НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§1. Первообразная функции. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица основных неопределенных интегралов.

В дифференциальном исчислении решается задача:

по данной функции $F(x)$ ***найти ее производную***

$$F'(x) = f(x).$$

Интегральное исчисление решает обратную задачу:

найти функцию $F(x),$ ***если известна ее производная***

$$f(x) = F'(x).$$

Определение 1. Функция $F(x)$ называется ***первообразной*** функции $f(x)$, заданной на некотором множестве X, если для $\forall x \in X$ выполняется равенство

$$F'(x) = f(x).$$

Пример. Пусть $f(x) = x^3.$

Тогда первообразной для данной функции является функция

$F(x) = \dfrac{x^4}{4},$ так как

$$F'(x) = \left(\frac{x^4}{4}\right)' = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 = x^3 = f(x).$$

Очевидно, что первообразными будут также любые функции

$$F(x)=\frac{x^4}{4}+C,$$

где $C-const,$ поскольку

$$F'(x)=\left(\frac{x^4}{4}+C\right)'=\left(\frac{x^4}{4}\right)'+C'=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot 4x^3+0=x^3=f(x).$$

Таким образом, **если** $F(x)$ и $\Phi(x)$ **– две первообразные одной и той же функции** $f(x)$, **то**

$$\Phi(x) = F(x) + C.$$

Определение 2. Множество $F(x)+C$ всех первообразных функции $f(x)$ на множестве X называется ***неопределенным интегралом*** и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x)+C.$$

Здесь $\int$ − знак интеграла,

$f(x)$ − подынтегральная функция,

$f(x)dx$ − подынтегральное выражение,

x − переменная интегрирования.

Нахождение первообразной для данной функции $f(x)$

называется ***интегрированием*** функции $f(x)$.

Теорема. Для всякой непрерывной на $(a;b)$

функции $f(x)$ существует на этом промежутке

первообразная, а, значит, и неопределенный интеграл.

Геометрически неопределенный интеграл представляет собой семейство кривых, зависящих от одного параметра $C,$ которые получаются одна из другой путем параллельного сдвига вдоль оси $Oy.$

Перечислим основные **свойства неопределенного интеграла:**

1) $$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x);$$

2) $$\int f'(x)dx = f(x) + C;$$

3) $$\int Cf(x)dx = C \cdot \int f(x)dx,$$

$$C - const;$$

4) $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx,$

5) Если $\int f(x)dx = F(x) + C,$

то $\int f(u)dx = F(u) + C,$

где $u = \varphi(x)$ – произвольная функция, имеющая

непрерывную производную.

6) Если $\int f(x)dx = F(x) + C,$ то

$$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C$$

для $\forall k, b \in \mathbf{R}, k \neq 0$

Приведем **таблицу основных неопределенных интегралов:**

1) $$\int dx = x + C;$$

2) $$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1);$$

3) $$\int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + C;$$

4) $$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$$

5) $$\int e^x dx = e^x + C;$$

6) $$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$$

7) $$\int \cos x dx = \sin x + C;$$

8) $$\int \sin x dx = -\cos x + C;$$

9) $$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C;$$

10) $$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C;$$

11) $$\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctgx + C;$$

12) $$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C;$$

13) $$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C;$$

14) $$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin \frac{x}{a} + C;$$

15) $$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a}}dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right| + C.$$

Приведенные в данной таблице интегралы

называют ***табличными.***

§2. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ.

2.1. Метод непосредственного интегрирования.

Непосредственным интегрированием называют интегрирование с помощью свойств 3, 4 и 6, тождественных преобразований подынтегральной функции и таблицы основных интегралов.

Примеры.

1) $$\int \frac{dx}{x^5} = \int \frac{1}{x^5} dx = \int x^{-5} dx =$$

$$= \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + C = \frac{x^{-4}}{-4} + C = -\frac{1}{4x^4} + C;$$

2) $$\int x^3 \cdot \sqrt{x}\,dx = \int x^3 \cdot x^{\frac{1}{2}}\,dx =$$

$$= \int x^{3+\frac{1}{2}}\,dx = \int x^{\frac{7}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{7}{2}+1}}{\frac{7}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{9}{2}}}{\frac{9}{2}} + C =$$

$$= \frac{2}{9}\sqrt{x^9} + C = \frac{2}{9}\sqrt{x^8 \cdot x} + C = \frac{2}{9}x^4 \cdot \sqrt{x} + C;$$

3) $$\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{\sqrt{3}} + C;$$

4) $$\int\left(5\sin x-4^x+\frac{7}{x}\right)dx=$$

$$=5\int\sin x dx-\int 4^x dx+7\int\frac{1}{x}dx=$$

$$=-5\cos x-\frac{4^x}{\ln 4}+7\ln x+C;$$

5) $$\int \frac{\sqrt[3]{x} - 2x^5 + x^4}{x^5}\,dx =$$

$$= \int \left(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^5} - \frac{2x^5}{x^5} + \frac{x^4}{x^5} \right) dx =$$

$$= \int \left(x^{\frac{1}{3}-5} - 2 + \frac{1}{x} \right) dx =$$

$$= \int x^{-\frac{14}{3}} dx - 2\int dx + \int \frac{1}{x} dx =$$

$$= \frac{x^{-\frac{14}{3}+1}}{-\frac{14}{3}+1} - 2x + \ln x + C =$$

$$= -\frac{3}{11} x^{-\frac{11}{3}} - 2x + \ln x + C;$$

6) $$\int \frac{6\cdot 5^x + 3\cdot 7^x}{5^x}\,dx = \int \left(\frac{6\cdot 5^x}{5^x} + \frac{3\cdot 7^x}{5^x} \right) dx =$$

$$= \int \left(6 + 3\cdot \left(\frac{7}{5} \right)^x \right) dx = 6\int dx + 3\int \left(\frac{7}{5} \right)^x dx =$$

$$= 6x + 3\cdot \frac{\left(\frac{7}{5}\right)^x}{\ln \frac{7}{5}} + C;$$

7) $\int \cos(5x-1)\,dx =$

$$= \left[\begin{array}{l} \int f(x)\,dx = F(x) + C \Rightarrow \\ \Rightarrow \int f(kx+b)\,dx = \dfrac{1}{k} F(kx+b) + C; \\ \int \underbrace{\cos}_{f(x)} x\,dx = \underbrace{\sin}_{F(x)} x + C,\, k = 5,\, b = -1 \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{5}\sin(5x-1) + C;$$

8) $$\int\sqrt{2-9x}\,dx=\int(2-9x)^{\frac{1}{2}}\,dx=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\int f(x)dx=F(x)+C\Rightarrow\\ \Rightarrow\int f(kx+b)dx=\dfrac{1}{k}F(kx+b)+C;\\ \int\underbrace{x^{\frac{1}{2}}}_{f(x)}dx=\underbrace{\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}}_{F(x)}+C,k=-9,b=2\end{array}\right]=$$

$$= -\frac{1}{9}\cdot\frac{2}{3}\cdot(2-9x)^{\frac{3}{2}} + C =$$

$$= -\frac{2}{27}\sqrt{(2-9x)^{3}} + C.$$

2.2. Метод поднесения под знак дифференциала и замены переменной.

На практике часто встречаются интегралы вида

$$\int f\left(\varphi(x)\right)\cdot\varphi'(x)dx$$

или интегралы, которые сводятся к такому виду

Подведем в этом интеграле множитель $\varphi'(x)$

под знак дифференциала:

$$\varphi'(x)dx = d\left(\varphi(x)\right),$$

а затем произведем подстановку

$$\varphi(x) = t.$$

В результате получим формулу подстановки в неопределенном интеграле:

$$\int f\left(\varphi(x)\right)\cdot\varphi'(x)dx=\left[\varphi'(x)dx=d\left(\varphi(x)\right)\right]=$$

$$=\int f\left(\varphi(x)\right)\cdot d\left(\varphi(x)\right)=\left[t=\varphi(x)\right]=\int f(t)dt$$

Следовательно, задача свелась к нахождению интеграла

$$\int f(t)dt,$$

который либо уже табличный, либо легко сводится к табличному, и обратной подстановке

$$t=\varphi(x).$$

Примеры поднесения под знак дифференциала:

$$\left(a, b - const, a \neq 0\right)$$

$$dx = d(x+b);$$

$$dx = \frac{1}{a} \cdot d(ax);$$

$$dx = \frac{1}{a} \cdot d(ax+b);$$

$$xdx = \frac{1}{2} \cdot d(x^2),$$

$$xdx = \frac{1}{2a} \cdot d(ax^2 + b);$$

$$x^n dx = \frac{1}{2a \cdot (n+1)} \cdot d(ax^{n+1} + b), n \neq -1;$$

$$\frac{1}{x}dx = d\left(\ln x\right);$$

$$\frac{1}{x}dx = \frac{1}{a}d\left(a\ln x + b\right);$$

$$\cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\cdot d\left(\sin(ax+b)\right);$$

$$\sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cdot d\left(\cos(ax+b)\right);$$

$$e^x dx = d\left(e^x + b\right);$$

$$a^x dx = \frac{1}{\ln a}\cdot d\left(a^x + b\right);$$

$$\frac{1}{\cos^2(ax+b)}dx = \frac{1}{a}\cdot d\left(tg(ax+b)\right);$$

$$\frac{1}{\sin^2(ax+b)}dx = -\frac{1}{a}\cdot d\left(ctg(ax+b)\right);$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = d\left(\arcsin x\right);$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = -d\left(\arccos x\right);$$

$$\frac{1}{1+x^2}dx = d\left(arctgx\right);$$

$$\frac{1}{1+x^2}dx = -d\left(arcctgx\right).$$

Примеры.

1) $$\int \sin 4x dx = \left[dx = \frac{1}{4} \cdot d(4x) \right] = \int \sin 4x \cdot \frac{1}{4} \cdot d(4x) =$$

$$= \frac{1}{4} \int \sin 4x d(4x) = [t = 4x] =$$

$$= \frac{1}{4} \int \sin t dt = -\frac{1}{4} \cos t + C = -\frac{1}{4} \cos 4x + C;$$

2) $$\int \frac{dx}{6x-5} = \left[dx = \frac{1}{6} \cdot d(6x-5) \right] =$$

$$= \frac{1}{6} \int \frac{d(6x-5)}{6x-5} = [t = 6x-5] =$$

$$= \frac{1}{6} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{6} \ln|t| + C = \frac{1}{6} \ln|6x-5| + C;$$

3) $$\int \cos^4 2x \cdot \sin 2x dx = \left[\sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cdot d\left(\cos 2x\right) \right] =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \int \cos^4 2x \cdot d\left(\cos 2x\right) = \left[t = \cos 2x \right] =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \int t^4 dt = -\frac{1}{2} \cdot \frac{t^5}{5} + C = -\frac{1}{10} \cos^5 2x + C;$$

4) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[4]{\ln x}}{x}dx = \int (\ln x)^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{x}dx = \left[\frac{1}{x}dx = d(\ln x) \right] =$

$$= \int (\ln x)^{\frac{1}{4}} \cdot d(\ln x) = [t = \ln x] =$$

$$= \int t^{\frac{1}{4}} dt = \frac{t^{\frac{1}{4}+1}}{\frac{1}{4}+1} + C = \frac{4}{5} \cdot t^{\frac{5}{4}} + C = \frac{4}{5} \cdot (\ln x)^{\frac{5}{4}} + C;$$

5) $$\int \frac{dx}{tg4x \cdot \cos^2 4x} = \int \frac{1}{tg4x} \cdot \frac{1}{\cos^2 4x} dx =$$

$$= \left[\frac{1}{\cos^2 4x} dx = \frac{1}{4} d\left(tg4x\right) \right] =$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{1}{tg4x} \cdot d\left(tg4x\right) = \left[t = tg4x\right] =$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{1}{t} dt = \frac{1}{4} \ln\left|t\right| + C = \frac{1}{4} \ln\left|tg4x\right| + C;$$

6) $$\int \frac{\arcsin^3 6x}{\sqrt{1-36x^2}}dx = \int \arcsin^3 6x \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-(6x)^2}}dx}_{\frac{1}{6}\cdot d(\arcsin 6x)} =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\int \arcsin^3 6x \cdot d\left(\arcsin 6x\right) = \left[t = \arcsin 6x\right] =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\int t^3 dt = \frac{1}{6}\cdot\frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{24}\arcsin^4 6x + C;$$

7) $$\int \frac{2^{arctg 3x}}{1+9x^2}\,dx = \int 2^{arctg 3x} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+(3x)^2}\,dx}_{\frac{1}{3}d(arctg 3x)} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \int 2^{arctg 3x} \cdot d\left(arctg 3x\right) = \left[t = arctg 3x\right] =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \int 2^{t}\,dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{2^{t}}{\ln 2} + C = \frac{2^{arctg 3x}}{3\ln 2} + C;$$

8) $$\int x\left(2x^2-1\right)^4 dx=\left[xdx=\frac{1}{4}d\left(2x^2-1\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\int\left(2x^2-1\right)^4\cdot d\left(2x^2-1\right)=\left[t=2x^2-1\right]=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\int t^4dt=\frac{1}{4}\cdot\frac{t^5}{5}+C=\frac{t^5}{20}+C=\frac{\left(2x^2-1\right)^5}{20}+C;$$

9)

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{7x^3+4}}dx = \int \frac{1}{\sqrt[3]{7x^3+4}} \cdot x^2 dx =$$

$$= \int \left(7x^3+4\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot x^2 dx = \left[x^2 dx = \frac{1}{21} \cdot d\left(7x^3+4\right) \right] =$$

$$= \frac{1}{21} \cdot \int \left(7x^3+4\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot d\left(7x^3+4\right) = \left[t = 7x^3+4 \right] =$$

$$=\frac{1}{21}\cdot\int t^{-\frac{1}{3}}dt=\frac{1}{9}\cdot\frac{t^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}+C=\frac{1}{9}\cdot\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}+C=$$

$$=\frac{1}{21}\cdot\frac{3}{2}\cdot t^{\frac{2}{3}}+C=\frac{1}{14}\cdot\left(3x^{3}+4\right)^{\frac{2}{3}}+C.$$

2.3. Метод интегрирования по частям.

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ -

дифференцируемые функции. Тогда справедлива

следующая ***формула интегрирования по частям:***

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du} \qquad (2.1)$$

С помощью этой формулы вычисление интеграла

$$\int u dv$$

сводится к отысканию другого интеграла

$$\int v du$$

Применение формулы целесообразно в тех случаях, когда интеграл $\int v du$ более прост для нахождения, чем исходный, либо подобен ему.

При этом в качестве u следует брать такую функцию, которая при дифференцировании упрощается, а в качестве dv − ту часть подынтегрального выражения, интеграл от которого известен или может быть найден. Иногда формулу **(2.1)** приходится применяться несколько раз.

Укажем некоторые типы интегралов, которые удобно вычислять методом интегрирования по частям.

1. Интегралы вида

$$\int P_n(x) \cdot \sin kx dx,$$

$$\int P_n(x) \cdot \cos kx dx,$$

$$\int P_n(x) \cdot e^{kx} dx,$$

$$\int P_n(x) \cdot a^{kx} dx,$$

где $P_n(x)$ - многочлен, k - число.

Удобно положить

$$u = P_n(x),$$

а $dv = \sin kx dx$,

$\cos kx dx$,

$e^{kx} dx$,

$a^{kx} dx$ соответственно.

Тогда формулу **(2.1)** надо применять столько раз, какова степень многочлена $P_n(x)$, т.е. n раз.

2. Интегралы вида

$$\int P_n(x)\cdot\ln kx\,dx,$$

$$\int P_n(x)\cdot\arcsin kx\,dx,$$

$$\int P_n(x)\cdot\arccos kx\,dx,$$

$$\int P_n(x) \cdot arctgkxdx,$$

$$\int P_n(x) \cdot arcctgkxdx$$

В этом случае

$$u = \ln kx,$$
$$\arcsin kx,$$
$$\arccos kx,$$
$$arctgkx,$$
$$arcctgkx$$

соответственно,

а $$dv = P_n(x)dx.$$

3. Интегралы вида

$$\int e^{ax} \cdot \sin bx dx,$$

$$\int e^{ax} \cdot \cos bx dx$$

Можно положить $u = e^{ax}$

или

$$u = \sin bx \; (u = \cos bx)$$

Примеры.

1) $$\int \underbrace{\left(x^2+4\right)}_{u} \underbrace{\cos 2x dx}_{dv} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} u = x^2 + 4 \Rightarrow du = d(x^2+4) = (x^2+4)'dx = 2xdx \\ dv = \cos 2xdx \Rightarrow v = \int \cos 2xdx = \dfrac{1}{2}\sin 2x (C=0) \end{array} \right] =$$

$$= \underbrace{(x^2+4)}_{u} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}\sin 2x}_{v} - \int \underbrace{\frac{1}{2}\sin 2x}_{v} \cdot \underbrace{2xdx}_{du} =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2}+2\right)\sin 2x - \int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\sin 2x dx}_{dv} =$$

$$= \begin{bmatrix} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \sin 2x dx \Rightarrow v = \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{bmatrix} =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2}+2\right)\sin 2x -$$

$$- \left(\underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)}_{v} - \int \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)}_{v} \cdot \underbrace{dx}_{du} \right) =$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}+2\right)\sin 2x+\frac{x}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx=$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}+2\right)\sin 2x+\frac{x}{2}\cos 2x-\frac{1}{4}\sin 2x+C=$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}+2-\frac{1}{4}\right)\sin 2x+\frac{x}{2}\cos 2x+C=$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{7}{4}\right)\sin 2x+\frac{x}{2}\cos 2x+C;$$

2) $\int \underbrace{\ln 5x}_{u} \cdot \underbrace{(4x^3 + 6x - 3)dx}_{dv} =$

$$= \left[\begin{array}{l} u = \ln 5x \Rightarrow du = d(\ln 5x) = (\ln 5x)' dx = \dfrac{1}{5x} \cdot 5dx = \dfrac{1}{x} dx \\ dv = (4x^3 + 6x - 3)dx \Rightarrow v = \int (4x^3 + 6x - 3)dx = \\ = 4 \cdot \dfrac{x^4}{4} + 6 \cdot \dfrac{x^2}{2} - 3x = x^4 + 3x^2 - 3x \end{array} \right] =$$

$$= \underbrace{\ln 5x}_{u} \cdot \underbrace{(x^4 + 3x^2 - 3x)}_{v} - \int \underbrace{(x^4 + 3x^2 - 3x)}_{v} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}dx}_{du} =$$

$$= \ln 5x \cdot (x^4 + 3x^2 - 3x) - \int (x^3 + 3x - 3)dx =$$

$$= \ln 5x \cdot (x^4 + 3x^2 - 3x) - \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 + 3x + C$$

2.4. Интегрирование рациональных дробей.

Определение. ***Рациональной дробью*** называется функция, заданная в виде отношения двух многочленов:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

Если степень многочлена числителя меньше степени

многочлена знаменателя, т.е. $n < m,$

то рациональная дробь называется ***правильной***;

в противном случае, т.е. если $n \geq m,$

дробь называется ***неправильной.***

Простейшей дробью называется правильная дробь одного из следующих типов:

1. $$\frac{A}{x-a};$$

2. $$\frac{A}{(x-a)^k} \quad (k \geq 2, k \in \mathbb{N});$$

3. $$\frac{A}{x^2+px+q} \quad (D = p^2 - 4q < 0);$$

4. $$\frac{Ax+B}{x^2+px+q} \quad (D=p^2-4q<0);$$

5. $$\frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k} \quad (k \geq 2, k \in \mathbb{N},\ D=p^2-4q<0),$$

где $$A, a, B, p, q \in \mathbb{R}$$

2.4.1. Интегрирование простейших рациональных дробей.

Интегрирование простейших рациональных дробей рассмотрим на примерах.

Примеры.

1) $$\int \frac{dx}{2x-5} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x-5)}{\underbrace{2x-5}_{t}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|2x-5| + C;$$

2)

$$\int \frac{dx}{(3-7x)^4} = -\frac{1}{7}\int \frac{d(\overbrace{3-7x}^{t})}{(\underbrace{3-7x}_{t})^4} =$$

$$= -\frac{1}{7}\int \frac{dt}{t^4} = -\frac{1}{7}\int t^{-4}\,dt = -\frac{1}{7}\cdot\frac{t^{-3}}{-3} + C =$$

$$= \frac{1}{21t^3} + C = \frac{1}{21(3-7x)^3} + C;$$

3) $$\int \frac{dx}{2x^2-2x+10}=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+5}=I$$

Выделим в знаменателе последнего подынтегрального выражения полный квадрат.

Тогда

$$x^2 - x + 5 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 5 =$$

$$= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{19}{4} =$$

$$= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{19}}{2}\right)^2$$

Вернемся к интегралу:

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{19}}{2}\right)^2}=\left[dx=d(x-\frac{1}{2})\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{19}}{2}\right)^2}=\left[t=x-\frac{1}{2}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+\left(\frac{\sqrt{19}}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{19}/2}arctg\frac{t}{\sqrt{19}/2}+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{19}}arctg\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot 2}{\sqrt{19}}+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{19}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{19}}+C;$$

4) $$\int \frac{3x-6}{x^2+2x+7}dx = I$$

В числителе подынтегрального выражения нужно получить производную знаменателя, т.е.

$$(x^2+2x+7)' = 2x+2.$$

Тогда

$$d(x^2+2x+7) = (2x+2)dx.$$

$$I=\int\frac{3(x-2)}{x^2+2x+7}dx=3\int\frac{x-2}{x^2+2x+7}dx=$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{2(x-2)}{x^2+2x+7}dx=\frac{3}{2}\int\frac{2x+2-2-4}{x^2+2x+7}dx=$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{(2x+2)-6}{x^2+2x+7}dx=\frac{3}{2}\int\left(\frac{2x+2}{x^2+2x+7}-\frac{6}{x^2+2x+7}\right)dx=$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+7}dx-\frac{3}{2}\cdot 6\cdot\int\frac{1}{x^2+2x+7}dx=$$

$$=\left[\begin{array}{c}(2x+2)dx=d\left(x^2+2x+7\right)\\ x^2+2x+7=(x+1)^2-1+7=\\ =(x+1)^2+6=(x+1)^2+\left(\sqrt{6}\right)^2\end{array}\right]=$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{d\left(x^2+2x+7\right)}{\underbrace{x^2+2x+7}_{y}}-9\int\frac{d(x+1)}{(\underbrace{x+1}_{t})^2+(\sqrt{6})^2}=$$

$$= \frac{3}{2}\ln(x^2 + 2x + 7) - 9 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} arctg \frac{x+1}{\sqrt{6}} + C =$$

$$= \frac{3}{2}\ln(x^2 + 2x + 7) - \frac{9}{\sqrt{6}} arctg \frac{x+1}{\sqrt{6}} + C.$$

2.4.2. Интегрирование рациональных дробей с помощью разложения их на простейшие дроби.

Перед интегрированием рациональной дроби $$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

необходимо выполнить следующие алгебраические преобразования и вычисления:

1. Если дана неправильная рациональная дробь, выделить из нее целую часть, разделив числитель на знаменатель столбиком, т.е. представить эту дробь в виде:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = M(x) + \frac{R(x)}{Q_m(x)},$$

где $M(x)$ – многочлен,

$\dfrac{R(x)}{Q_m(x)}$ – правильная рациональная дробь.

2. Разложить знаменатель дроби на линейные и квадратичные множители:

$$Q_m(x) = (x-a)^k \cdot (x-b)^s \cdot \ldots \cdot (x^2 + px + q)^l \cdot \ldots$$

где $$D = p^2 - 4q < 0$$

3. Правильную рациональную дробь разложить на сумму простейших дробей:

$$\frac{R(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k} +$$

$$+ \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_s}{(x-b)^s} + \ldots +$$

$$+ \frac{C_1 x + D_1}{x^2 + px + q} + \frac{C_2 x + D_2}{(x^2 + px + q)^2} + \ldots + \frac{C_l x + D_l}{(x^2 + px + q)^l} + \ldots$$

4. Вычислить неопределенные коэффициенты A_i, B_i, C_i, D_i. Для этого привести правую часть последнего равенства к общему знаменателю. В результате получим тождество, в котором равны знаменатели:

$$\frac{R(x)}{Q_m(x)} = \frac{S(x)}{Q_m(x)},$$

где $S(x)$ – многочлен с неопределенными коэффициентами. Поскольку в последнем тождестве равны знаменатели, значит, должны быть тождественно равны и числители:

$$R(x) = S(x). \quad \textbf{(2.2)}$$

Далее, применяем один из методов.

Способ 1 (метод приравнивания коэффициентов). Приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях тождества (2.2) и решить систему линейных уравнений относительно искомых коэффициентов.

Способ 2 (метод частных значений).
Придать в тождестве (2.2) переменной x поочередно столько конкретных числовых значений, сколько неизвестных коэффициентов и решить систему.

Замечание. Часто бывает полезно комбинировать оба способа вычисления коэффициентов.
В результате интегрирование рациональной дроби сведется к нахождению интегралов от многочлена и от простейших рациональных дробей.

Примеры.

1) $$\int \frac{x-4}{x^3-x^2}dx = \int \frac{x-4}{x^2(x-1)}dx = I$$

$$\frac{x-4}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} =$$

$$= \frac{Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2}{x^2(x-1)} \Rightarrow$$

$$x-4=Ax(x-1)+B(x-1)+Cx^2$$

$$\left.\begin{array}{ll} x=1: & -3=C \\ x=0: & -4=-B \\ x=-1: & -5=2A-2B+C \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} C=-3 \\ B=4 \\ A=3 \end{cases}$$

Тогда

$$\frac{x-4}{x^2(x-1)}=\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}-\frac{3}{x-1}$$

Итак,

$$I = \int \left(\frac{3}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{3}{x-1} \right) dx =$$

$$= 3\int \frac{1}{x} dx + 4\int \frac{1}{x^2} dx - 3\int \frac{1}{x-1} dx =$$

$$= 3\ln|x| + 4\int x^{-2} dx - 3\int \frac{d(x-1)}{x-1} =$$

$$= 3\ln|x| + 4\cdot\frac{x^{-1}}{-1} - 3\ln|x-1| + C =$$

$$= 3\ln|x| - 4\cdot\frac{1}{x} - 3\ln|x-1| + C.$$

2) $$\int \frac{2x^4 + x^2 + 16x}{x^3 + 8} dx = I$$

$$2x^4 + x^2 + 16x = 2x + \frac{x^2}{x^3 + 8}$$

$$I = \int \left(2x + \frac{x^2}{x^3 + 8} \right) dx =$$

$$= 2\int x dx + \int \frac{x^2}{x^3 + 8} dx =$$

$$= \left[x^2 dx = \frac{1}{3} d\left(x^3 + 8\right) \right] =$$

$$= 2 \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3} \int \frac{d\left(x^3 + 8\right)}{x^3 + 8} =$$

$$= x^2 + \frac{1}{3} ln|x^3 + 8| + C.$$

3) $\int \frac{5x^2-13x+20}{x^3-3x^2+4x}dx = \int \frac{5x^2-13x+20}{x(x^2-3x+4)}dx = I$

$$\frac{5x^2-13x+20}{x(x^2-3x+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2-3x+4} =$$

$$= \frac{A\left(x^2-3x+4\right)+(Bx+C)x}{x(x^2-3x+4)} \Rightarrow$$

$$5x^2 - 13x + 20 = A\left(x^2 - 3x + 4\right) + (Bx + C)x$$

$$= Ax^2 - 3Ax + 4A + Bx^2 + Cx =$$

$$= x^2(A + B) + x(-3A + C) + 4A$$

Для нахождения A, B, C применим метод приравнивания коэффициентов.

$$\left.\begin{aligned} x^2: &\quad 5 = A + B \\ x^1: &\quad -13 = -3A + C \\ x^0: &\quad 20 = 4A \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} B = 0 \\ C = 2 \\ A = 5 \end{cases}$$

Тогда

$$\frac{5x^2 - 13x + 20}{x(x^2 - 3x + 4)} = \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2 - 3x + 4}$$

Вернемся к вычислению интеграла.

$$I = \int \left(\frac{5}{x} + \frac{2}{x^2 - 3x + 4} \right) dx =$$

$$= 5 \int \frac{1}{x} dx + 2 \int \frac{1}{x^2 - 3x + 4} dx =$$

$$= \left[\begin{array}{c} x^2 - 3x + 4 = \left(x - \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{9}{4} + 4 = \\ = \left(x - \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{7}{4} = \left(x - \frac{3}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2} \right)^2 \end{array} \right] =$$

$$= 5ln|x| + 2\int \frac{d\left(x - \frac{3}{2}\right)}{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} = 5ln|x| +$$

$$+2\frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{2}} arctg \frac{x - \frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}} + C =$$

$$= 5ln|x| + \frac{4}{\sqrt{7}} arctg \frac{2x - 3}{\sqrt{7}} + C$$

2.5. Интегрирование иррациональных функций.

2.5.1. Квадратичные иррациональности.

I. Интегралы вида

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

с помощью выделения полного квадрата

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] \quad \textbf{(2.5)}$$

и последующей замены

$$x + \frac{b}{2a} = t$$

приводится к одному из интегралов:

1) $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k}} = ln\left|t + \sqrt{t^2 \pm k}\right| + C, \quad (a > 0)$

или

2) $\int \frac{dt}{\sqrt{k^2 - t^2}} = arcsin\frac{t}{k} + C, \ (a < 0)$.

Пример.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{8-2x-2x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2(4-x-x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{4-x-x^2}} = I$$

Выделим в подкоренном выражении полный квадрат:

$$4-x-x^2 = -(x^2+x-4) = -\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 4\right] =$$

$$= -\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}\right] = \left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^2 - \left(x+\frac{1}{2}\right)^2$$

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\overbrace{\left(x+\frac{1}{2}\right)}^{t}}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^2-\underbrace{\left(x+\frac{1}{2}\right)}_{t}^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot arcsin\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{17}}{2}}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{17}}+C.$$

II. Рассмотрим интеграл вида

$$\int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\,dx, \qquad (A \neq 0)$$

Сначала в числителе подынтегральной дроби выделяют производную подкоренного выражения

$$2ax + b = \left(ax^2 + bx + c\right)'.$$

После этого интеграл представляют в виде суммы двух интегралов, первый из которых сводится к интегралу

$$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C,$$

а второй (после выделения полного квадрата) – к интегралу

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k}} = ln\left|t + \sqrt{t^2 \pm k}\right| + C, \qquad (a > 0)$$

или

$$\int \frac{dt}{\sqrt{k^2 - t^2}} = arcsin\frac{t}{k} + C, \ (a < 0).$$

Пример.

$$\int \frac{3x+4}{\sqrt{x^2-6x+2}}dx = \left[\left(x^2-6x+2\right)' = 2x-6\right] =$$

$$= 3\int \frac{x+\frac{4}{3}}{\sqrt{x^2-6x+2}}dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2\left(x+\frac{4}{3}\right)}{\sqrt{x^2-6x+2}}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+\frac{8}{3}}{\sqrt{x^2-6x+2}}dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{(2x-6)+6+\frac{8}{3}}{\sqrt{x^2-6x+2}}\,dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int \left(\frac{2x-6}{\sqrt{x^2-6x+2}} + \frac{\frac{26}{3}}{\sqrt{x^2-6x+2}}\right)dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x-6}{\sqrt{x^2-6x+2}}\,dx + \frac{3}{2}\cdot\frac{26}{3}\int \frac{1}{\sqrt{x^2-6x+2}}\,dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{d\overbrace{(x^2 - 6x + 2)}^{t}}{\sqrt{\underbrace{x^2 - 6x + 2}_{t}}} + 13\int \frac{1}{\sqrt{(x-3)^2 - 9 + 2}}\,dx =$$

$$= \frac{3}{2}\cdot 2\sqrt{x^2 - 6x + 2} + 13\int \frac{d(x-3)}{\sqrt{(x-3)^2 - 7}} =$$

$$= 3\sqrt{x^2 - 6x + 2} + 13ln\left|x - 3 + \sqrt{(x-3)^2 - 7}\right| + C.$$

III. Интегралы вида

$$\int R\left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, \ldots, x^{\frac{m_r}{n_r}}\right) dx,$$

где R – рациональная функция,

$$m_1, \ldots, m_r \in \mathbf{Z}, n_1, \ldots, n_r \in \text{¥},$$

сводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки

$$x = t^s,$$

где $s = HOK(n_1, \ldots, n_r).$

Пример.

$$\int \frac{dx}{\left(\sqrt[3]{x}+4\right)\sqrt{x}} = \int \frac{dx}{\left(x^{\frac{1}{3}}+4\right)x^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} n_1 = 3, n_2 = 2 \\ s = HOK(3,2) = 6 \Rightarrow \\ x = t^6 \Rightarrow dx = d\left(t^6\right) = \left(t^6\right)' dt = 6t^5 dt \end{array}\right] =$$

$$=\int \frac{6t^5dt}{\left(\left(t^6\right)^{\frac{1}{3}}+4\right)\left(t^6\right)^{\frac{1}{2}}}=\int \frac{6t^5dt}{\left(t^2+4\right)t^3}=$$

$$=6\int \frac{t^2}{t^2+4}dt=6\int \frac{t^2+4-4}{t^2+4}dt=$$

$$=6\int \left(1-\frac{4}{t^2+4}\right)dt=6\int dt-24\int \frac{1}{t^2+2^2}dt=$$

$$= 6t - 24 \cdot \frac{1}{2} arctg \frac{t}{2} + C =$$

$$= \left[t = x^6 \Rightarrow x = t^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{x} \right] =$$

$$= 6\sqrt[6]{x} - 12 arctg \frac{\sqrt[6]{x}}{2} + C.$$

IV. Интегралы вида

$$\int R\left(x, (ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}}, \ldots, (ax+b)^{\frac{m_r}{n_r}}\right) dx$$

где R – рациональная функция,

$m_1, \ldots, m_r \in \mathbf{Z}, n_1, \ldots, n_r \in$ ¥,

сводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки

$$ax + b = t^s,$$

где $$s = HOK(n_1, \ldots, n_r).$$

Пример. $$\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{2x-3}} = \int \frac{xdx}{(2x-3)^{\frac{1}{3}}} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2x-3=t^3 \Rightarrow \\ x=\frac{1}{2}\left(t^3+3\right) \Rightarrow \\ dx = d\left(\frac{1}{2}\left(t^3+3\right)\right) \Rightarrow \\ dx = \frac{1}{2}\cdot 3t^2dt = \frac{3}{2}t^2dt \end{bmatrix} = \int \frac{\frac{1}{2}\left(t^3+3\right)\cdot\frac{3}{2}t^2dt}{\left(t^3\right)^{\frac{1}{3}}} =$$

$$=\frac{3}{4}\int\frac{\left(t^3+3\right)\cdot t^2dt}{t}=\frac{3}{4}\int\left(t^3+3\right)tdt=\frac{3}{4}\int\left(t^4+3t\right)dt=$$

$$=\frac{3}{4}\left(\frac{t^5}{5}+3\cdot\frac{t^2}{2}\right)+C=\frac{3}{20}t^5+\frac{9}{8}t^2+C=$$

$$=\begin{bmatrix}2x-3=t^3\Rightarrow\\ t=\left(2x-3\right)^{\frac{1}{3}}\end{bmatrix}=$$

$$= \frac{3}{20}\left((2x-3)^{\frac{1}{3}}\right)^{5} + \frac{9}{8}\left((2x-3)^{\frac{1}{3}}\right)^{2} + C =$$

$$= \frac{3}{20}(2x-3)^{\frac{5}{3}} + \frac{9}{8}(2x-3)^{\frac{2}{3}} + C.$$

IV. Интегралы вида

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_r}{n_r}} \right) dx$$

где R - рациональная функция,

$$m_1, \ldots, m_r \in \mathbf{Z}, n_1, \ldots, n_r \in \text{¥},$$

сводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^s,$$

где $$s = HOK\left(n_1, \ldots, n_r\right).$$

2.6. Интегрирование тригонометрических выражений.

I. Интегралы вида

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx,$$

где R – рациональная функция аргументов $\sin x$ и $\cos x$, приводятся к интегралам от рациональных функций с помощью ***универсальной тригонометрической подстановки:***

$$t = tg\frac{x}{2}.$$

В результате этой подстановки имеем

$$x = 2arctgt \Rightarrow dx = d\left(2arctgt\right) = \frac{2}{1+t^2}dt,$$

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{1 - tg^2 \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},$$

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Универсальная подстановка $t = tg\frac{x}{2}$ во многих

случаях приводит к сложным вычислениям, поэтому на практике применяют и другие, более простые подстановки, в зависимости от свойств и вида подынтегральной функции. Укажем эти случаи:

1. если $R(\sin x, \cos x)$ – четная функция

относительно $\sin x$ и $\cos x,$ т.е.

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x),$$

то применяется подстановка

$$t = tgx.$$

При этом используются формулы

$$\sin^2 x = \frac{tg^2 x}{1 + tg^2 x},$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + tg^2 x}.$$

2. если $R(\sin x, \cos x)$ - нечетная функция

относительно $\sin x,$ т.е.

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

то применяется подстановка

$$\boxed{t = \cos x;}$$

3. если $R(\sin x, \cos x)$ – нечетная функция

относительно $\cos x,$ т.е.

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

то применяется подстановка

$$\boxed{t = \sin x;}$$

II. Интегралы вида

$$\int \sin^m x \cos^n x dx, (m, n \in \text{¥})$$

находят

а) **при нечетном** n с помощью подстановки

$$t = \sin x;$$

б) **при нечетном** m с помощью подстановки

$$t = \cos x;$$

в) **если же** m и n **– четные,** то подынтегральную функцию необходимо преобразовать с помощью формул тригонометрии:

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x,$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x),$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}\left(1 + \cos 2x\right).$$

Примеры.

1) $$\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}=I$$

Так, как для подынтегральной функции

$$R(\sin x,\cos x)=\frac{1}{5-4\sin x+3\cos x}$$

не выполняется ни одно из условий:

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x),$$

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

то будем применять универсальную тригонометрическую подстановку:

$$I=\left[\begin{array}{l} t=tg\frac{x}{2}\Rightarrow x=2arctgt\Rightarrow \\ dx=\frac{2}{1+t^2}dt, \\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array}\right]=$$

$$=\int\frac{1}{5-4\cdot\frac{2t}{1+t^2}+3\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=$$

$$=\int \frac{2dt}{5(1+t^2)-8t+3(1-t^2)}=$$

$$=\int \frac{2dt}{5+5t^2-8t+3-3t^2}=\int \frac{2dt}{2t^2-8t+8}=$$

$$=\int \frac{dt}{t^2-4t+4}=\int \frac{dt}{(t-2)^2}=$$

$$=\int (t-2)^{-2}\,d(t-2)=\frac{(t-2)^{-1}}{-1}+C=$$

$$=-\frac{1}{t-2}+C=-\frac{1}{tg\frac{x}{2}-2}+C=\frac{1}{2-tg\frac{x}{2}}+C.$$

2) $\int \frac{dx}{3cos^2x+4sin^2x} = I$

Поскольку для подынтегральной функции

$$R(sinx, cosx) = \frac{1}{3cos^2x + 4sin^2x}$$

выполняется условие

$$R(-sinx, -cosx) = \frac{1}{3(-cosx)^2 + 4(-sinx)^2} =$$

$$= \frac{1}{3cos^2x + 4sin^2x} = R(sinx, cosx),$$

то

$$I = \left[\begin{array}{c} t = tgx \Rightarrow x = arctgt \Rightarrow dx = \dfrac{1}{1+t^2}dt \\ sin^2x = \dfrac{tg^2x}{1+tg^2x} = \dfrac{t^2}{1+t^2} \\ cos^2x = \dfrac{1}{1+tg^2x} = \dfrac{1}{1+t^2} \end{array} \right] =$$

$$= \int \frac{\frac{1}{1+t^2}dt}{3 \cdot \frac{1}{1+t^2} + 4 \cdot \frac{t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{3+4t^2} =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{dt}{\frac{3}{4}+t^2} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + t^2} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} arctg \frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C = \frac{1}{2\sqrt{3}} arctg \frac{2t}{\sqrt{3}} + \mathrm{C} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}} arctg \frac{2tgx}{\sqrt{3}} + C.$$