# Математика 1.1

Преподаватель:

***Филипенко Николай Максимович***

доцент кафедры

Высшей математики и математической физики ТПУ

# Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление.

http://mph.phtd.tpu.ru

Или

http://mph.phtd.tpu.ru/methmat.php

Учебно-методическое обеспечение дисциплины

**Основная литература**

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Том 1. - М.: Наука, 1985. - 429с.
2. Ильин В.А., Поздняк Э.Г. Линейная алгебра. - М.: Наука, 1985
3. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. - М.: Наука, 1980.
4. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. М.: Наука, 1998.
5. Апатенок Р.Ф., Маркина А.М. и др. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. - Минск: Высшая школа, 1986.
6. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М.: Наука, 1985.

**Дополнительная литература (Задачники с решениями).**

1.Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике. -Харьков: ХТУ, 1974.-ч.1
2. Сборник задач по курсу высшей математики( под ред. Г.Н. Кручковича ), М. Наука, 1973г.
3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в примерах и задачах. –М. : ВШ, 1980.-ч.1
4. Терехина Л.И., Фикс И.И. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. 2008, 2009, ….

# Рейтинг - лист

| № | Темы | Трудоёмкость в часах Ауд / сам | Промежуточный контроль работы студента | Рейтинг промежуточного контроля | Рейтинг темы (баллы) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Линейная алгебра | 24/22 | ИДЗ-1 | 2 | 7 |
| | | | 1. контрольная работа | 5 | |
| 2 | Векторная алгебра | 14/12 | ИДЗ-2 | 2 | 7 |
| | | | 2.контрольная работа | 5 | |
| 3 | Аналитическая геометрия | 26/22 | ИДЗ-3,4 | 4 | 10 |
| | | | 3.контрольная работа | 6 | |
| | **Коллоквиум** | 6 | | | 30 |
| 4 | Введение в анализ | 22/16 | ИДЗ-5 | 2 | 9 |
| | | | **4. контрольная работа** | 7 | |
| 5 | Дифференциальное исчисление функций одной переменной | 24/22 | ИДЗ-6,7 | 4 | 12 |
| | | | **5. контрольная работа** | 8 | |
| 6 | Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных | 18/18 | ИДЗ-8 | 2 | 9 |
| | | | **6. контрольная работа** | 7 | |
| | **ВСЕГО** | **Допуск к экзамену 33 балла** | | | 60 |
| | | **Экзамен** | | 40 | |
| | | | | | 100 |

# • Матрицы, действия над ними.

Рассмотрим систему двух
[л]инейных алгебраических
[ур]авнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} \cdot a_{22} \\ \cdot - a_{12} \end{vmatrix} + \quad \begin{vmatrix} \cdot - a_{21} \\ \cdot a_{11} \end{vmatrix} +$$

[Р]ешением такой системы называется
[па]ра значений:

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}, \quad x_2 = \frac{b_2 a_{12} - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}.$$

[по]дстановка которых вместо $x_1$ и $x_2$ обращает оба уравнения в тождества. Видно, что решение зависит от знаменателя. Если [он] неравен 0, то мы получим единственное решение для $x_1$ и $x_2$ .
[З]наменатель получаем в результате действий с коэффициентами при неизвестных, из которых можно составить таблицу:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

[Е]сли мы будем иметь более сложную систему уравнений, с большим количеством неизвестных и уравнений, то система линейных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Таблица, составленная из коэффициентов при неизвестных, называется матрицей.

*Определение:* **матрицей** размером m на n называется прямоугольная таблица чисел или буквенных выражений, состоящая из m строк и n столбцов.

Для данной системы основная матрица:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

обозначается большой буквой *A.*

Числа $a_{ij}$, образующие матрицу, называются элементами матрицы.

Частные виды матриц: строка, столбец, квадратная, диагональная, единичная, треугольная, ступенчатая и др.

**1.** Прямоугольные матрицы размера $(m \times n)$ :

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & -8 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -8 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

размер $(2 \times 4)$ размер $(3 \times 2)$

**2.** Матрица - строка размера $(1 \times n)$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & -4 & 6 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Такая матрица состоит из одной строки и $n$ столбцов и часто называется "вектор-строка".

**3.** Матрица - столбец размера $(m \times 1)$ :

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \\ \dots \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Такая матрица состоит из одного столбца и $m$ строк и часто называется "вектор – столбцом".



**7.** Единичная матрица: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Как видно, в единичной матрице диагональные элементы равны единице, а остальные элементы равны нулю.

# СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

- Системой **m** линейных уравнений с **n** неизвестными называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m_2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

- **Матрицей** размером **m** на **n** называется прямоугольная таблица чисел или буквенных выражений, состоящая из **m** строк и **n** столбцов.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots . a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots . a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots . a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Для данной системы **основная** матрица обозначается большой буквой *А*. Числа $a_{ij}$, образующие матрицу, называются элементами матрицы.

В матричной форме систему можно записать в виде : $AX = B$.

Например, система из трех уравнений с тремя неизвестными и ее основная матрица

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -6_2 \\ -4x_1 + 7x_2 + x_3 = 4 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 3 & -1 & 2 \\ -4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

**Квадратная матрица размера (3x3) или матрица 3-го порядка**

В этой же системе можно выписать в виде матрицы столбец свободных членов

$$B = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Матрица - столбец размера (3x1)

Можно записать матрицу-строку $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 & -1 \end{pmatrix}$ , размер матрицы (1x4)

В квадратных матрицах можно выделить главную и побочную диагонали

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 3 & -1 & 2 \\ -4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

*побочная*

*главная*

*Суммой* $A+B$ *- матриц A и B* называется матрица *C* размера $(m\times n)$, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц $A$ и $B$:

$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, $(i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n)$.

*Произведением* $\alpha A$ *матрицы A на число* $\alpha$ называется матрица *B*, которая получается из матрицы *A* умножением всех элементов на $\alpha$: $b_{ij}=\alpha a_{ij}$.

Например:

$$A+B=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 5 & -2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 4\\ 2 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3+3 & -2+4\\ 5+2 & -2+5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 2\\ 7 & 3\end{bmatrix}$$

$$2A=2\begin{bmatrix}3 & -2\\ 5 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot 3 & 2\cdot(-2)\\ 2\cdot 5 & 2\cdot(-2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & -4\\ 10 & -4\end{bmatrix}$$

Умножение матриц возможно, если число столбцов $n$ матрицы $A$ равно числу столбцов $n$ матрицы $B$.

Правило умножения: При умножении матриц каждый элемент матрицы произведения находится как сумма произведений элементов строки первой матрицы на соответствующие элементы столбца второй матрицы.

*Например:*

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 5 & -2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & 4\\ 2 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\cdot 3+(-2)\cdot 2 & 3\cdot 4+(-2)\cdot 5\\ 5\cdot 3+(-2)\cdot 2 & 5\cdot 4+(-2)\cdot 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 2\\ 11 & 10\end{bmatrix}$$

$$.\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \left| \begin{array}{l} (3\times 3)(3\times 2) = (3\times 2) \\ \text{Выполнять умножение} \\ \text{можно. В результате} \\ \text{получим матрицу} \\ \text{размера } \ (3\times 2) \end{array} \right| =$$

$$\begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 1\cdot 0 + 2\cdot 1 & 1\cdot 9 + 1\cdot 3 + 2\cdot(-1) \\ 2\cdot 5 + 1\cdot 0 + (-1)\cdot 1 & 2\cdot 9 + 1\cdot 3 + (-1)\cdot(-1) \\ 3\cdot 5 + 2\cdot 0 + (-4)\cdot 1 & 3\cdot 9 + 2\cdot 3 + (-4)\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 9 & 22 \\ 11 & 37 \end{pmatrix}.$$

$$5.\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \left| \begin{array}{l} (1\times 3)(3\times 1) = (1\times 1) \\ \text{получим матрицу, состоящую} \\ \text{из одного элемента} \end{array} \right| =$$

$$= (1\cdot 2 + 2\cdot 1 + 3\cdot 3) = (13).$$

$$6.\ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \ |\, (3\times 1)(1\times 3) = (3\times 3)\, | =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 2 & 2\cdot 3 \\ 1\cdot 1 & 1\cdot 2 & 1\cdot 3 \\ 3\cdot 1 & 3\cdot 2 & 3\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

## Для квадратных матриц можно вычислить определитель.

Определитель квадратной матрицы есть некоторое число, которое вычисляется по элементам матрицы согласно правилу, которое будет сформулировано после введения понятий миноров и алгебраических дополнений элементов определителя.

*Минором* элемента определителя называется определитель, полученный после вычеркивания из исходного строки и столбца, на пересечении которых стоит этот элемент.

*Алгебраическое дополнение* элемента – это минор этого элемента, взятый со знаком (+), если сумма номеров строки и столбца, на которых находится элемент – четная, и со знаком (-), если эта сумма – нечетная.

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 3 & -1 & 2 \\ -4 & 7 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} \qquad A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = M_{11}$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 3 & -1 & 2 \\ -4 & 7 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} = -M_{23}$$

# Вычисление определителей

1. Определитель 1-го порядка равен самому элементу

$$\boxed{\Delta_1 = |a_{11}| = a_{11}}$$

Например: $\Delta_1 = |2| = 2,$ $\Delta_1 = |-7| = -7$

2. Определитель 2-го порядка находится по правилу

$$\boxed{\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c}$$

Определитель 2-го порядка равен разности произведений элементов главной и побочной диагонали.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - (-3) \cdot 4 = 10 - (-12) = 10 + 12 = 22$$

Например:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -6 & -2 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = (-6) \cdot 7 - (-2) \cdot (-3) = -42 - 6 = -48$$

# Определитель 3-го порядка.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} -$$

$$- a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^{"+"} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^{"-"}.$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 5\cdot 2(-1) + 1\cdot 4\cdot 1 + 3\cdot 3(-2) - 1\cdot 2(-2) - 3\cdot 1(-1) -$$

$$- 3\cdot 4\cdot 5 = -10 + 4 - 18 + 4 + 3 - 60 = -77.$$

Определитель 3-го можно найти путем <u>разложения определителя по элементам строки или столбца.</u>
При этом используется

Основное правило вычисления определителя:
Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки или столбца
на соответствующие им алгебраические дополнения

*Например,* **разложение определителя по элементам 1-ой строки будет иметь вид**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} =$$

$$= a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

В соответствии со свойствами определитель порядка $n$ может быть представлен в виде разложения этого определителя по элементам $i$-й строки:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in} = = a_{i1}(-1)^{i+1} M_{i1} + a_{i2}(-1)^{i+2} M_{i2} + \dots + a_{in}(-1)^{i+n} M_{in}.$$

То есть ***определитель квадратной матрицы A порядка n равен сумме произведений элементов какой-либо i-й его строки на алгебраические дополнения этих элементов.***

Аналогичным образом можно разложить этот же определитель по элементам любого его столбца.

Теорема Лапласа. *Определитель равен сумме произведений всех элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения.*

Пример вычисления определителя путем разложения по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 5 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} + (-4)\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (3\cdot 6 - (-2)\cdot(-1)) + 4\cdot(5\cdot 6 - (-2)\cdot 4) + 2\cdot(5\cdot(-1) - 3\cdot 4) =$$

$$= (18-2) + 4\cdot(30+8) + 2\cdot(-5-12) = 16 + 152 - 34 = 134$$

Наиболее простым, очевидно, является разложение определителя по элементам того ряда, в котором все элементы, кроме одного, равны нулю

Например, следующий определитель наиболее просто разложить по элементам 2-й строки

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ -6 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} + 0 + 0 =$$

$$= -3\cdot((-1)\cdot 7 - (-2)\cdot 4) = -3\cdot(-7+8) = -3\cdot 1 = -3$$

## 2. Свойства определителей

1) При транспонировании *матрицы её* определитель не меняется.

2) При перестановке любых двух *строк (столбцов) определитель* меняет знак.

3) Общий множитель *элементов любой строки (столбца) можно* выносить за знак *определителя*.

4) *Если все элементы k-й строки определителя* **|A|** *являются суммами двух элементов,*

*то определитель равен*

*сумме двух определителей* $|A_1|$ *и* $|A_2|$*,*

*у которых все строки, кроме k-й, совпадают со строками определителя* **|A|***,*

*k-я строка в определителе* $|A_1|$ *состоит из первых слагаемых,*

*а в определителе* $|A_2|$ *– из вторых слагаемых*.

**5)** *Определитель* **равен нулю** *если*:

*а) он имеет строку (столбец),* ***состоящую из нулей****;*

*б) он имеет хотя бы* ***две одинаковые строки*** *(столбца);*

*в) он имеет хотя бы* ***две пропорциональные*** *(т.е. отличающиеся множителем) строки (столбца);*

$$a_{ij} = \lambda_1 \cdot a_{i_1 j} + \lambda_2 \cdot a_{i_2 j} + \dots + \lambda_k \cdot a_{i_k j}, \quad j = \overline{1,n}$$

*г) хотя бы одна строка (столбец) является* ***линейной комбинацией нескольких других строк*** *(столбцов).*

$$(a_{ji} = \lambda_1 \cdot a_{ji_1} + \lambda_2 \cdot a_{ji_2} + \dots + \lambda_k \cdot a_{ji_k}, \quad j = \overline{1,n})$$

- 6) *Определитель не изменится,*
  *если к каждому элементу i-й строки (столбца) прибавить соответствующий элемент k-й строки (столбца),*
  *умноженный на число* $\alpha \neq 0$.

Согласно свойству определителей: *Величина определителя не изменится, если к элементам какого-либо ряда прибавить соответствующие элементы другого ряда, предварительно умноженные на число.*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -4 & -1 \\ -3 & 1 & -2 & 5 \\ -4 & -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2+2 & -4+3 & -6-4 & -8-1 \\ 3-3 & 6+1 & 9-2 & 12+5 \\ 4-4 & 8-3 & 12+1 & 16+2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -10 & -9 \\ 0 & 7 & 7 & 17 \\ 0 & 5 & 13 & 18 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -10 & -9 \\ 7 & 7 & 17 \\ 5 & 13 & 18 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & -10 & -9 \\ -7+7 & -70+7 & -63+17 \\ -5+5 & -50+13 & -45+18 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -10 & -9 \\ 0 & -63 & -46 \\ 0 & -37 & -27 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -63 & -46 \\ -37 & -27 \end{vmatrix} = -(-63 \cdot (-27) - (-46) \cdot (-37)) =$$

$$= -(1701 - 1702) = 1$$

## § Обратная матрица

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Обратной к матрице* **A** *называется матрица, обозначаемая* $\mathbf{A}^{-1}$, *такая, что* $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{E}$.

### СВОЙСТВА ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

1) *Если матрица* **A** *имеет обратную, то* **A** *и* $\mathbf{A}^{-1}$ *– квадратные матрицы одного порядка.*
2) *Если обратная матрица существует, то она единственная.*
3) *Если матрица* **A** *имеет обратную, то определитель матрицы* **A** *отличен от нуля.*

Квадратная матрица, определитель которой отличен от нуля, называется *невырожденной*.

ТЕОРЕМА. *Пусть* **A** *– квадратная матрица. Матрица* **A** *имеет обратную тогда и только тогда, когда её определитель* **|A|** *отличен от нуля. Причем обратная матрица* $\mathbf{A}^{-1}$ *может быть найдена по формуле:*

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \mathbf{S}^T$$

*где* $S$ *– матрица из алгебраических дополнений элементов матрицы* **A***, т.е.*

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

*Матрица* $S^T$ *называется союзной (или присоединенной, или взаимной) для матрицы* **A***.*

# Схема нахождения обратной матрицы

- 1) Находится определитель матрицы.

  Если он отличен от нуля $\det A \neq 0$, то обратная матрица существует.
- 2) Составляется союзная матрица $A^*$, элементами которой являются алгебраические дополнения элементов исходной матрицы.
- 3) Полученную союзную матрицу транспонируем, т.е. меняем ролями строки и столбцы матрицы. Получаем матрицу $A^{*T}$.
- 4) Матрицу $A^{*T}$ делим на определитель матрицы и получаем обратную матрицу. (При делении матрицы на число все ее элементы нужно разделить на это число)

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^{*T}}$$

Рассмотрим примеры.

1. Найти матрицу, обратную данной $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

1) $\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - (-3) \cdot 4 = 22$

2) $A^* = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ 3) $A^{*T} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ 4) $A^{-1} = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

# Нахождение обратной матрицы

2. Найти матрицу, обратную данной
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Находим определитель матрицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 18 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 18 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -(18 \cdot 3 + 1) = -55 \neq 0$$

**Т.о. обратная матрица существует.**

2) Составляем союзную матрицу

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3 \qquad A_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = -(3+8) = -11 \qquad A_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1$$

$$A_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(4-5) = 1 \qquad A_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 20 = 22 \qquad A_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = -(2+16) = -18$$

$$A_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 5 = 13 \qquad A_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(4-15) = 11 \qquad A_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 12 = -14$$

$$A^* = \begin{pmatrix} -3 & -11 & -1 \\ 1 & 22 & -18 \\ 13 & 11 & -14 \end{pmatrix}$$

3) Полученную матрицу транспонируем

$$A^{*T} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 13 \\ -11 & 22 & 11 \\ -1 & -18 & -14 \end{pmatrix}$$

4) Обратная матрица

$$A^{-1} = -\frac{1}{55} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 13 \\ -11 & 22 & 11 \\ -1 & -18 & -14 \end{pmatrix}$$

# Матричные уравнения

Матричные уравнения – это уравнения, в которых участвуют как известные матрицы, так и неизвестная матрица, которую и нужно найти. Существуют два основных типа матричных уравнений.

1 тип (левое умножение)

$$A \cdot X = B$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

2 тип (правое умножение)

$$X \cdot A = B$$

$$X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}$$

$$X \cdot E = B \cdot A^{-1}$$

$$X = B \cdot A^{-1}$$

В виде матричного уравнения $A \cdot X = B$ может быть записана система линейных уравнений, решение которой $X = A^{-1} \cdot B$ существует, если определитель основной матрицы отличен от нуля.

Если в системе количество уравнений и неизвестных разное, то нельзя говорить об определителе основной матрицы и решать систему матричным методом нельзя.
Для решения таких систем применяется метод Гаусса

- Решить матричное уравнение

$$X\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Выполним вначале умножение матриц на число и упростим уравнение. При умножении матрицы на число все ее элементы нужно умножить на это число. При сложении матриц складываются соответствующие элементы, т.е. элементы, стоящие на одинаковых местах в матрицах. При вычитании матриц также нужно вычитать соответствующие элементы.

$$X\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & -9 \end{pmatrix};$$

$$X\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & -9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}, \Rightarrow X\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Обозначим $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

Тогда получим матричное уравнение вида $X \cdot A = B$, решение которого $X = B \cdot A^{-1}$, где $A^{-1}$ – матрица, обратная матрице $A$. Итак,

$$X = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

Найдем $A^{-1}$ по известной схеме:

1) $\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 4 = 10,$ 2) $A^* = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$

3) $A^{*\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ 4) $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(\mathrm{A})} A^{*\mathrm{T}} = \dfrac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

Окончательно:

$$X = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 7 \cdot 3 + (-2) \cdot (-4) & 7 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 \\ 0 \cdot 3 + (-3) \cdot (-4) & 0 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & 3 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}.$$

Здесь мы выполнили умножение двух матриц по следующему правилу: *При умножении матриц каждый элемент матрицы произведения получается как сумма произведений элементов строки первой матрицы на соответствующие элементы столбца второй матрицы.*