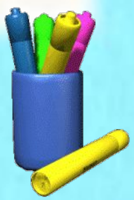


Решение показательных неравенств.

Необходимые умения.

Знать свойства степеней с рациональным показателем и уметь преобразовывать выражения содержащие степени и корни.

Уметь решать рациональные неравенства методом интервалов. http://ta-shah.ucoz.ru/load/egeh/egeh_s3/s3_1_reshenie_racionalnykh_neravenstv_metodom_intervalov/15-1-0-85

Понимать значение понятий: система, совокупность. Уметь решать системы и совокупности.

http://ta-shah.ucoz.ru/load/egeh/egeh_s3/s3_2_sistemy_i_sovokupnosti/15-1-0-86

Следует помнить, что неравенство является показательным, если основание степени больше нуля и не равно единице.

Некоторые методы решения показательных неравенств.

Назад

- Простейшие показательные неравенства
- Сведение неравенства к простейшему
- Метод введения новой переменной
- Разложение на множители
- Сведение к равносильной совокупности
- Метод рационализации (замены множителей)

Простейшие показательные неравенства

Методы

Неравенство вида $a^{f(x)} < a^{g(x)}$***, где*** $a>0$ ***и*** $a \neq 1$***,***
называется показательным

Решение основано на следующем свойстве показательной функции:

- функция $y=a^x$ ***возрастает, если*** $a>1$

- функция $y=a^x$ ***убывает, если*** $0<a<1$

Таким образом:

$$a^{f(x)} < a^{g(x)}$$

$f(x)<g(x)$ при $a>1$	$f(x)>g(x)$ при $0<a<1$

Простейшие показательные неравенства

Методы

Пример 1. $23^{4x+5} < 23^{3x-8}$

$23 > 1 \Rightarrow$

$4x + 5 < 3x - 8$

Ответ : $x < -13$

Пример 2. $0{,}23^{4x+5} < 0{,}23^{3x-8}$

$0 < 0{,}23 < 1 \Rightarrow$

$4x + 5 > 3x - 8$

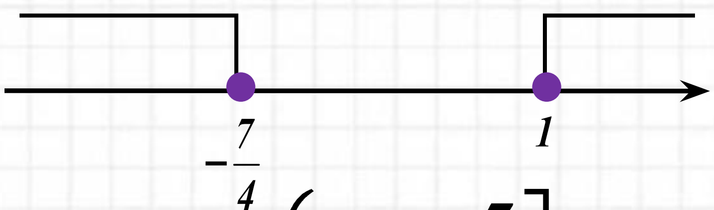
Ответ : $x > -13$

Пример 3. $\pi^{4x^2-5} \geq \pi^{-3x+2}$

$\pi \approx 3{,}14 > 1 \Rightarrow$

$4x^2 - 5 \geq -3x + 2$

$4x^2 + 3x - 7 \geq 0$



Ответ : $\left(-\infty; -\frac{7}{4}\right] \cup [1; +\infty)$

Пример 4. $\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{5}}\right)^{4x+5} < \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{5}}\right)^{3x-8}$

$$\boxed{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[6]{27}}{\sqrt[6]{25}}}$$

$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{5}} > 1 \Rightarrow$

$4x + 5 < 3x - 8$

Ответ : $x < -13$

Свойства

Сведение неравенства к простейшему

Методы

Пример 5.

$$3^{x^2-4,5}\sqrt{3} \ge \frac{1}{27}$$

$$3^{x^2-4,5}3^{0,5} \ge 3^{-3}$$

$$3^{x^2-4} \ge 3^{-3}$$

$$x^2-4 \ge -3$$

$$x^2-1 \ge 0$$

Ответ : $\left(-\infty;-1\right]\cup\left[1;+\infty\right)$

Свойства

Сведение неравенства к простейшему

Методы

Пример 6.

$$\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^{3x^2-3} < 0{,}81^{-2x}$$

$$\left(\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3^2}}\right)^{3x^2-3} < \left(\frac{81}{100}\right)^{-2x}$$

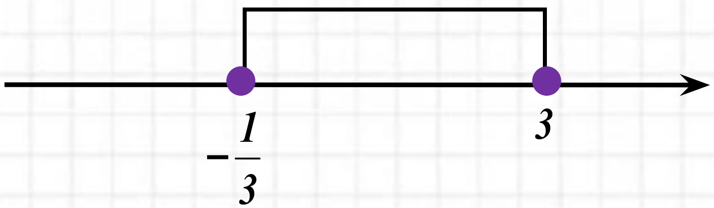
$$\left(\frac{10}{9}\right)^{\frac{1}{2}\left(3x^2-3\right)} < \left(\frac{9}{10}\right)^{-4x}$$

$$\left(\frac{10}{9}\right)^{\frac{1}{2}\left(3x^2-3\right)} < \left(\frac{10}{9}\right)^{4x}$$

$$\frac{1}{2}(3x^2-3) < 4x$$

$$3x^2-3<8x$$

$$3x^2-8x-3<0$$



Ответ : $\left[-\frac{1}{3};3\right]$

Свойства

Свойства степени с рациональным показателем и корня n-ой степени

$$a^r \cdot a^q = a^{r+q}$$

$$\frac{a^r}{a^q} = a^{r-q}$$
$$(a \neq 0)$$

$$(a^r)^q = a^{r \cdot q}$$

$$(a, b \geq 0), (n, m \in Z)$$

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$$

$$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a \cdot b}$$

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$$
$$(b \neq 0)$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

$$\sqrt[m \cdot k]{a^{n \cdot k}} = \sqrt[m]{a^n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Назад

Сведение неравенства к простейшему

Методы

Пример 7. $5^{x-1}\cdot 2^{x+2} > 8\cdot 10^{x^2-3x+2}$

$$5^{x-1}\cdot 2^{x+2} > 2^3\cdot(5\cdot 2)^{x^2-3x+2}\ \Big|\ \div\left(2^3\cdot(5\cdot 2)^{x^2-3x+2}\right)$$

$$\frac{5^{x-1}\cdot 2^{x+2}}{2^3\cdot 2^{x^2-3x+2}\cdot 5^{x^2-3x+2}} > 1$$

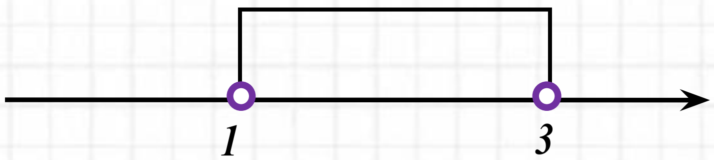
$$5^{x-1-(x^2-3x+2)}\cdot 2^{x+2-3-(x^2-3x+2)} > 1$$

$$5^{-x^2+4x-3}\cdot 2^{-x^2+4x-3} > 1$$

$$10^{-x^2+4x-3} > 10^0$$

$$-x^2+4x-3 > 0$$

$$x^2-4x+3 < 0$$



Ответ : $(1;3)$

Свойства

Сведение неравенства к простейшему

Методы

Пример 8. $\left(\frac{1}{16}\right)^{x+0,25}+\left(\frac{1}{4}\right)^{2x+1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{4x+3}\le\frac{5}{4}$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{4x+1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{4x+2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{4x+3}\le\frac{5}{4}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{4x}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{4x}-\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{4x}\le\frac{5}{4}$$

$$\left(\frac{1}{2}\cdot+\left(\frac{1}{2}\right)^{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{4x}\le\frac{5}{4}$$

$$\frac{5}{8}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{4x}\le\frac{5}{4}\,\Big|\div\frac{5}{8}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{4x}\le 2$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{4x}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$$

$$4x\ge -1$$

Ответ : $x\ge-\frac{1}{4}$

Свойства

Сведение неравенства к простейшему

Методы

Пример 8.

$$2^{2x+1} - 3^{2x+1} < 3^{2x} - 7 \cdot 2^{2x}$$

$$2 \cdot 2^{2x} - 3 \cdot 3^{2x} < 3^{2x} - 7 \cdot 2^{2x}$$

$$(2+7) \cdot 2^{2x} < (1+3) \cdot 3^{2x}$$

$$9 \cdot 2^{2x} < 4 \cdot 3^{2x} \quad \Big| \div \left(3^{2x} \cdot 9\right)$$

$$\frac{2^{2x}}{3^{2x}} < \frac{4}{9}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} < \left(\frac{2}{3}\right)^{2}$$

$$2x > 2$$

Ответ : $x > 1$

Свойства

Метод введения новой переменной

Методы

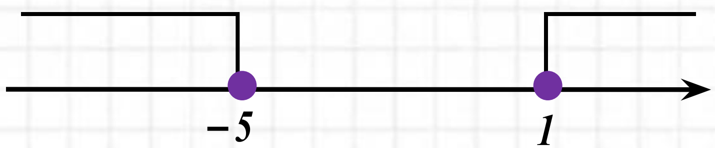
Пример 9. $25^x + 4 \cdot 5^x - 5 \geq 0$

$5^{2x} + 4 \cdot 5^x - 5 \geq 0$

Замена : $5^x = t \Rightarrow 5^{2x} = t^2$

$t^2 + 4t - 5 \geq 0$

$(t+5)(t-1) \geq 0$



$\left[\begin{array}{l} t < -5 \\ t > 1 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 5^x < -5 \\ 5^x > 1 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \text{нет решений} \\ 5^x > 5^0 \end{array}\right.$

Ответ : $x > 0$

Свойства

Метод введения новой переменной

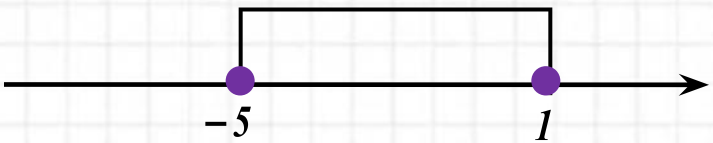
Пример 10. $$25^x + 4\cdot 5^x - 5 \le 0$$

$$5^{2x} + 4\cdot 5^x - 5 \le 0$$

Замена : $5^x = t \Rightarrow 5^{2x} = t^2$

$$t^2 + 4t - 5 \le 0$$

$$(t+5)(t-1) \le 0$$



$$\begin{cases} t > -5 \\ t < 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5^x > -5 \\ 5^x < 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \in R \\ 5^x < 5^0 \end{cases}$$

Ответ : $x < 0$

Методы

Метод введения новой переменной

Пример 11. $$\frac{5}{12^x+143} \geq \frac{5}{12^{x+2}}$$

$$\frac{5}{12^x+143} \geq \frac{5}{12^x \cdot 144}$$

Замена : $12^x = t$

$$\frac{5}{t+143} \geq \frac{5}{144t} \quad \Big| \times 144t(t+144) > 0$$

$$5 \cdot 144t - 5 \cdot (t+143) \geq 0 \quad \Big| \div 5$$

$$144t - (t+143) \geq 0$$

$$143t - 143 \geq 0$$

$$t \geq 1$$

$$5^x \geq 1$$

$$5^x \geq 5^0$$

Ответ : $x \geq 0$

Свойства

Метод введения новой переменной

Методы

Пример 12. $(19-6\sqrt{10})^x+6\cdot(\sqrt{10}-3)^x-1\le 0$

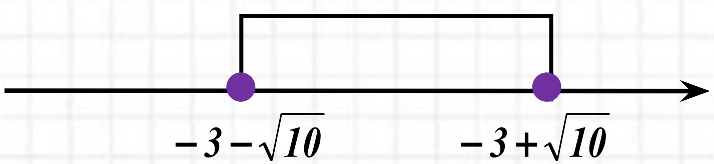
$$(\sqrt{10}-3)^{2x}+6\cdot(\sqrt{10}-3)^x-1\le 0$$

Заметим, что выражение в первой скобке равно квадрату выражения, находящегося во второй скобке

Замена: $(\sqrt{10}-3)^x=t$

$$t^2+6\cdot t-1\le 0$$

$$(t-(-3+\sqrt{10}))(t-(-3-\sqrt{10}))\le 0$$



$$\begin{cases} t>-3-\sqrt{10} \\ t<-3+\sqrt{10} \end{cases}\quad \begin{cases} (\sqrt{10}-3)^x>-3-\sqrt{10} \\ (\sqrt{10}-3)^x<-3+\sqrt{10} \end{cases}\quad \begin{cases} x\in R \\ (\sqrt{10}-3)^x<(\sqrt{10}-3)^0 \end{cases}$$

$$0<\sqrt{10}-3<1$$

Ответ: $x>0$

Свойства

Методы

Метод введения новой переменной

Пример 13. $(3-2\sqrt{2})^x+(3+2\sqrt{2})^x-6\ge 0$

Числа (a-b) и (a+b) являются взаимно обратными, если $a^2-b^2=1$ (наш случай)

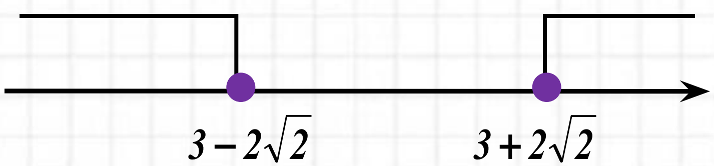
$$Замена: (3-2\sqrt{2})^x=t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3+2\sqrt{2})^x=\frac{1}{t}$$

$$t+\frac{1}{t}-6\ge 0 \,\Big|\, \times t>0$$

$$t^2-6t+1\ge 0$$

$$(t-(3+2\sqrt{2})(t-(3-2\sqrt{2}))\ge 0$$



$$\left[\begin{array}{l} t<3-2\sqrt{2} \\ t>3+2\sqrt{2} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} (3-2\sqrt{2})^x<(3-2\sqrt{2})^1 \\ (3-2\sqrt{2})^x>(3-2\sqrt{2})^{-1} \end{array}\right. \qquad 0<3-2\sqrt{2}<1 \qquad \left[\begin{array}{l} x>1 \\ x<-1 \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$

Свойства

Разложение на множители

Методы

Пример 14. $8^x + 3 \cdot 4^x - 2^{x+2} - 12 \geq 0$

$2^{3x} + 3 \cdot 2^{2x} - 4 \cdot 2^x - 12 \geq 0$ Замена : $2^x = t$

$t^3 + 3 \cdot t^2 - 4 \cdot t - 12 \geq 0$

$t^2(t+3) - 4(t+3) \geq 0$

$(t^2 - 4)(t+3) \geq 0$

$(t-2)(t+2)(t+3) \geq 0$

$(2^x - 2)(2^x + 2)(2^x + 3) \geq 0 \; \Big| \div (2^x + 2)(2^x + 3) > 0$

$2^x - 2 \geq 0$

$2^x \geq 2^1$

Ответ : $x \geq 1$

Свойства

Разложение на множители

Методы

Пример 15. $4\cdot 8^x-6\cdot 12^x+2\cdot 18^x-3\cdot 27^x<0$

$4\cdot 2^{3x}-6\cdot 2^{2x}\cdot 3^x+2\cdot 2^x\cdot 3^{2x}-3\cdot 3^{3x}<0$ Замена : $2^x=a$

$4\cdot a^3-6\cdot a^2\cdot b+2\cdot a\cdot b^2-3\cdot b^3<0$ $3^x=b$

$2\cdot a^2(2a-3b)+b^2(2a-3b)<0$

$(2a^2+b^2)(2a-3b)<0$

$(2\cdot 2^{2x}+3^{2x})(2\cdot 2^x-3\cdot 3^x)<0 \;\Big|\; \div(2\cdot 2^x+3^{2x})>0$

$2^{2x+1}-3^{2x+1}<0$

$2^{2x+1}<3^{2x+1} \;\Big|\; \div 3^{2x+1}>0$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x+1}<1$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x+1}<\left(\frac{2}{3}\right)^0$

$2x+1>0$

Ответ : $x>-0,5$

Свойства

Разложение на множители

Методы

Пример 16. $3^{3x} - 3^{2x+1} + 3^{x+1} - 1 < 0$

$3^{3x} - 3 \cdot 3^{2x} + 3 \cdot 3^{x} - 1 < 0$

Замена : $3^{x} = a$

$a^3 - 3a^2 + 3a - 1 < 0$

$(a^3 - 1) - (3a^2 - 3a) < 0$

$(a-1)(a^2 + a + 1) - 3a(a-1) < 0$

$(a-1)(a^2 + a + 1 - 3a) < 0$

$(a-1)(a^2 - 2a + 1) < 0$

$(a-1)(a-1)^2 < 0$

$(a-1)^3 < 0$

$a - 1 < 0$

$a < 1$

$3^{x} < 1$

$3^{x} < 3^{0}$

Ответ : $x < 0$

Свойства

Сведение к равносильной совокупности

Методы

Пример 17. $(x^2-4x)^{x^2+5x} \ge 1$

$(x^2-4x)^{x^2+5x} \ge (x^2-4x)^0$

Если x^2-4x≠1, то необходимо рассматривать два случая:

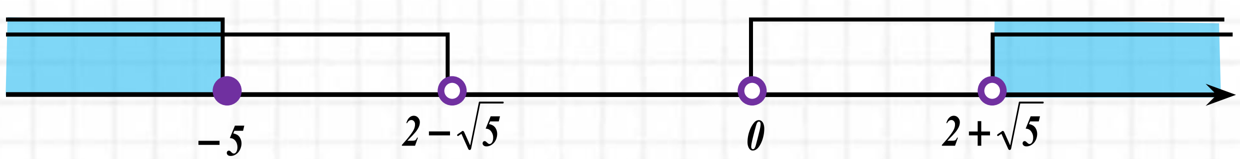
Во первых, заметим, что если x^2-4x=1, то неравенство выполнено; при x=0 - не имеет смысла

$x = 2 \pm \sqrt{5}$ – *решения*

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-4x>1 \\ x^2+5x\ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0<x^2-4x<1 \\ x^2+5x\le 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

1) $\begin{cases} x^2-4x-1>0 \\ x^2+5x\ge 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} (x-(2+\sqrt{5}))(x-(2-\sqrt{5}))>0 \\ x(x+5)\ge 0 \end{cases}$$



Свойства

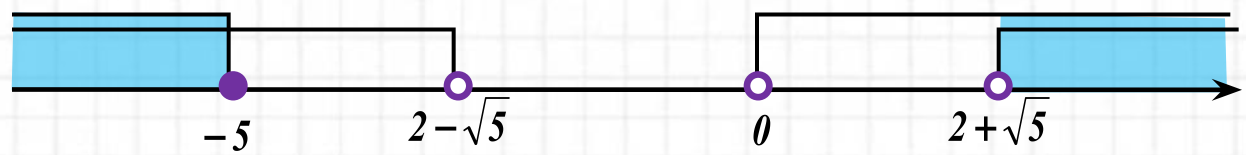
Сведение к равносильной совокупности

Методы

Пример 17. $(x^2-4x)^{x^2+5x}\ge 1$ | $x=2\pm\sqrt{5}$ – решения

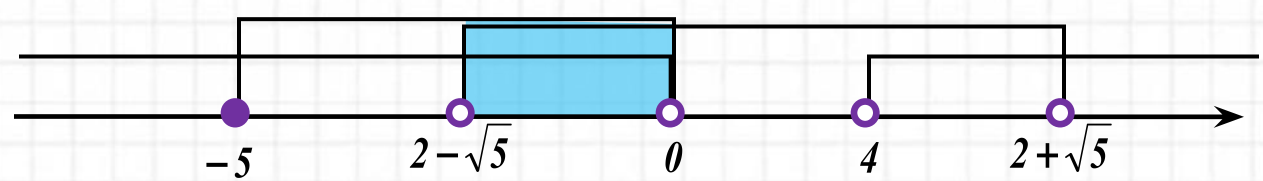
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-4x>1\\ x^2+5x\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}0<x^2-4x<1\\ x^2+5x\le 0\end{cases}\end{array}\right.$$

1)



2) $\begin{cases}0<x^2-4x<1\\ x^2+5x\le 0\end{cases}$

$$\begin{cases}\begin{cases}(x-(2+\sqrt{5}))(x-(2-\sqrt{5}))<0\\ x(x-4)>0\end{cases}\\ x(x+5)\le 0\end{cases}$$



Решение – объединение решений двух случаев

Ответ : $(-\infty;-5]\cup[2-\sqrt{5};0)\cup[2+\sqrt{5};+\infty)$

Свойства

Метод замены множителей

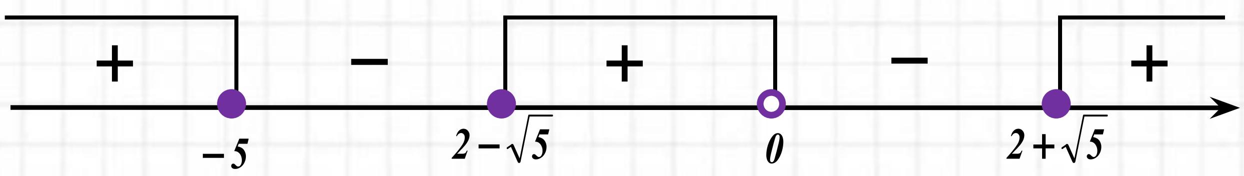
Знак выражения $h^f - h^g$ совпадает со знаком выражения $(h-1)(f-g)$

Пример 17 (второй способ). $(x^2-4x)^{x^2+5x} \ge 1$ при x=0 - не имеет смысла

$$(x^2-4x)^{x^2+5x}-(x^2-4x)^0 \ge 0$$

$$(x^2-4x-1)(x^2+5x) \ge 0$$

$$x(x-(2+\sqrt{5}))(x-(2-\sqrt{5}))(x+5) \ge 0$$



Ответ : $(-\infty;-5] \cup [2-\sqrt{5};0) \cup [2+\sqrt{5};+\infty)$

Методы

Спектр решения таких задач значительно расширится после изучения темы «Логарифмы»

Мы сможем записывать решение, например, такого неравенства:

$$2^x \geq 3$$

Источники

Методы

Мордкович А. Г. Задачник (профильный уровень) 11 класс

Алтынов П. И. «Контрольные и зачетные работы по алгебре. 11 класс»