

# ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА



ЛЕКЦИЯ 10:  
МЕТОД КИНЕТОСТАТИКИ

# 1. Уравнения кинестатики

Так же как и для одной материальной точки, дифференциальным уравнениям движения материальной системы можно придать форму уравнений статики. Этот метод часто применяется в инженерных расчетах, особенно **при определении динамических реакций опор твердого тела.**

активные силы

реакция связей

$$m_k \mathbf{w}_k = \mathbf{F}_k + \mathbf{R}_k \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{F}_k + \mathbf{R}_k + \mathbf{J}_k = 0 \quad \mathbf{J}_k = -m_k \mathbf{w}_k \quad - \text{ сила инерции}$$

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k + \sum_{k=1}^n \mathbf{R}_k + \sum_{k=1}^n \mathbf{J}_k = 0$$

$$\mathbf{F} + \mathbf{R} + \mathbf{J} = 0$$

3 уравнения

учитываются только внешние силы!

В каждый момент времени сумма главных векторов активных сил, реакций связей и сил инерции движущейся материальной системы равна нулю

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k + \sum_{k=1}^n \mathbf{r}_k \times \mathbf{R}_k + \sum_{k=1}^n \mathbf{r}_k \times \mathbf{J}_k = 0$$

$$\mathbf{M}_O + \mathbf{M}_O^R + \mathbf{M}_O^J = 0$$

3 уравнения

учитываются только внешние силы!

В каждый момент времени сумма главных моментов активных сил, реакций связей и сил инерции движущейся материальной системы равна нулю

## 2. Уравнения кинестатики

---

$$\mathbf{F} + \mathbf{R} + \mathbf{J} = 0$$

$$\mathbf{M}_O + \mathbf{M}_O^R + \mathbf{M}_O^J = 0$$

Движение твердого тела вполне определяется шестью уравнениями кинестатики, точно так же как равновесие твердого тела вполне определяется соответствующими шестью уравнениями (три уравнения проекций и три уравнения моментов).

Если рассматривается система, состоящая из нескольких тел, то можно составить соответствующие уравнения кинестатики для каждого тела в отдельности.

**Применение метода кинестатики** для твердого тела требует прежде всего умения **вычислить главный вектор и главный момент его сил инерции.**

Зная их проекции на выбранные оси координат, следует

- 1) составить уравнения кинестатики
- 2) определить из этих уравнений неизвестные величины.

# 3. УК=теоремы об изменении кол-ва и момента кол-ва дв-ия

количество движения системы

$$\mathbf{J} = \sum_{k=1}^n \mathbf{J}_k = -\sum_{k=1}^n m_k \mathbf{w}_k = -\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{v}_k \quad \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{v}_k = \mathbf{Q} = M\mathbf{v}_C$$

$$\mathbf{J} = -\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = -M\mathbf{w}_C$$

главный вектор всех сил инерции точек материальной системы равен производной по времени от количества движения материальной системы, умноженной на -1

$$\mathbf{M}_O^J = \sum_{k=1}^n \mathbf{r}_k \times \mathbf{J}_k = -\sum_{k=1}^n \mathbf{r}_k \times m_k \mathbf{w}_k = -\sum_{k=1}^n \mathbf{r}_k \times m_k \frac{d\mathbf{v}_k}{dt} = -\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n \mathbf{r}_k \times m_k \mathbf{v}_k \quad \mathbf{K}_O$$

$$\mathbf{M}_O^J = -\frac{d\mathbf{K}_O}{dt}$$

главный момент всех сил инерции равен производной по времени от момента количества движения материальной системы, умноженной на -1.

# 4. Вычисление главного вектора сил инерции ТТ

---

$$\mathbf{J} = -M\mathbf{w}_C$$

Главный вектор сил инерции твердого тела равен силе инерции его центра масс, в предположении, что в нем сосредоточена масса всего тела

# 5. Вычисление главного момента сил инерции ТТ

$$\mathbf{M}_C^J \mathbf{K} - \frac{d\mathbf{K}_C}{dt} = - \frac{\tilde{d}\mathbf{K}_C}{dt} \times \mathbf{C}$$

Система координат  $Cx_1y_1z_1$  жестко связана с телом

$$M_{C_x}^J = - \frac{dK_{C_x}}{dt} - (\omega_y K_{C_z} - \omega_z K_{C_y})$$

$$K_{C_x} = I_x \omega_x - I_{xy} \omega_y - I_{xz} \omega_z$$

$$M_{C_y}^J = - \frac{dK_{C_y}}{dt} - (\omega_z K_{C_x} - \omega_x K_{C_z})$$

$$K_{C_y} = I_y \omega_y - I_{xy} \omega_x - I_{yz} \omega_z$$

$$M_{C_z}^J = - \frac{dK_{C_z}}{dt} - (\omega_x K_{C_y} - \omega_y K_{C_x})$$

$$K_{C_z} = I_z \omega_z - I_{xz} \omega_x - I_{yz} \omega_y$$

$$M_{C_x}^J = -I_x \varepsilon_x + I_{xy} (\varepsilon_y - \omega_x \omega_z) + I_{xz} (\varepsilon_z + \omega_x \omega_y) - I_{yz} (\omega_z^2 - \omega_y^2) - (I_z - I_y) \omega_y \omega_z$$

$$M_{C_y}^J = -I_y \varepsilon_y + I_{yz} (\varepsilon_z - \omega_y \omega_x) + I_{yx} (\varepsilon_x + \omega_y \omega_z) - I_{xz} (\omega_x^2 - \omega_z^2) - (I_x - I_z) \omega_z \omega_x$$

$$M_{C_z}^J = -I_z \varepsilon_z + I_{xz} (\varepsilon_x - \omega_x \omega_z) + I_{yz} (\varepsilon_y + \omega_x \omega_z) - I_{xy} (\omega_y^2 - \omega_x^2) - (I_y - I_x) \omega_x \omega_y$$

$$\varepsilon_x = \dot{\omega}_x, \varepsilon_y = \dot{\omega}_y, \varepsilon_z = \dot{\omega}_z,$$

## 6. Частные случаи

1) **Случай плоского движения твердого тела, имеющего плоскость материальной симметрии.**

Ось  $z$  перпендикулярна к плоскости симметрии, совпадающей с плоскостью движения

$$I_{xz} = I_{yz} = 0, \quad \varepsilon_x = \varepsilon_y = 0, \quad \omega_x = \omega_y = 0 \quad \longrightarrow \quad M_{Cx}^J = M_{Cy}^J = 0, \quad M_{Cz}^J = -I_{Cz} \varepsilon_z$$

2) **Случай вращения твердого тела вокруг неподвижной оси.**

Выберем в качестве полюса произвольную точку на оси вращения, ось  $z$  совместим с осью вращения, а оси  $x$  и  $y$  скрепим с вращающимся телом.

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0, \quad \omega_x = \omega_y = 0 \quad \longrightarrow$$

$$\begin{aligned} M_x^J &= I_{xz} \varepsilon_z - I_{yz} \omega_z^2 \\ M_y^J &= I_{yz} \varepsilon_z - I_{xz} \omega_z^2 \\ M_z^J &= -I_z \varepsilon_z \end{aligned}$$

$$M_{Cx}^J = -I_x \varepsilon_x + I_{xy} (\varepsilon_y - \omega_x \omega_z) + I_{xz} (\varepsilon_z + \omega_x \omega_y) - I_{yz} (\omega_z^2 - \omega_y^2) - (I_z - I_y) \omega_y \omega_z$$

$$M_{Cy}^J = -I_y \varepsilon_y + I_{yz} (\varepsilon_z - \omega_y \omega_x) + I_{yx} (\varepsilon_x + \omega_y \omega_z) - I_{xz} (\omega_x^2 - \omega_z^2) - (I_x - I_z) \omega_z \omega_x$$

$$M_{Cz}^J = -I_z \varepsilon_z + I_{xz} (\varepsilon_x - \omega_y \omega_z) + I_{yz} (\varepsilon_y + \omega_x \omega_z) - I_{xy} (\omega_y^2 - \omega_x^2) - (I_y - I_x) \omega_x \omega_y$$

# 7. Статические и добавочные динамические реакции

---

$$\mathbf{F} + \mathbf{R} + \mathbf{J} = 0$$

$$\mathbf{M}_O + \mathbf{M}_O^R + \mathbf{M}_O^J = 0$$

статические реакции

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^{\text{ст}} + \mathbf{R}^{\text{д}}$$

$$\mathbf{M}_O^R = \mathbf{M}_O^{R\text{ст}} + \mathbf{M}_O^{R\text{д}}$$

добавочные динамические реакции

$$\mathbf{F} + \mathbf{R}^{\text{ст}} = 0 \quad \mathbf{M}_O + \mathbf{M}_O^{R\text{ст}} = 0$$

уравнения для определения статических реакций

$$\mathbf{R}^{\text{д}} + \mathbf{J} = 0 \quad \mathbf{M}_O^{R\text{д}} + \mathbf{M}_O^J = 0$$

уравнения для определения динамических реакций



# 8. Пример 1: определение добавочных динам. реакций

Статические реакции

$$\mathbf{R}_A^c = 2mg \quad \mathbf{R}_B^c = 0$$

Дополнительные динамические реакции

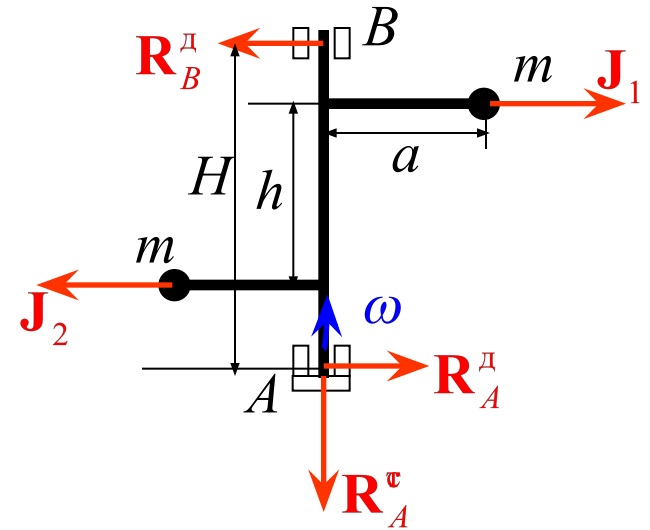
$$J_1 = J_2 = ma\omega^2$$

$$\mathbf{M}_O^J = ma\omega^2 h \quad \mathbf{J} = 0$$

Силы инерции составляют пару сил.

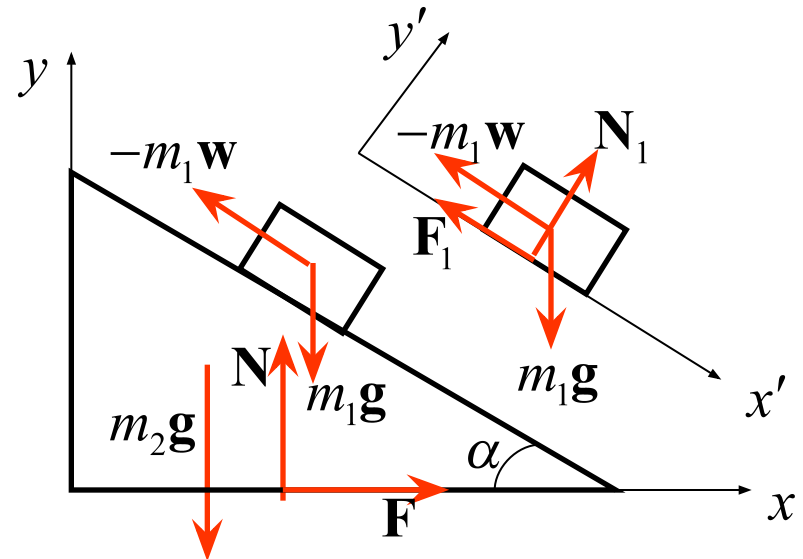
Она может быть уравновешена только другой парой сил.

$$R_B^d = R_A^d = \frac{h}{H} ma\omega^2$$



# 9. Пример 2: несколько тел

Груз скользит вниз по наклонной эстакаде, свободно лежащей на земле. Коэффициенты трения скольжения между грузом и эстакадой, эстакадой и землей равны  $f, f_0$  соответственно. При каких условиях эстакада не начнет движение?



Движение груза

$$\left. \begin{aligned} m_1 g \sin \alpha - F_1 - m_1 w &= 0 \\ m_1 g \cos \alpha - N_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow m_1 w = m_1 g (\sin \alpha - f \cos \alpha)$$

Эстакада + груз

$$\left. \begin{aligned} F - m_1 w \cos \alpha &= 0 \\ N - m_1 g - m_2 g + m_1 w \sin \alpha &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} F &= m_1 g (\sin \alpha - f \cos \alpha) \cos \alpha \\ N &= m_1 g + m_2 g - m_1 g (\sin \alpha - f \cos \alpha) \sin \alpha = \\ &= m_2 g + m_1 g (\cos \alpha + f \sin \alpha) \cos \alpha \end{aligned}$$

$$F < f_0 N \quad \Rightarrow$$

$$f_0 > \frac{m_1 (\sin \alpha - f \cos \alpha) \cos \alpha}{m_2 + m_1 (\cos \alpha + f \sin \alpha) \cos \alpha}$$

# 10. Пример 3

Геометрия: С движется по окружности радиуса  $l$  с центром в точке О

$$\mathbf{F} + \mathbf{R} + \mathbf{J} = 0 \rightarrow \begin{cases} N_2 = m\ddot{\theta} \cos \theta - m\dot{\theta}^2 \sin \theta \\ N_1 = mg - m\ddot{\theta} \sin \theta - m\dot{\theta}^2 \cos \theta \end{cases}$$

$$M_{Cz} + M_{Cz}^R - I_{Cz} \ddot{\theta} = 0 \rightarrow \frac{1}{3} ml^2 \ddot{\theta} = l(N_1 \sin \theta + N_2 \cos \theta)$$

$$N_1 \sin \theta + N_2 \cos \theta = mgl \sin \theta - ml^2 \ddot{\theta}$$

$$\frac{4}{3} ml^2 \ddot{\theta} = mgl \sin \theta \quad | \theta$$

$$\frac{2}{3} ml^2 \frac{d\dot{\theta}^2}{dt} = -mgl \frac{d \cos \theta}{dt} \quad \dot{\theta}^2 = \frac{3g}{2l} (\cos \theta_0 - \cos \theta)$$

$$N_2 = \frac{3}{4} mg \sin \theta (3 \cos \theta - 2 \cos \theta_0)$$

$$N_1 = \frac{1}{4} mg (1 - 6 \cos \theta_0 \cos \theta + 9 \cos^2 \theta)$$

$$N_2 = 0 \Rightarrow \cos \theta = \frac{2}{3} \cos \theta_0$$

