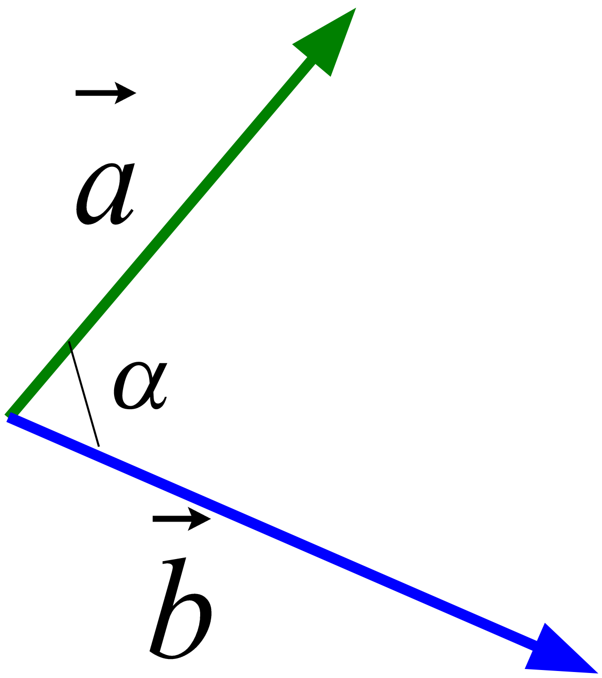
Скалярное произведение векторов. Вычисление углов между прямыми.

Скалярное произведение векторов.



Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\alpha$$

Свойства скалярного произведения векторов

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и любого числа k справедливы равенства:

1. $\vec{a}^{\,2} \geq 0$ $\qquad$ $\vec{a}^{\,2} > 0$ $\qquad$ $\vec{a} \neq \vec{0}$

2. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ *Переместительный закон*

3. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

Распределительный закон

4. $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$ *Сочетательный закон*

Скаляр – лат. scale – шкала.

Ввел в 1845 г.
У. ГАМИЛЬТОН,
английский математик.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\alpha$$

Если $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ ***, то*** $\vec{a}\perp\vec{b}$

Если $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$ ***, то*** α ***- острый угол***

Если $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$ ***, то*** α ***- тупой угол***

Формула скалярного произведения векторов в пространстве.

$$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\} \qquad \vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$$

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}$$

Скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов.

$\vec{a}\,\{3;\ -4;\ 2\},\ \vec{b}\,\{-2;\ 1;\ 3\},\ \vec{c}\,\{-2;-1,5;\ 0\}$

Каким (острым, тупым или прямым) является угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, $\vec{c}$ и $\vec{a}$

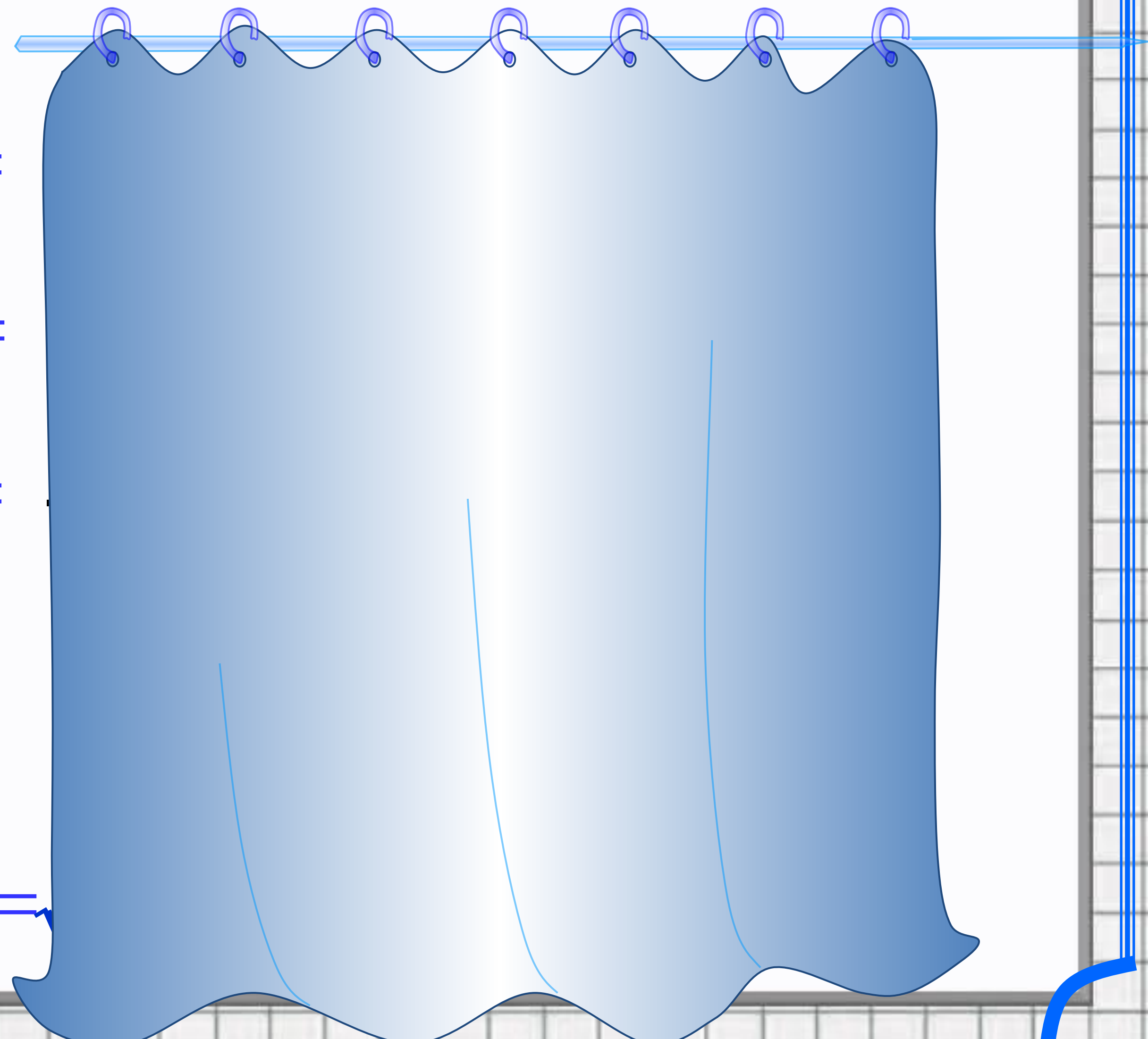
$\vec{a}\cdot\vec{b} = 3\cdot(-2) + (-4)\cdot 1 + 2\cdot 3 = -4$ *тупой*

$\vec{b}\cdot\vec{c} = (-2)\cdot(-2) + 1\cdot(-1,5) + 3\cdot 0 = 2,5$ *острый*

$\vec{c}\cdot\vec{a} = 3\cdot(-2) + (-4)\cdot(-1,5) + 2\cdot 0 = 0$ *прямой*

$$\vec{a}\,\{1;\ -1;\ 2\},\ \ \vec{b}\,\{-1;\ 1;\ 1\},\ \ \vec{c}\,\{5;\ 6;\ 2\}$$

Вычислить



$$\vec{a}\cdot\vec{c} =$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} =$$

$$\vec{b}\cdot\vec{c} =$$

$$\vec{a}\cdot\vec{a} =$$

$$\sqrt{\vec{b}\cdot\vec{b}} = \sqrt{}$$

Формула скалярного произведения векторов в пространстве.

$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}$$

Косинус угла между ненулевыми векторами

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}}$$

Задача

Вычислить угол между векторами $\overrightarrow{AB}\{1;0;-1\}$ $\overrightarrow{CD}\{0;-2;2\}$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}}$$

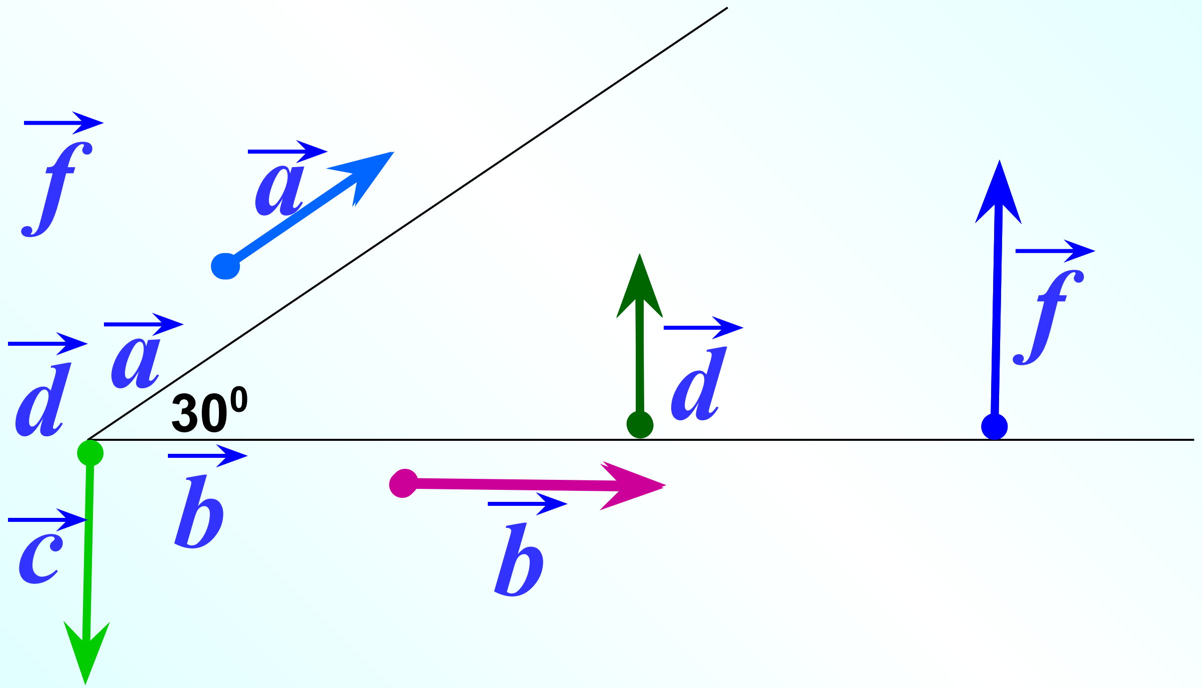
Решение

$\overrightarrow{AB}\{1;0;-1\}$ $\overrightarrow{CD}\{0;-2;2\}$

$$\cos\varphi = \frac{|1\cdot 0 + 0\cdot(-2) + (-1)\cdot 2|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}\cdot\sqrt{0^2 + (-2)^2 + 2^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{2} \qquad \varphi = 60^0$$

Найти углы между векторами.



$\widehat{\vec{a}\ \vec{b}} = 30^0$

$\widehat{\vec{a}\ \vec{c}} = 120^0$

$\widehat{\vec{b}\ \vec{c}} = 90^0$

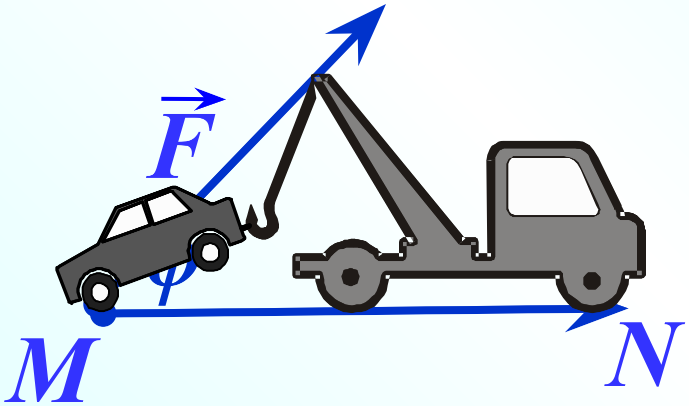
$\widehat{\vec{d}\ \vec{c}} = 180^0$

$\widehat{\vec{d}\ \vec{f}} = 0^0$

Два вектора называются **перпендикулярными**, если угол между ними равен 90^0.

$\vec{b} \perp \vec{c}$ $\vec{b} \perp \vec{d}$ $\vec{b} \perp \vec{f}$

Скалярное произведение в физике

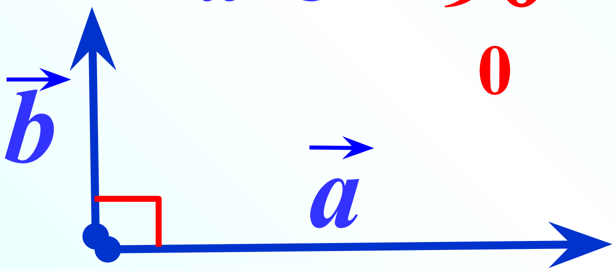


Скалярное произведение векторов встречается в физике. Например, из курса механики известно, что работа $\mathbf{A}$ постоянной силы $\vec{\mathbf{F}}$ при перемещении тела из точки $\mathbf{M}$ в точку $\mathbf{N}$ равна произведению силы $\vec{\mathbf{F}}$ и перемещения $\overrightarrow{\mathbf{MN}}$ на косинус угла между ними.

$$\mathbf{A} = |\vec{\mathbf{F}}| \cdot |\overrightarrow{\mathbf{MN}}| \cos\phi$$

$$\mathbf{A} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{MN}}$$

$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 90^0$



$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos 90^0 = 0$$

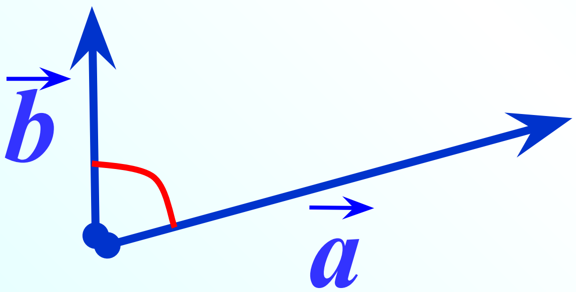
Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны, то скалярное произведение векторов равно нулю.

Обратно: если $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ … $\vec{a}$ … $\vec{b}$ перпендикулярны.

Скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}\perp\vec{b}$$

$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} < 90^0$



$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha$$

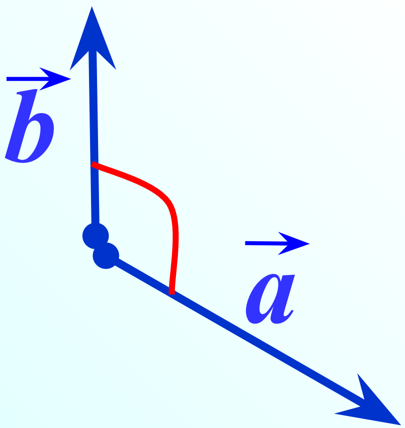
> 0

> 0

Скалярное произведение ненулевых векторов положительно тогда и только тогда , когда угол между векторами **острый.**

$$\vec{a}\cdot\vec{b} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{\vec{a}\,\vec{b}} < 90^0$$

$$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} > 90^0$$

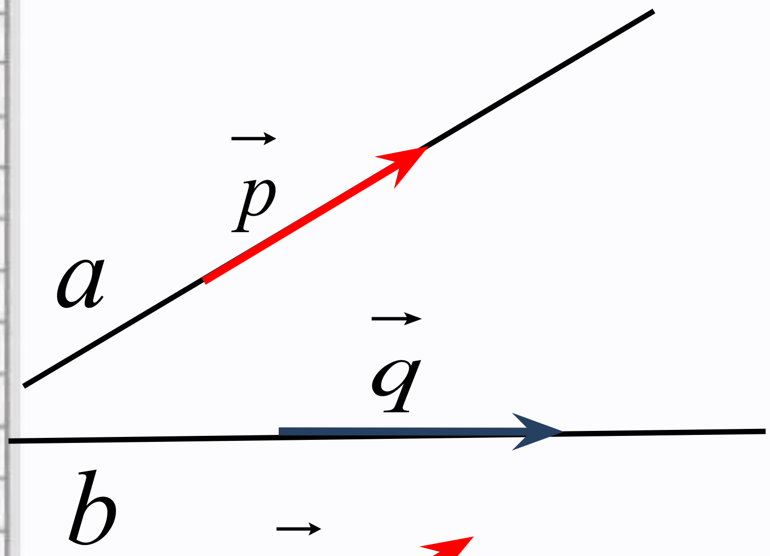


$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha \qquad \cos\alpha < 0$$

Скалярное произведение ненулевых векторов отрицательно тогда и только тогда , когда угол между векторами **тупой.**

$$\vec{a}\cdot\vec{b} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{\vec{a}\,\vec{b}} > 90^0$$

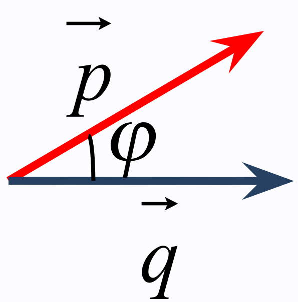
Угол между прямыми



$\vec{p}$ *- направляющий вектор прямой a*

$\vec{q}$ *- направляющий вектор прямой b*

φ *- угол между прямыми*



$\vec{p}\{x_1; y_1; z_1\}$ $\vec{q}\{x_2; y_2; z_2\}$

$$\cos\varphi = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$