

Математическое моделирование АСР

Математическое моделирование АСР и составляющих ее элементов служит эффективным инструментом решения теоретических и практических задач в области автоматического регулирования. Методы математического моделирования используются на всех этапах «жизни» системы: при исследовании объектов, подлежащих автоматизации, при синтезе АСР, при анализе работы систем в процессе эксплуатации.

Значительный вклад в развитие теории автоматического регулирования внесли российские ученые. Так концепция опорно-возмущенного движения, предложенная А.К. Ляпуновым, является основой решения вопросов устойчивости АСР, выбора нужного закона регулирования, анализа работы систем.

Математическое моделирование АСР

В соответствии с этой концепцией изменение во времени любых переменных, в том числе и регулируемого параметра, может быть представлено **двумя**

составляющими:

функцией, характеризующей **базовое (опорное)** состояние регулируемого параметра, и функцией **возмущенного движения**, которая отражает **динамику отклонений переменной от базового значения**.

Математическое моделирование АСР

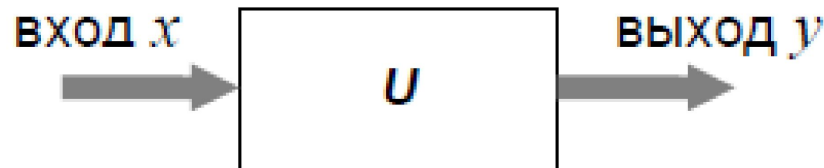
Поскольку при регулировании такие отклонения невелики, то для математического описания возмущенного движения пригодны **обычные дифференциальные уравнения** и линеаризованные зависимости, что существенно упрощает решение задач методами математического моделирования.

Математическое моделирование АСР

Модели, предназначенные для решения задач управления, могут быть представлены определенными сочетаниями **типовых динамических звеньев**.

Любой объект можно представить взаимодействующим с внешней средой с помощью входов и выходов. Входы – это возможные воздействия на объект, выходы – это результаты его работы. Например, для электродвигателя входами могут быть напряжение питания и нагрузка, а выходами – частота вращения вала, температура.

При изменении состояния входа меняется внутреннее состояние объекта и, как следствие, состояние выходов.



Математическое моделирование АСР

Типовое динамическое звено – это условное представление одной математической зависимости, с помощью которой можно описать переходный процесс в отдельной части системы;

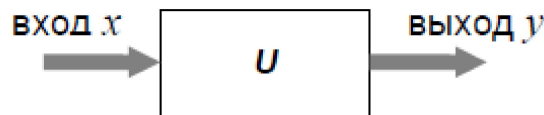
- это математическая модель, описывающая характер преобразования, выполняемого реальными элементами АСР, которые могут различаться по своим функциям, принципам действия, конструкции, используемой энергии и т.д. (общее – только характер преобразования).

Количество и разновидности используемых звеньев определяются назначением системы и динамическими свойствами ее основных элементов.

Математическое моделирование АСР

Создание и использование таких моделей основано на следующих предпосылках.

1. Звено отражает динамику передачи воздействия **только от одного входа к одному выходу**.
2. Звено отражает динамику передачи воздействия **только в одну сторону** – от входа к выходу.



Математическое моделирование АСР

3. Если необходимо учитывать **влияние выхода на вход**, как это обычно бывает, то применяется **обратная связь**, которая может быть отрицательной или положительной, постоянно действующей («жесткой») или же постепенно исчезающей к концу переходного процесса («гибкой»).
4. При алгебраическом сложении передаваемых в системе сигналов используется **принцип суперпозиции** (резльтирующий эффект равен сумме эффектов отдельных воздействий), что **справедливо лишь для линейных систем**.

Математическое моделирование АСР

5. Преобразование описывается **линейным** дифференциальным уравнением n -го порядка.

$$a_n \frac{d^n y(\tau)}{d\tau^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(\tau)}{d\tau^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{d y(\tau)}{d\tau} + a_0 y(\tau) =$$
$$b_m \frac{d^m x(\tau)}{d\tau^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(\tau)}{d\tau^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{d x(\tau)}{d\tau} + b_0 x(\tau) \quad (1)$$

где $x(\tau)$ – входная величина;

$y(\tau)$ -выходная величина;

a_i, b_i –постоянные коэффициенты;

τ – время.

Математическое моделирование АСР

Система расчленяется на отдельные динамические звенья так, чтобы они могли описывать переходные процессы с помощью дифференциальных уравнений не выше второго порядка ($n \leq 2$, такое звено называется **элементарным**, если оно не может быть разбито на более простые).

Математическое моделирование АСР

- Наиболее широко используются следующие типовые динамические звенья:
- Пропорциональное (усилительное)
- Интегрирующее
- Идеальное дифференцирующее
- Реальное дифференцирующее
- Инерционное (апериодическое) 1-го порядка
- Чистого запаздывания

Математическое моделирование АСР

Пропорциональное (усилительное) звено моделирует такие устройства, как усилители, нормирующие преобразователи, механические передачи (например, зубчатые), рычаги и т.д.

Из общего дифференциального уравнения (1) ему соответствует:

$$a_0 y(\tau) = b_0 x(\tau)$$

После преобразования уравнение принимает вид:

$$y(\tau) = K x(\tau)$$

где **K** – коэффициент передачи звена

Математическое моделирование АСР

Интегрирующее звено моделирует такие устройства, как электродвигательные исполнительные механизмы, интегральные регуляторы, астатические объекты регулирования...

Из общего дифференциального уравнения (1) ему соответствует $a_1 \frac{dy(\tau)}{d\tau} = b_0 x(\tau)$

После преобразования уравнение принимает вид:

$$\frac{dy(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{T_u} x(\tau)$$

$$y(\tau) = \frac{1}{T_u} \int x(\tau) d\tau$$

где T_u — постоянная времени интегрирования

Математическое моделирование АСР

Идеальное дифференцирующее звено используется для моделирования дифференциальной составляющей в законах регулирования.

После преобразования уравнение принимает вид:

$$a_0 y(\tau) = b_1 \frac{d x(\tau)}{d\tau} \rightarrow y(\tau) = T \frac{d x(\tau)}{d\tau}$$

где T – постоянная времени дифференцирования.

Математическое моделирование АСР

Идеальное дифференцирующее звено используется для моделирования дифференциальной составляющей в законах регулирования.

После преобразования уравнение принимает вид:

$$a_0 y(\tau) = b_1 \frac{d x(\tau)}{d\tau} \rightarrow y(\tau) = T \frac{d x(\tau)}{d\tau}$$

где T – постоянная времени дифференцирования.

Математическое моделирование АСР

Идеальное дифференцирующее звено используется для моделирования дифференциальной составляющей в законах регулирования.

После преобразования уравнение принимает вид:

$$a_0 y(\tau) = b_1 \frac{d x(\tau)}{d\tau} \rightarrow y(\tau) = T \frac{d x(\tau)}{d\tau}$$

где T – постоянная времени дифференцирования.

Математическое моделирование АСР

Инерционное (апериодическое) звено 1-го порядка используется для моделирования объектов с самовыравниванием, некоторых датчиков, РС-контуров.

После преобразования уравнение принимает вид:

$$a_1 \frac{dy(\tau)}{d\tau} + a_0 y(\tau) = b_0 x(\tau)$$



$$T \frac{dy(\tau)}{d\tau} + y(\tau) = K \cdot x(\tau)$$

где T – постоянная времени;

K – коэффициент передачи.

Математическое моделирование АСР

Звено чистого запаздывания используется для моделирования запаздывания в элементах АСР (в первую очередь – в объектах регулирования).

После преобразования уравнение принимает вид:

$$y(\tau) = x(\tau - \tau_3)$$

где τ_3 – время запаздывания.

Математическое моделирование АСР

Использование преобразования Лапласа для моделирования ТДЗ и систем

Преобразование Лапласа - интегральное преобразование, связывающее функцию $F(p)$ комплексного переменного (изображение) с функцией $f(\tau)$ действительного переменного (оригинал).

$f(\tau)$ называют оригиналом преобразования Лапласа, а $F(p)$ - изображением преобразования Лапласа.

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(x) e^{-px} dx$$

Математическое моделирование АСР

Функции $f(\tau)$ и $F(p)$ однозначно определяются друг относительно друга, то есть, если известно $f(\tau)$, то всегда можно узнать $F(p)$, и наоборот, если известно $F(p)$, то всегда можно получить $f(\tau)$.

Применение преобразования Лапласа к дифференциальному уравнению n -го порядка (1) даст его изображение:

$$a_n p^n Y(p) + a_{n-1} p^{n-1} Y(p) + \dots + a_1 p Y(p) + a_0 Y(p) = b_m p^m X(p) + b_{m-1} p^{m-1} X(p) + \dots + b_1 p X(p) + b_0 X(p)$$

Математическое моделирование АСР

Понятие о передаточной функции.

Передаточные функции основных ТДЗ

Из уравнения (2) можно выразить изображение выходной величины $Y(p)$:

$$Y(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} \cdot X(p)$$

Дробь, связывающая изображения по Лапласу выходной и входной величин получила название передаточной функции $W(p)$:

$$Y(p) = W(p) \cdot X(p)$$

Математическое моделирование АСР

Передаточная функция является динамической характеристикой того звена (комбинации звеньев, системы), к которой она относится.

Формальное определение передаточной функции соответствует выражению

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$$

Передаточная функция – это отношение изображения по Лапласу выходной величины к изображению входной.

Математическое моделирование АСР

Применив преобразование Лапласа к уравнениям типовых динамических звеньев, можно получить их передаточные функции:

$$y(\tau) = K x(\tau)$$

$$y(\tau) = \frac{1}{T_u} \int x(\tau) d\tau$$

$$y(\tau) = T \frac{d x(\tau)}{d\tau}$$

$$T \frac{d y(\tau)}{d\tau} + y(\tau) = K \cdot \frac{d x(\tau)}{d\tau}$$

$$T \frac{d y(\tau)}{d\tau} + y(\tau) = K \cdot x(\tau)$$

$$y(\tau) = x(\tau - \tau_3)$$



$$W(p)^{\text{проп.}} = K$$

$$W(p)^{\text{инт.}} = \frac{1}{T_u \cdot p}$$

$$W(p)^{\text{уд.д.}} = T \cdot p$$

$$W(p)^{\text{реал.д.}} = \frac{K \cdot p}{T \cdot p + 1}$$

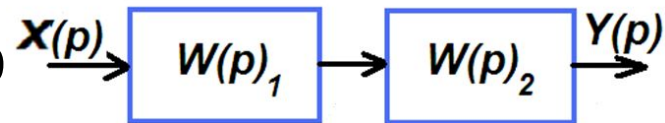
$$W(p)^{\text{инерц.1}} = \frac{K}{T \cdot p + 1}$$

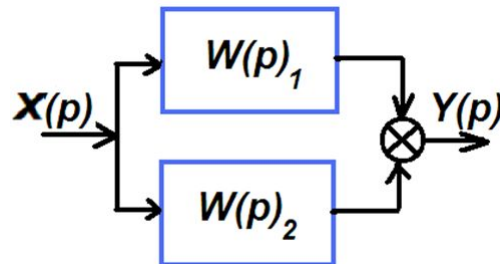
$$W(p)^{\text{ч.зап.}} = e^{-p\tau_3}$$

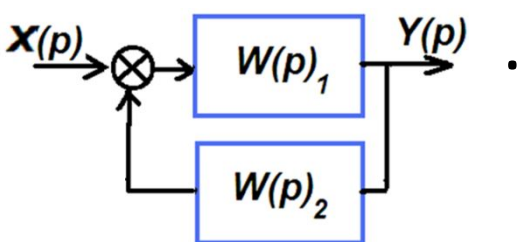
Математическое моделирование АСР

Передаточные функции комбинаций звеньев и систем

Передаточные функции комбинаций звеньев и систем получают, используя правила для основных видов соединений звеньев:

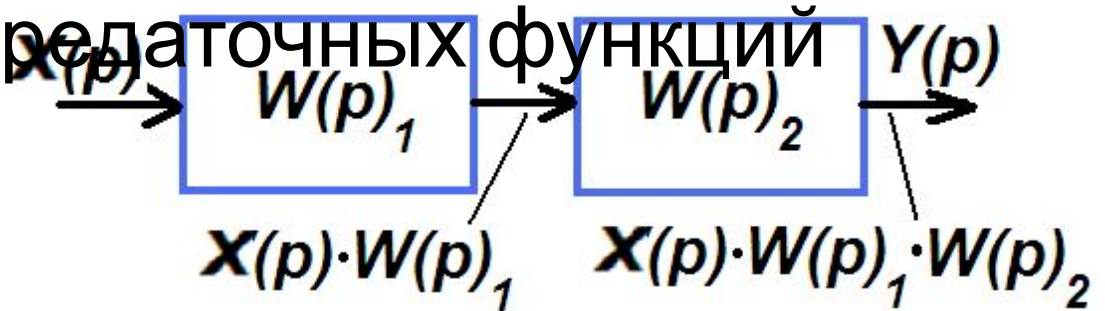
- последовательного 

- параллельного 

- встречно-параллельного (соединения с обратной связью) 

Математическое моделирование АСР

Передаточная функция при
последовательном соединении равна
произведению передаточных функций
звеньев:



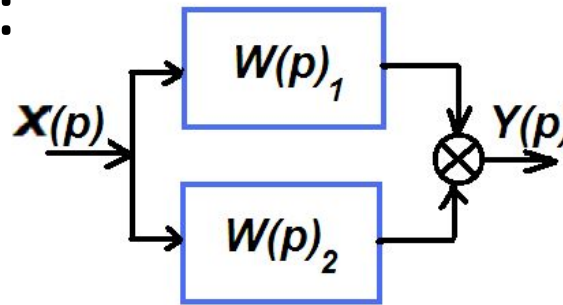
$$W(p)^{\text{посл.}} = \frac{\cancel{X(p)} \cdot W(p)_1 \cdot W(p)_2}{\cancel{X(p)}}$$

Для n звеньев:

$$W(p)^{\text{посл.}} = \prod_{i=1}^n W(p)_i$$

Математическое моделирование АСР

Передаточная функция при параллельном соединении равна сумме передаточных функций звеньев:



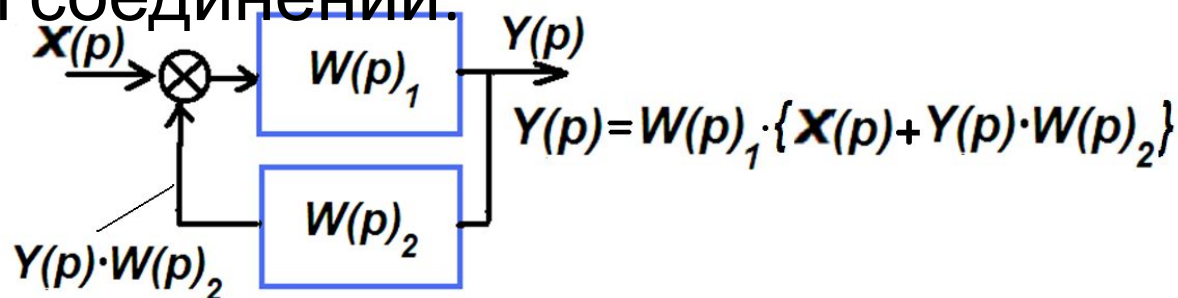
$$W(p)^{\text{посл.}} = \frac{\cancel{X(p)} \cdot W(p)_1 + \cancel{X(p)} \cdot W(p)_2}{\cancel{X(p)}} = W(p)_1 + W(p)_2$$

Для n звеньев:

$$W(p)^{\text{пар.}} = \sum_{i=1}^n W(p)_i$$

Математическое моделирование АСР

Передаточная функция при встречно-параллельном соединении:



$$W(p)^{\text{обр.св.}} = W(p)_1 \cdot \left\{ \frac{X(p)}{X(p)} + \frac{Y(p)}{X(p)} \cdot W(p)_2 \right\}$$

$\frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{W(p)^{\text{обр.св.}}}{W(p)}$

обра $W(p)^{\text{обр.св.}} = \frac{W(p)_1}{1 + W(p)_1 \cdot W(p)_2}$ положительной обратной связи

« - » отрицательной обратной связи

Математическое моделирование АСР

Передаточные функции регуляторов:

- пропорционального $W(p) = K_p$

- интегрального $W(p) = 1/(T_u \cdot p)$

- пропорционально-интегрального

$$W(p) = K_p \cdot (1 + 1/(T_u \cdot p))$$

- пропорционально-интегрально-
дифференциального

$$W(p) = K_p \cdot (1 + 1/(T_u \cdot p) + T_d \cdot p)$$

Математическое моделирование АСР

Передаточная функция типового объекта регулирования, обладающего инерционностью и запаздыванием:

$$W(p) = \frac{K_o}{T_o p + 1} \cdot e^{-p\tau_3}$$

Передаточная функция замкнутой АСР в режиме стабилизации:

$$W(p)_{\text{аср см}} = \frac{W(p)_1^{\text{o.p.}}}{1 + W(p)^{\text{o.p.}} \cdot W(p)^{\text{a.p.}}}$$

Передаточная функция условно разомкнутой АСР:

$$W(p)_{\text{раз}}^{\text{АСР}} = W(p)^{\text{a.p.}} \cdot W(p)^{\text{o.p.}}$$