Решение квадратных уравнений.

Учитель математики
Аксайского казачьего
кадетского корпуса Хачатурова Т.Ф.

Цели урока:

- Развивать математическую речь, мышление и память;
- Расширить знания по данной теме, рассмотрев различные способы решения квадратных уравнений;
- Углубить знания, путём рассмотрения нестандартных задач.

- «Человеку, изучающему алгебру, часто полезнее решить одну и ту же задачу тремя различными способами, чем решить три-четыре различные задачи. Решая одну задачу различными методами, можно путем сравнений выяснить, какой из них короче и эффективнее. Так вырабатывается опыт»

У. Сойер

Во глубь веков

- Представители различных цивилизаций: Древнего Египта, Древнего Вавилона, Древней Греции, Древней Индии, Древнего Китая, Средневекового Востока, Европы овладели приемами решения квадратных уравнений.

  Впервые квадратное уравнение сумели решить математики Древнего Египта. В одном из математических папирусов содержится задача:

  «Найти стороны поля, имеющего форму прямоугольника, если его площадь 12, а – длины равны ширине». «Длина поля равна 4», – указано в папирусе.

  Прошли тысячелетия, в алгебру вошли отрицательные числа. Решая уравнение $x^2 = 16$, мы получаем два числа: 4, –4.

- Дошедшие до нас источники свидетельствуют, что древние ученые владели какими-то общими приемами решения задач с неизвестными величинами. Правило решения квадратных уравнений, изложенное в вавилонских текстах, совпадает по существу с современным, однако неизвестно, каким образом вавилоняне «дошли до этого». Но почти во всех найденных папирусах и клинописных текстах приводятся только задачи с решениями. Авторы лишь изредка снабжали свои числовые выкладки скупыми комментариями типа: «Смотри!», «Делай так!», «Ты правильно нашел!».

Диофантовы уравнения

- Греческий математик Диофант составлял и решал квадратные уравнения. В «Арифметике» Диофанта нет систематического изложения алгебры, однако в ней содержится систематизированный ряд задач, сопровождаемых объяснениями и решаемых при помощи составления уравнений

разных степеней.

Обозначения у Диофанта

ς	неизвестное (x)
Δ^{Υ}	квадрат неизвестного (x^2)
K^{Υ}	куб неизвестного (x^2)
$\Delta\Delta^{\Upsilon}$	«квадрато-квадрат» (x^4)
ΔK^{Υ}	«квадрато-куб» (x^5)
$K^{\Upsilon}K$	«кубо-куб» (x^6)
$\pitchfork$	знак отрицательной величины
M°	свободный член
$\lfloor$	равенство

$$x^3 + 8x - (5x^2 + 1) = x$$

$$K^{\Upsilon}\,\overline{\alpha}\,\varsigma\,\overline{\eta}\,\pitchfork\,\Delta^{\Upsilon}\overline{\varepsilon}\,M^{\circ}\,\overline{\alpha}\,\lfloor\,\varsigma\,\overline{\alpha}$$

В Древней индии

- Задачи на составление квадратных уравнений встречаются уже в астрономическом трактате «Ариа-бхатиам», составленном в 499 г. индийским математиком и астрономом Ариабхаттой. Другой индийский ученый Брахмагупта (VII в.) изложил общее правило решения квадратных уравнений вида $ax^2 + bx = c$.

  В Древней Индии были распространены публичные соревнования в решении трудных задач. В одной из старинных индийских книг по поводу таких соревнований говорится следующее: «Как солнце блеском своим затмевает звезды, так ученый человек затмит славу другого в народных собраниях, предлагая и решая алгебраические задачи». Задачи часто облекались в стихотворную форму.

Вот одна из задач знаменитого индийского математика XII в. Бхаскары:

Обезьянок резвых стая

Всласть поевши, развлекалась.

Их в квадрате часть восьмая на поляне з

А двенадцать по лианам… стали прыгать, повисая…

Сколько ж было обезьянок,

Ты скажи мне, в этой стае?

В Древней Азии

- Первым руководством по решению задач, получившим широкую известность, стал труд багдадского ученого IX в. Мухаммеда бен Мусы аль-Хорезми.
- Трактат аль-Хорезми является первой дошедшей до нас книгой, в которой систематически изложена классификация квадратных уравнений и даны формулы их решения. Трактаты аль-Хорезми были в числе первых сочинений по математике переведены в Европе с арабского на латынь. До XVI в. алгебру в Европе называли искусством алгебры и макабалы.

Квадратные уравнения в Европе XIII-XVII вв.

Общее правило решения квадратных уравнений, приведенных к единому каноническому виду х2+вх+с=0 , было сформулировано в Европе лишь в 1544 ***г. Штифелем.***

.

Формулы решения квадратных уравнений в Европе были впервые изложены в 1202 г. итальянским математиком ***Леонардом Фибоначчи.***

Вывод формулы решения квадратного уравнения в общем виде имеется у Виета, однако Виет признавал только положительные корни. Лишь в 17 в. благодаря трудам ***Декарта, Ньютона и других ученых*** *способ решения квадратных уравнений принимает современный вид*

Квадратное уравнение

- Квадратным уравнением называется уравнение вида

$$ax^2+bx+c=0,$$

где $a, b, c \in R$ $(a \neq 0)$.

Числа a, b, c носят следующие названия:

a - первый коэффициент,

b - второй коэффициент,

c - свободный член.

Задание

Определите коэффициенты квадратного уравнения:

а) $6x^2 - x + 4 = 0$ — $a = 6$, $в = -1$, $c = 4$;

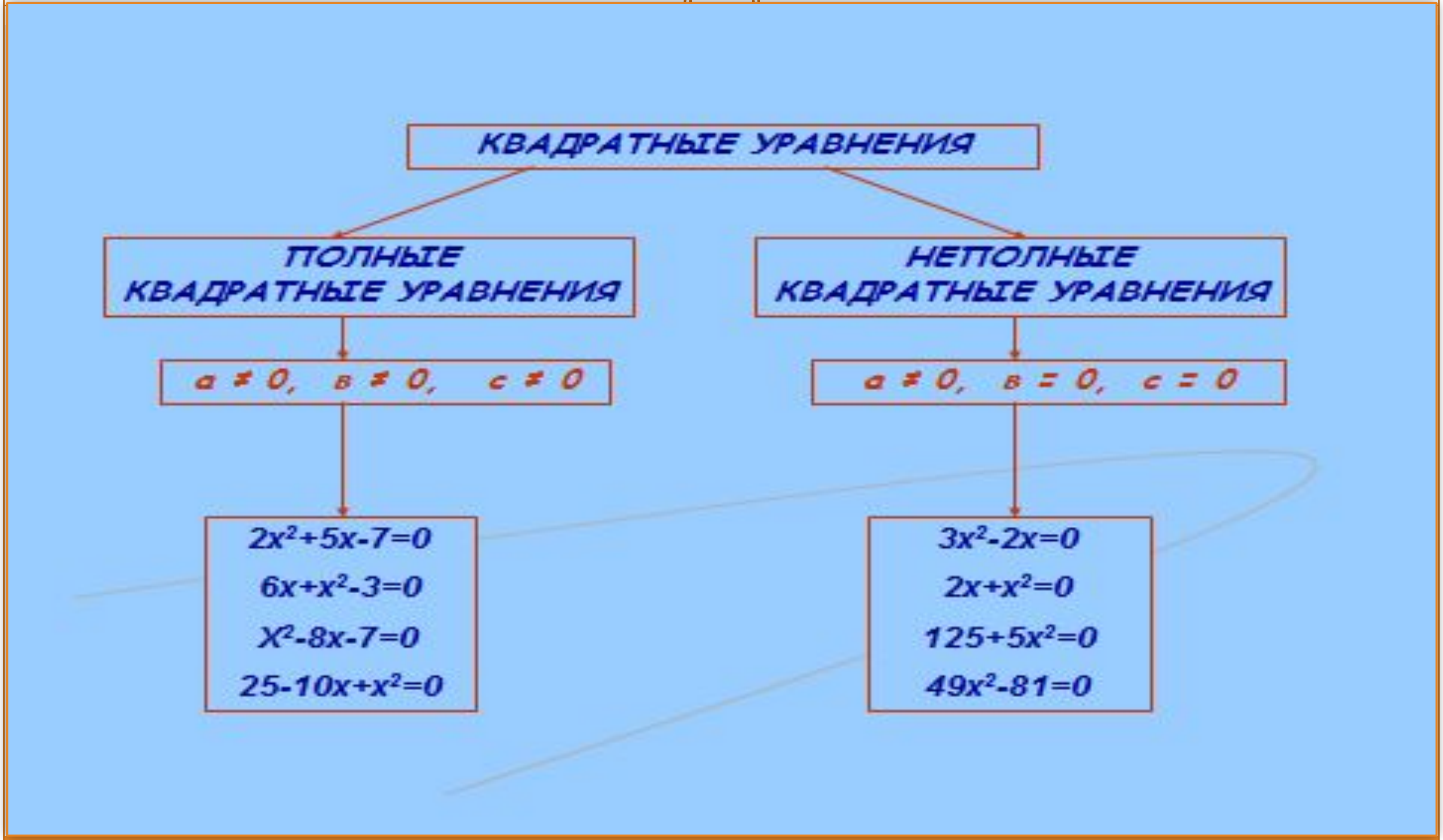
б) $12x - x^2 + 7 = 0$ — $a = -1$, $в = 12$, $c = 7$;

в) $8 + 5x^2 = 0$ — $a = 5$, $в = 0$, $c = 8$;

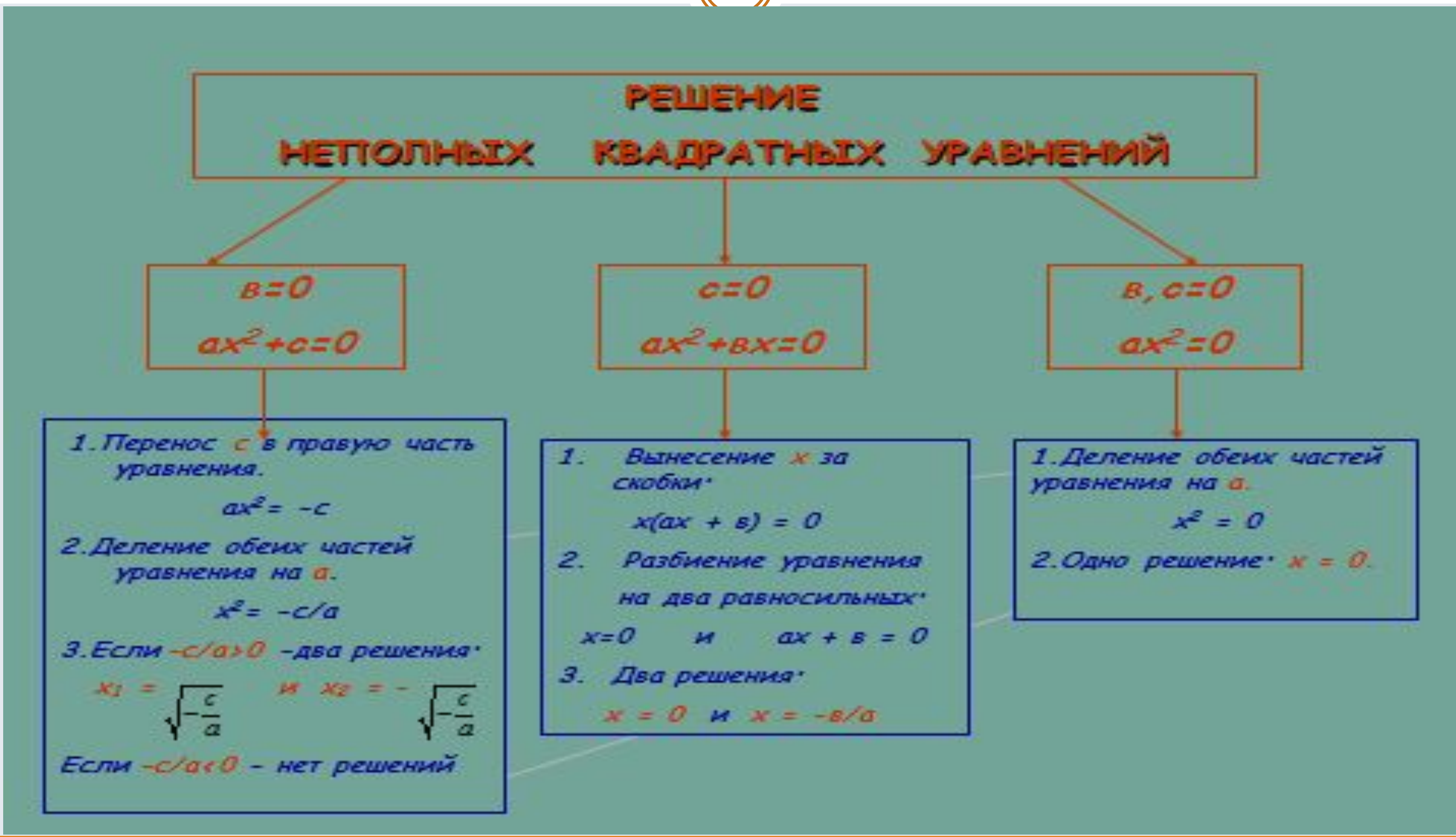
г) $x - 6x^2 = 0$ — $a = -6$, $в = 1$, $c = 0$;

д) $- x + x^2 = 15$ — $a = 1$, $в = -1$, $c = -15$.

Виды квадратных уравнений



Решение неполных квадратных уравнений



Примеры решения неполных квадратных уравнений

- $6x^2 = 0$,
  $x = 0$.
  Ответ: $x = 0$

$2x^2 - 9x = 0$

$x(2x - 9) = 0$

$x = 0$ или $2x - 9 = 0$

$2x = 9$

$x = 9 : 2$

$x = 4{,}5$

Ответ: $x = 0$, $x = 4{,}5$

Примеры решения неполных квадратных уравнений

- $-2x^2+32=0,$

$-2x^2 = -32$

$$x^2 = 9$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{9}$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = -3$$

$$\textit{Ответ:}\ x_1 = 3,\ x_2 = -3$$

Решение квадратных уравнений по формуле

$ax^2+bx+c=0$

Выписать: a =…, $в$ =…, c =…

Найдите дискриминант по формуле: Д = $в^2 - 4ac$

Если:

Д < 0, корней нет

Д = 0, один корень

Д > 0, два корня

Найдите корни по формуле $$x_{1,2} = \frac{-в \pm \sqrt{Д}}{2a}$$

РЕШИТЕ УСТНО:

- □). $x^2=0$,
- □). $4x^2=0$,
- □). $3x^2+12=0$,
- □). $7x^2-3x=0$,
- □). $-x^2+7=0$.

<u>ОТВЕТЫ</u>: **1)** нет решений; **2)** $x_1=1, x_2=-7$;

3) $x_1=-1, x_2=10$; **4)** $x=0$; **5)** $x_{1,2}=\pm\sqrt{7}$;

6) $x_1=0$, $x_2=3/7$; **7)** $x=0$.

Пример решения квадратного уравнения по формуле

- $2x^2 - 5x + 2 = 0$,
- а = 2, в = -5, с = 2
- Д = $в^2 - 4ac$
- Д = $(-5)^2 - 4*2*2 = 25 - 16 = 9$

$$x_{1,2} = \frac{-в \pm \sqrt{Д}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2*2} = \frac{5 \pm 3}{4}$$

$$x_1 = \frac{5+3}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$x_2 = \frac{5-3}{4} = \frac{2}{4} = 0{,}5$$

$$\textit{Ответ}: x_1 = 2, x_2 = 0{,}5$$

Решите уравнения

- $3x^2 + x - 4 = 0;$
- $10x^2 - 11x + 3 = 0;$
- $5x^2 - 11x + 6 = 0;$
- $3x^2 + 11x + 6 = 0;$
- $2x^2 + x - 10 = 0;$
- $4x^2 + 12x + 5 = 0;$
- $6x^2 + 5x - 6 = 0.$

О теореме Виета

Теорема, выражающая связь между коэффициентами квадратного уравнения и его корнями, носящая имя Виета, была им сформулирована впервые в 1591 г. Следующим образом: «Если B+D, умноженное на A-A , равно BD, то A равно B и равно D».

Чтобы понять Виета, следует помнить, что A, как и всякая гласная буква , означало у него неизвестное (наше x), гласные же B,D- кэффициенты при неизвестном.

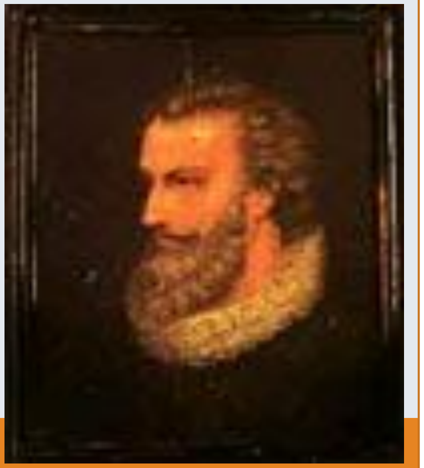
На языке современной алгебры вышеприведенная формулировка Виета означает:

Если приведенное квадратное уравнение $x^2+px+q=0$ имеет действительные корни, то их сумма равна $-p$, а произведение равно q, то есть

$x_1 + x_2 = -p$,

$x_1 x_2 = q$

(сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену).



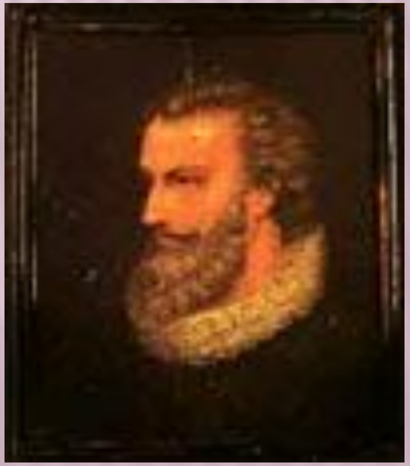
О теореме Виета

Теорема, выражающая связь между коэффициентами квадратного уравнения и его корнями, носящая имя Виета, была им сформулирована впервые в 1591 г. Следующим образом: «Если B+D, умноженное на A-A , равно BD, то A равно B и равно D».

Чтобы понять Виета, следует помнить, что A, как и всякая гласная буква , означало у него неизвестное (наше x), гласные же B,D- кэффициенты при неизвестном.

На языке современной алгебры вышеприведенная формулировка Виета означает:

Если приведенное квадратное уравнение
$x^2+px+q=0$ имеет действительные корни, то
их сумма равна $-p$, а произведение равно q,
то есть
$x_1 + x_2 = -p$,
$x_1 x_2 = q$
(сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену).



Решение уравнений с помощью теоремы Виета

если x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 + px + q = 0$

то $x_1 + x_2 = -p$ $(D \geq 0)$

$x_1 \cdot x_2 = q$

Например:

$X^2 + 3X – 10 = 0$

$X_1 \cdot X_2 = – 10$, значит корни имеют разные знаки

$X_1 + X_2 = – 3$, значит больший по модулю корень - отрицательный

Подбором находим корни: $X_1 = – 5$, $X_2 = 2$

РЕШИТЕ УРАВНЕНИЯ

- $x^2 - 2x - 15 = 0;$
- $x^2 + 2x - 8 = 0;$
- $x^2 + 10x + 9 = 0;$
- $x^2 - 12x + 35 = 0;$

Свойства коэффициентов квадратного уравнения

Если в квадратном уравнении *a+b+c=0*, то один из корней равен 1, а второй по теореме Виета равен

Если в квадратном уравнении *a+c=b*, то один из корней равен (-1), а второй по теореме Виета равен

Пример:

$137x^2 + 20x - 157 = 0$.

$a = 137$, $b = 20$, $c = -157$.

$a + b + c = 137 + 20 - 157 = 0$.

$x_1 = 1$, $x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-157}{137}$

Ответ $\frac{-157}{137}$

Второй коэффициент - четный

Если $b = 2k$, то корни уравнения $ax^2 + 2kx + c = 0$ находятся по формуле $\boxed{x = \dfrac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a} = \dfrac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{D_1}}{a}}$,

где $\boxed{D_1 = \dfrac{D}{4} = k^2 - ac = \left(\dfrac{b}{2}\right)^2 - ac}$.

Метод выделения полного квадрата

Решим уравнение: $x^2 + 6x - 7 = 0.$

$x^2 + 6x - 7 = 0.$
$(x + 3)^2 - 16 = 0.$
$(x + 3)^2 = 16.$
$x + 3 = 4;\ x + 3 = -4.$
$x = 1,\ x = -7.$

Ответ: 1; -7.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

<u>РЕШИ УРАВНЕНИЯ</u>

<u>с помощью формулы :</u>

1 вариант а) $-7x + 5x^2 + 1 = 0$

б) $(x - 1)(x + 1) = 2(5x - 10,5)$

2 вариант а) $2x^2 + 5x - 7 = 0$

б) $-x^2 = 5x - 14$

3 вариант а) $x^2 - 8x + 7 = 0$

б) $6x - 9 = x^2$

ЖЕЛАЮ ВСЕМ УДАЧИ!

- Квадратные уравнения – это фундамент, на котором покоится величественное здание алгебры. Квадратные уравнения находят широкое применение при решении различных задач.