаимосвязи устройств, функциональных частей и элементов **САУ**.

При использовании структурной схемы для анализа и синтеза внутри прямоугольников записываются передаточные функции элементов $W(p)_i$. Получение такой структурной схемы является конечной целью математического описания системы.

2.2. . Элементарные динамические звенья

Динамика большинства функциональных элементов **САУ** независимо от исполнения может быть описана одинаковыми по форме дифференциальными уравнениями не более второго порядка. Такие элементы называют **элементарными динамическими звеньями**. Передаточная функция элементарного звена в общем виде задается отношением двух полиномов не более чем второй степени:

$$W_{ý}(p) = \frac{b_0p^2 + b_1p + b_2}{a_0p^2 + a_1p + a_2}$$

Известно также, что любой полином произвольного порядка можно разложить на простые сомножители не более, чем второго порядка. Так по теореме Виета можно записать

$$a_0p^n + a_1p^{n-1} + a_2p^{n-2} + a_n = a_0(p - p_1)(p - p_2)\ldots(p - p_n)$$

где p_i – корни характеристического полинома.

Корни могут быть либо комплексно-сопряженными, либо вещественными

Любую сложную передаточную функцию линеаризованной САУ можно представить как произведение передаточных функций элементарных звеньев. Каждому такому звену в реальной **САУ**, как правило, соответствует какой - то отдельный узел. Зная свойства отдельных звеньев можно судить о динамики **САУ** в целом.

В теории удобно ограничиться рассмотрением *типовых звеньев*, передаточные функции которых имеют числитель или знаменатель, равный единице

Из них могут быть образованы все остальные звенья. Звенья, у которых порядок полинома числителя больше порядка полинома знаменателя, технически нереализуемы.

Пример

Составим передаточную функцию **ДПТ нв.,** принципиальная схема которого приведена на рис.2.2.

Рассмотрим статический режим работы двигателя при следующих допущениях:

1. не учитывается падение напряжения на щетках
2. не учитывается продольная реакция якоря из-за сдвига щеток с нейтрали
3. Не учитывается поперечная реакция якоря.

В этом случае:

$$U = E + R_я \cdot I_я + L_я \cdot pI_я$$

$$E = k \cdot \Phi \cdot \omega$$

$$M = k \cdot \Phi \cdot I$$

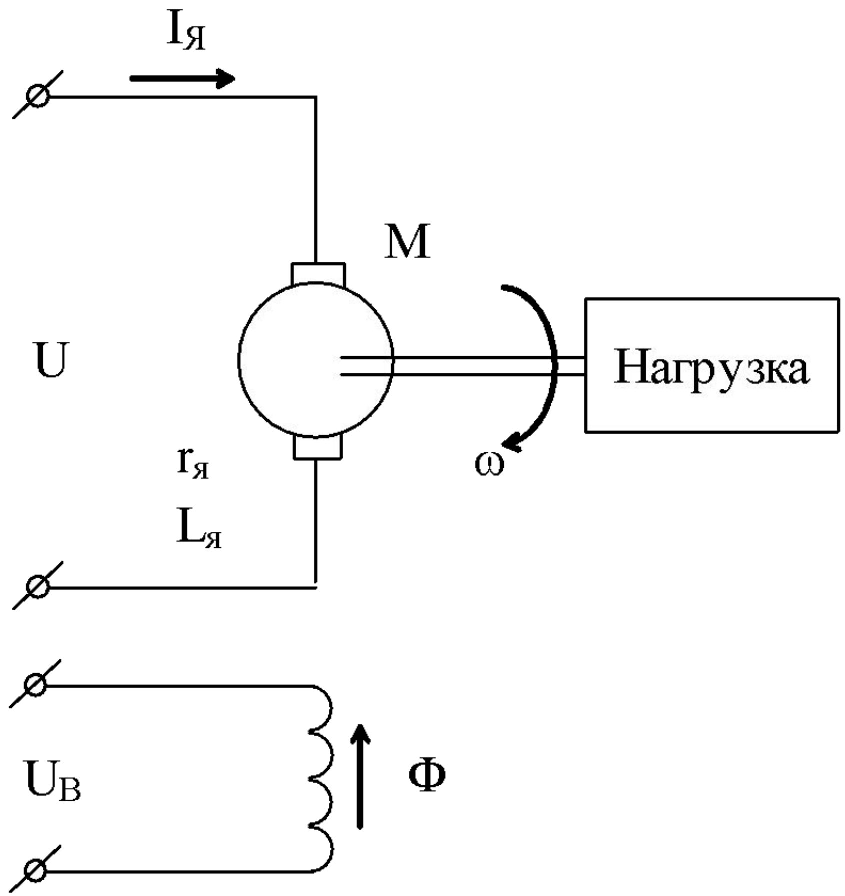


Рис. 2.2. Двигатель постоянного тока независимого возбуждения

При изменении частоты вращения возникает динамический момент

$$M_{\text{дин}} = J \cdot \frac{d\omega}{dt} = M - M_{\text{с}}$$

Структурные схемы, составленные в соответствии с последними уравнениями, приведены на рис.2.3 (при переменном магнитном потоке) и рис.2.4 (при постоянном магнитном потоке)

(составить самостоятельно и проверить с рис.2.3, рис.2.4)

ДПТ нв можно рассматривать как **ЭМС,** имеющую две выходные координаты: ток якоря и частоту вращения и три входных: напряжение на обмотке якоря, напряжение на обмотке возбуждения, момент сопротивления (рис.2.5).

Сначала найдем передаточные функции ДПТ

Найдем передаточную функцию **ДПТнв** между выходной – частотой вращения и входной – напряжением на обмотке якоря.

Преобразуем уравнение равновесия напряжений на **ОЯ**

$$U = k \cdot \Phi \cdot \omega + R_я \cdot I_я \cdot (1 + T_э p)$$

Из уравнения движения ЭП получим

$$I = \frac{J}{k \cdot \Phi} \cdot p\omega + I_с$$

Подставим последнее уравнение в предпоследнее

$$U = k \cdot \Phi \cdot \omega + R_я \cdot (1 + T_э p) \cdot \left(\frac{J}{k \cdot \Phi} \cdot p\omega + I_c \right)$$

Или преобразуем

$$(1 + T_М p + T_э T_М p)\omega = \frac{1}{k\Phi} U - \frac{R_я}{k\Phi} (1 + T_э p) I_c$$

где

$$T_М = JR_я \Big/ (k\Phi)^2$$

электромеханическая постоянная времени

Из последнего выражения переходя к изображениям Лапласса

$$W_1(p) = \frac{\omega(p)}{U(p)} = \frac{1/k\Phi}{T_э T_м p^2 + T_м p + 1}$$

$$W_2(p) = \frac{\omega(p)}{M_c(p)} = \frac{R_я (T_э p + 1)/(k\Phi)^2}{T_э T_м p^2 + T_м p + 1}$$

Решив исходные выражения относительно тока якоря и перейдя также к изображениям Лапласса получим еще две передаточных функции

$$W_3(p) = \frac{I_я(p)}{U(p)} = \frac{T_М p / R_я}{T_Э T_М p^2 + T_М p + 1}$$

$$W_4(p) = \frac{I_я(p)}{M_C(p)} = \frac{1/k\Phi}{T_Э T_М p^2 + T_М p + 1}$$

Уравнение цепи возбуждения

$$U_в = R_в I_в + L_в p I_в = R_в I_в \left(1 + T_в p\right)$$

Передаточные функции можно составить дополнительно используя последним уравнением цепи возбуждения

$$W_5(p) = \frac{\omega(p)}{U_в(p)} \quad и \quad W_6(p) = \frac{I_я(p)}{U_в(p)}$$

<u>Вывести самостоятельно</u>

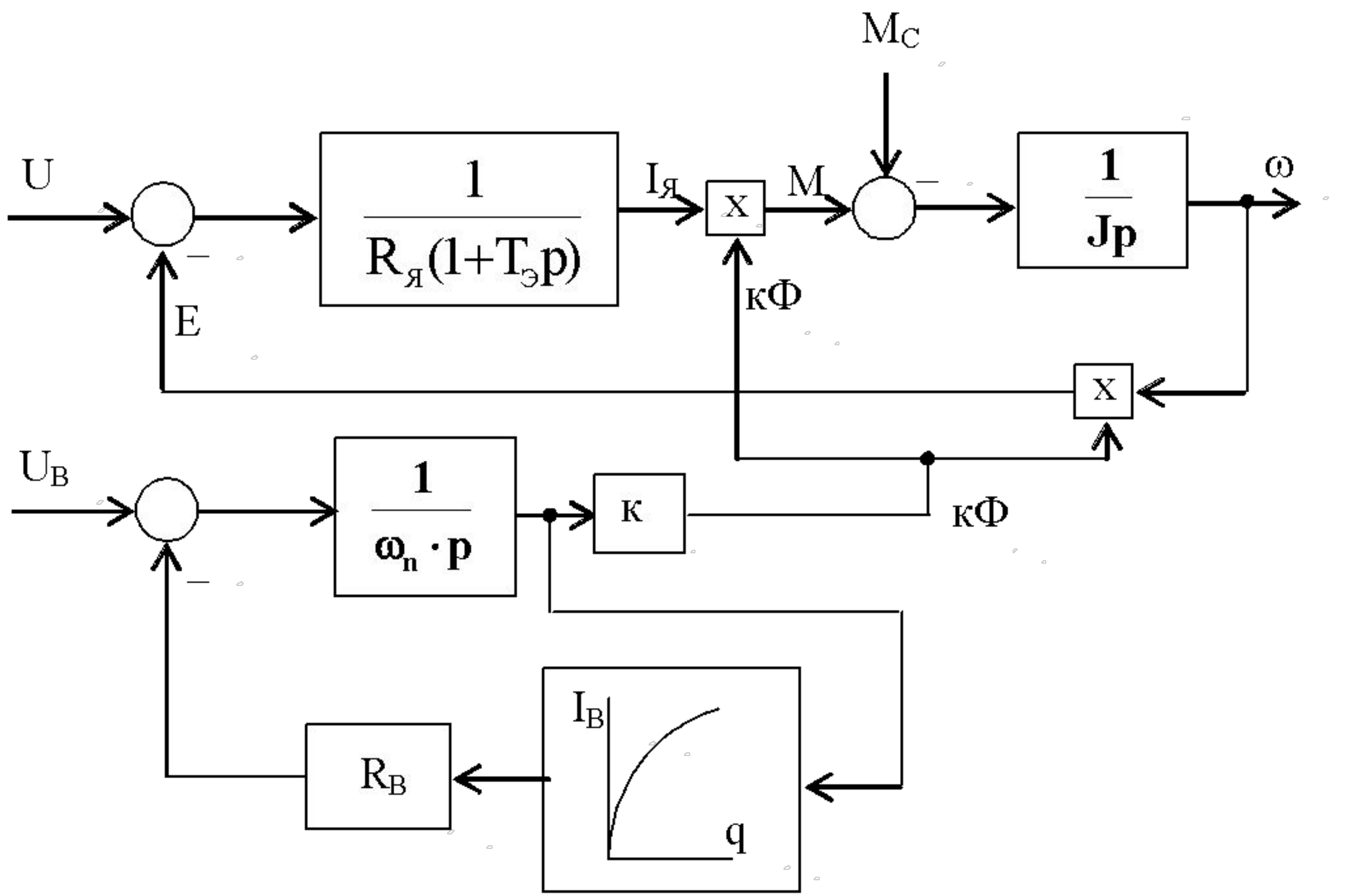


Рис. 2.3. Структурная схема двигателя постоянного тока при переменном магнитном потоке

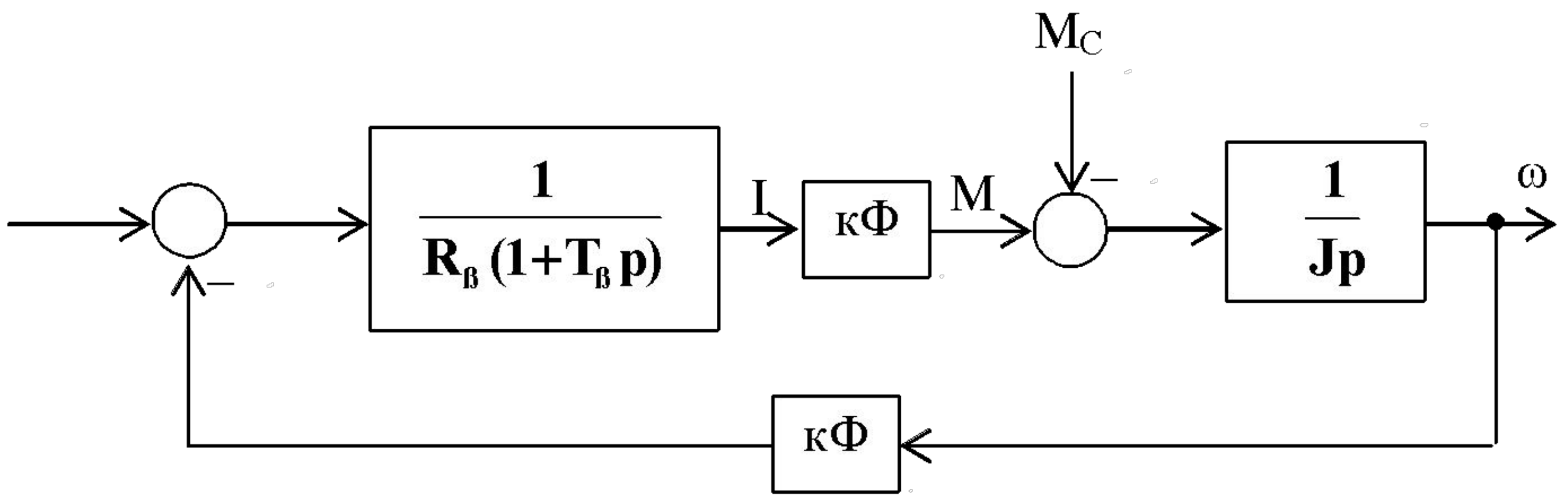


Рис. 2.4. Структурные схемы двигателя постоянного тока при постоянном магнитном потоке

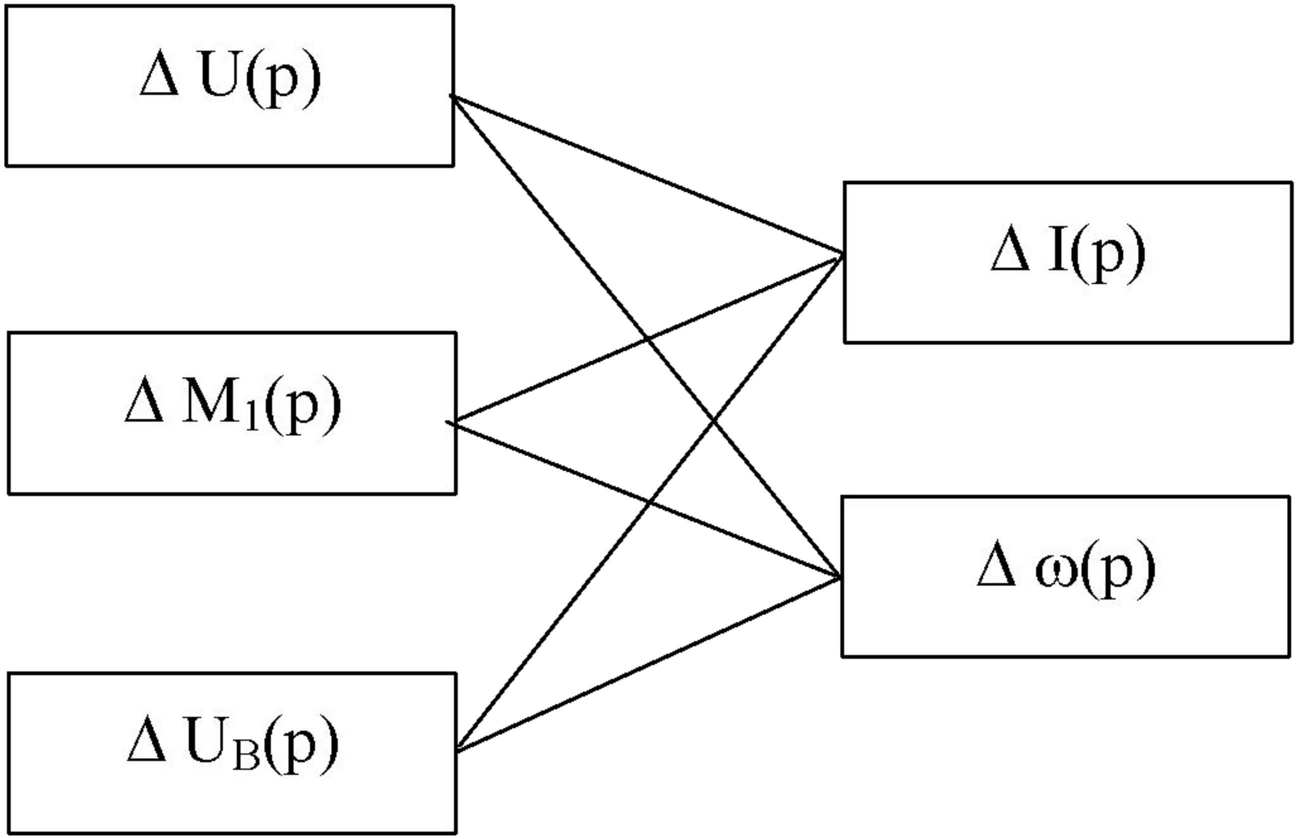


Рис 2.5. Схема связей входных и выходных координат ДПТ

Таким образом можно получить передаточную функцию ДПТ между любой выходной и входной координатой (рис.2.6)

Задача 1

Найти передаточную функцию и записать дифференциальное уравнение пассивной электрической цепи (рис.2.7).

Решение

Используем операторную форму записи сопротивлений

$$\text{индуктивного} - x_L = pL,$$

$$\text{емкостного} - x_C = 1/pC \quad \text{и} \quad \text{активного} - R$$

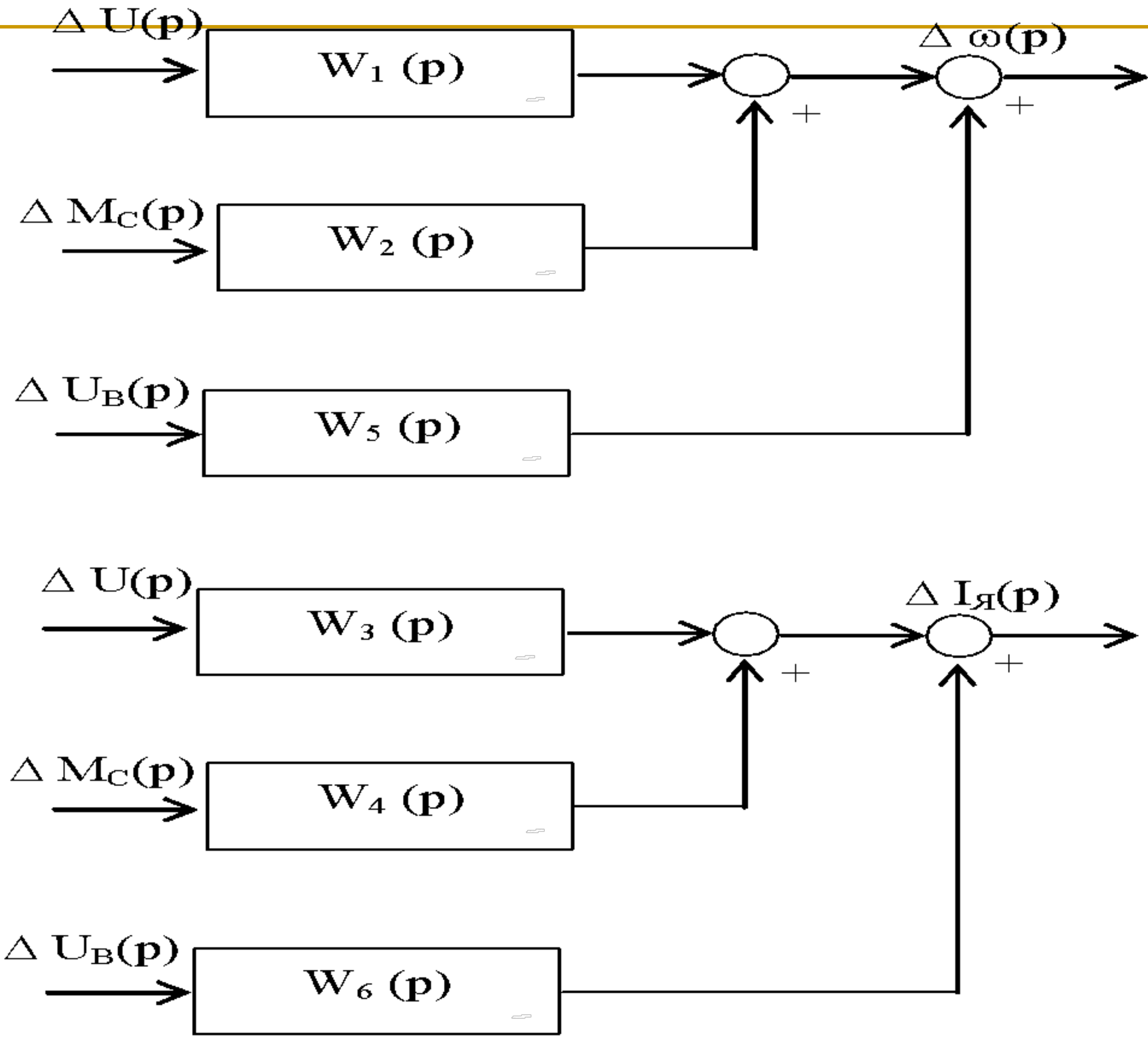


Рис 2.6. Передаточные функции двигателя постоянного независимого возбуждения

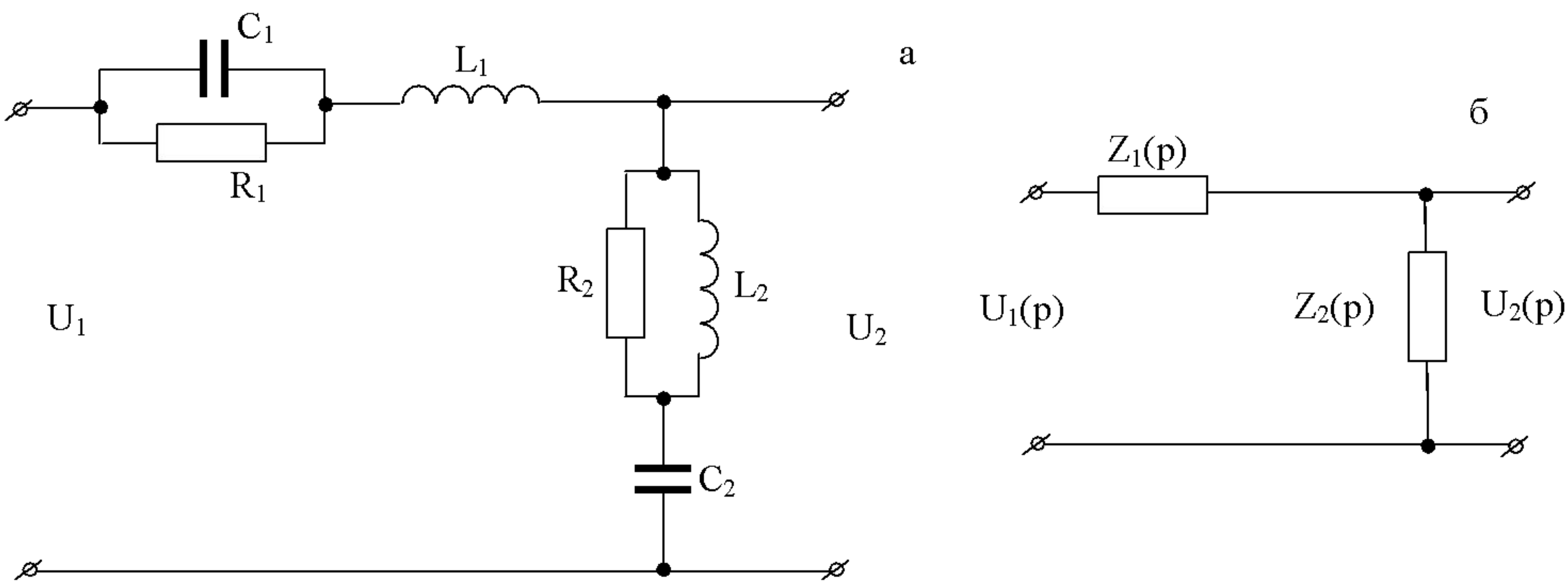


Рис. 2.7. Схема пассивной цепи (а) и ее эквивалентная схема (б)

$$Z_1 = \frac{\frac{1}{pC_1} \cdot R_1}{R_1 + \frac{1}{pC_1}} + pL_1 = \frac{R_1\left(T_1^2 p^2 + T_{1L}p + 1\right)}{T_{1C}p + 1}$$

где $T_1 = \sqrt{L_1 \cdot C_1}$ $\quad T_{1L} = \dfrac{L_1}{R_1}$ $\quad T_{1C} = R_1 \cdot C_1$

$$Z_2 = \frac{R_2 \cdot C_2 \cdot p}{R_2 + L_2 \cdot p} + \frac{1}{C_2 \cdot p} = \frac{R_2 \cdot \left(T_2^2 \cdot p^2 + T_{2L} \cdot p + 1\right)}{p \cdot \left(T_{2C} + T_2^2 \cdot p\right)}$$

где $T_2 = \sqrt{L_2 \cdot C_2}$ $\quad T_{2C} = L_2 / C_2$ $\quad T_{2C} = R_2 \cdot C_2$

Передаточная функция эквивалентной цепочки находится как отношение

$$W_2(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{Z_2(p)}{Z_1(p) + Z_2(p)}$$

Подставив в последнее уравнение полученные выше выражения, получим искомую передаточную функцию электрической схемы

$$W(p) = \frac{\dfrac{R_2 \cdot \left(T_2^2 p^2 + T_{2L} p + 1\right)}{p \cdot \left(T_{2C} + T_2^2 p\right)}}{\dfrac{R_1 \cdot \left(T_1^2 p^2 + T_1 p + 1\right)}{\left(T_{1C} p + 1\right)} + \dfrac{R_2 \left(T_2^2 p^2 + T_{2L} p + 1\right)}{p\left(T_{2C} + T_2^2 p\right)}} =$$

$$= \frac{R_2 \left(b_0 p^3 + b_1 p^2 + b_2 p + b_3\right)}{R_2 \left(b_0 p^3 + b_1 p^2 + b_2 p + b_3\right) + R_1 \left(d_0 p^4 + d_1 p^3 + d_2 p^2 + d_3 p\right)}$$

где $\quad b_0 = T_2^2 T_{1C} \quad b_1 = T_2^2 + T_{2L} T_{1C} \quad b_2 = T_{2L} + T_{1C} \quad b_3 = 1$

$$d_0 = T_1^2 \cdot T_2^2 \quad d_1 = T_1^2 T_{2C} + T_2^2 \cdot T_{1L} \quad d_2 = T_{1L} \cdot T_{2C} + T_2^2 \quad d_3 = T$$

Соответственно дифференциальное уравнение рассматриваемой электрический цепи относительно напряжений примет вид

$$\left[R_2\left(b_0p^3 + b_1p^2 + b_2p + b_3\right) + R_1\left(d_0p^4 + d_1p^3 + d_2p^2 + d_3p\right)\right]U_2(t) =$$
$$= R_2\left(b_0p^3 + b_1p^2 + b_2p + b_3\right)U_1(t)$$