Производная

Понятие касательной

Определение: *Касательной к данной непрерывной кривой в данной ее точке М (точка касания) называется предельное положение секущей ММ', проходящей через точку М, когда вторая точка пересечения М' неограниченно приближается по кривой к первой.*

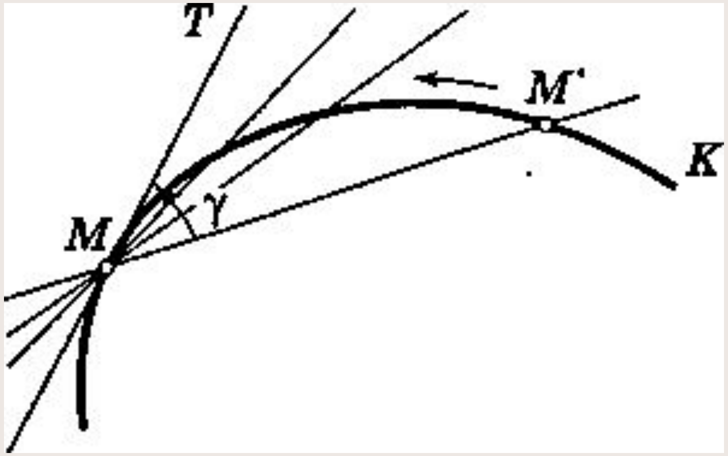


Рис. 1

Задача о касательной

Зная уравнение непрерывной линии

$$y = f(x),$$

найти уравнение касательной в данной ее точке M (x, y), предполагая, что касательная существует.

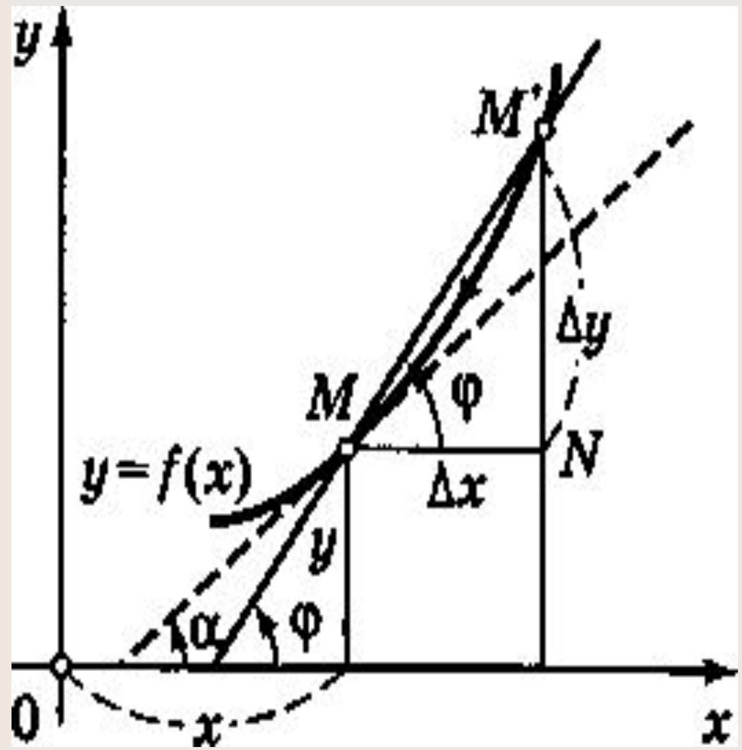
$$k = tg\varphi = \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = f'(x)$$

$$tg\varphi \to tg\alpha$$

$$k = f'(x)$$

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



$$Y - y = k(X - x)$$

Рис. 2.

$$Y - f(x) = f'(x)(X - x)$$

Задача о скорости движения

- Задача. *Зная закон движения S=f(t), найти скорость движущейся точки для любого момента времени.*

$$OM = x$$

$$t + \Delta t$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

$$OM' = x + \Delta x$$

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$x + x\Delta = f + \Delta t$$

$$\Delta x = f(t+\Delta t) - f(t)$$

$$v = f'(t)$$

Общее определение производной

Определение: *Производной функции y = f(x) называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю, если этот предел существует*

Δ

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Найти производную функции $y = x^2$

$\Delta x \neq 0$ $\Delta y = (x + \Delta x)^2$ $y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$

$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x * \Delta x + (\Delta x)^2$ (x2)' = 2x

Смысл производной

Физический

Если функция описывает какой-либо физический процесс, то $y = f(x)$ *есть скорость протекания*
y'
этого процесса.

Геометрический

$f'(x) = k$ *касательной к графику функции y=f (x) в точке, абсцисса которой равна x.*

Например

Точка движется прямолинейно по закону $S = t^2$ *.Найти скорость движения в момент времени t=3*

y=kx+b

$$k = y'(x) = (x^2 + 1)' = 2x$$

*k=2*1=2*

*2=2*1+b*

Уравнение касательной к кривой

$$y = x^2 + 1$$

в точке A(1;2)

b=0

y=2x

Зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью функции

Мы видели, что функция

$$y = f(x)$$

называется *непрерывной в точке х,* если в этой точке

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

Функция называется *дифференцируемой в точке х,* если в этой точке она имеет производную, т. е. если существует конечный предел:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$$

Зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью функции

ТЕОРЕМА:

Если функция дифференцируема в некоторой точке, то в этой точке функция непрерывна. Обратное утверждение неверно: непрерывная функция может не иметь производной.

Правила нахождения производной

1. Если функции u(x) и v(x) имеют в точке x производные, то их сумма u(x) + v(x) также имеет в этой точке производную, причем

$$(u + v)' = u' + v'$$

2. Если функция u(x) имеет в точке x производную и C – данное число, то функция C·u(x) также имеет в этой точке производную, причем

$$(Cu)' = C \cdot u'$$

(постоянное число выносится за знак производной)

Правила нахождения производной

3. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют в точке x производные, то их произведение $u(x) \cdot v(x)$ также имеет в этой точке производную, причем

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

4. Если функция $v(x)$ имеет в точке x производную и $v(x) \neq 0$, то функция $\frac{1}{v(x)}$ также имеет в этой точке производную, причем

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$

Правила нахождения производной

5. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют в точке x производные и $v(x) \neq 0$, то функция $\frac{u(x)}{v(x)}$ также имеет в этой точке производную, причем

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Производная сложной функции

$$\left(f\left(g(x)\right)\right)' = f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x)$$

Примеры:

1. $\left((5x-3)^3\right)' = 3(5x-3)^2\cdot(5x-3)' =$
$= 3(5x-3)^2\cdot 5 = 15(5x-3)^2$

2. $\left(\sin(4x+8)\right)' = \cos(4x+8)\cdot(4x+8)' =$
$= \cos(4x+8)\cdot 4 = 4\cos(4x+8)$

Понятие о производных высших порядков

Производная f '(x) от функции f (x) называется производной первого порядка и представляет собой некоторую новую функцию. Может случиться, что эта функция сама имеет производную. Тогда производная от производной первого порядка называется производной второго порядка или второй производной и обозначается так: f ''(x). Итак,

$$f''(x) = \left[f'(x)\right]'$$

$$f'''(x) = \left[f''(x)\right]'$$

Пример

1)Пусть y = sin x

Тогда имеем последовательно

$$y' = \cos x, y'' = -\sin x, y''' = -\cos x, y^{IV} = \sin x, ...$$

2)Пусть $y(x) = 4x^3 + 2\cos x$

Найти: y'''

$$y' = 12x^2 - 2\sin x$$

$$y'' = 24x - 2\cos x$$

$$y''' = -24x + 2\sin x$$