ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

К наиболее важным методам интегрирования относятся:

1. метод непосредственного интегрирования;
2. метод замены переменной;
3. метод интегрирования по частям.

Метод замены переменной (или метод подстановки)

Этот метод основан на следующей теореме:

Теорема. Если F(x)- первообразная функции f(x), а $x = \varphi(t)$ - дифференцируемая функция, то функция $f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)] + C$ также имеет первообразную.

Доказательство. По правилу дифференцирования сложной функции $\{F[\varphi(t)]\}'_t = F'_\varphi \cdot \varphi'_t = f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)$, то есть функция $f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)$ имеет в качестве одной из своих первообразных функцию $F[\varphi(t)]$.

Следовательно, $\int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)] + C$**, что и требовалось доказать.**

Поскольку $F[\varphi(t)] + C = F(x) + C = \int f(x)dx,$

$\Rightarrow \int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$ **- формула замены переменной неопределенном интеграле.**

Таким образом, метод замены переменной состоит в следующем:

Пусть требуется вычислить $\int f(x)dx$ **,причем непосредственно подобрать первообразную для функции** $f(x)$ **нельзя, но известно, что она существует.**

Введем в место x новую переменную t, положив $x = \varphi(t)$**.**

Тогда $\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$ **(1)**

Допустим, что интеграл, стоящий в первой части равенства (1), легко находится:

$$\int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)] + C = F(x) + C$$

Итак, метод подстановок заключается в том, что в данном интеграле переменную x заменяют некоторой функцией $\varphi(t)$ **от переменной t.**

Это приводит к новому интегралу $\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$ **, более простому при удачном выборе функции** $\varphi(t)$**.**

После его вычисления в полученном результате заменяют «t» через «x».

Этим самым будет найден интеграл $\int f(x)dx$ **.**

<u>Пример 1.</u>

$$\int\frac{dx}{\left(\sqrt[3]{x}+1\right)\sqrt{x}}=\int\frac{6t^5dt}{(t^2+1)\cdot t^3}=6\int\frac{t^2dt}{t^2+1}dt=6(t-arctg)+C=6(\sqrt[6]{x}-arctg)+C$$

Положим $x=t^6$**, чтобы все корни извлекались** $dx=6t^5dt$**.**

<u>Пример 2.</u> $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = ?\quad (a > 0)$

$$I = \left| \begin{matrix} x = a\sin t \\ dx = a\cos t dt \end{matrix} \right| = \int \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\, a\cos t dt = a^2 \int \cos^2 t dt =$$

$$= a^2 \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt + \frac{a^2}{2}(t + \frac{1}{2})\sin 2t + C =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{2}\sin 2(\arcsin\frac{x}{a}) \right] + C = \frac{a^2}{2}(\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a}\cdot\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}) + C =$$

$$= \frac{a^2}{x}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C$$

Обязательно возвращаться к исходной переменной x.

При замене переменной очень часто удобно бывает задавать не x как функцию от t, а, наоборот, задавать t как функцию от x и писать подстановку в виде $t = g(x)$**.**

Теоретически оба эти способа равнозначны.

Рассмотрим ряд примеров на применение подстановки $t = g(x)$

<u>Пример 1.</u> $\int \sqrt{1+e^x}\,dx = ?$

$$\int \sqrt{1+e^x}\,dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{1+e^x} = t; 1+e^x = t^2; \\ e^x dx = 2tdt \Rightarrow dx = \dfrac{2tdt}{t^2-1} \end{array} \right| = \int t \cdot \frac{2tdt}{t^2-1} =$$

$$= 2\int \frac{t^2 dt}{t^2-1} = 2\int \frac{(t^2-1)+1}{t^2-1}dt = 2\int \left(1 + \frac{1}{t^2-1}\right)dt =$$

$$2(t + \int \frac{dt}{t^2-1}) = 2\left(t + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right) + C = 2(\sqrt{1+e^x}) + \ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right| + C =$$

$$= 2\sqrt{1+e^x} + \ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1} + C$$

Пример 2.

$$\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}dx \left| \begin{array}{l} 1+\sin^2 x = t; \\ dt = 2\sin x \cdot \cos x dx = \sin 2x dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln(1+\sin^2 x) + C$$

Пример 3.

$$\int \frac{e^{1/x}dx}{x^2} = \left| \frac{1}{x} = t \Rightarrow dt = -\frac{dx}{x^2} \right| = -e^t dt = -e^t + C = e^{+\frac{1}{x}} + C$$

В последних двух примерах иногда интегрирование целесообразно выполнять без формального введения новой переменной (новой буквы) – применить способ подведения под знак дифференциала.

Доказано, по определению дифференциала функции,

$$g'(x)dx = dg(x).$$

Переход в этом равенстве слева направо называют «подведением множителя $g'(x)$ **под знак дифференциала».**

Если под интегральное выражение может быть разбито на 2 множителя, один из которых есть дифференциал некоторой функции $t = g(x)$, а другой представляет собой легко интегрируемую функцию от t:

$f\left[g(x)\right]\cdot g'(x)dx = f\left[g(x)\right]\cdot dg(x) = f(t)dt$ **, то целесообразно подстановку $t = g(x)$ производить устно, в уме, это освобождает от излишней записи и ускоряет операцию интегрирования.**

Так, в рассмотренных выше примерах это будет выглядеть таким образом.

<u>Пример 2.</u>

$$\int \frac{\sin 2x dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{d(1+\sin^2 x)}{1+\sin^2 x} = \ln(1+\sin^2 x) + C$$

<u>Пример 3.</u>

$$\int \frac{e^{1/x} dx}{x^2} = -\int e^{1/x} \cdot d\left(\frac{1}{x}\right) = -e^{1/x} + C$$

Пример 4.

$$\int \frac{x^2\ln(x^3+1)}{x^3+1}dx = \frac{1}{3}\int \ln(x^3+1)d\left[\ln(x^3+1)\right] = \frac{1}{3}\cdot\frac{\ln^2(x^3+1)}{2} + C = \frac{\ln^2(x^3+1)}{6} + C$$

Заметив, что $d\left[\ln(x^3+1)\right] = \dfrac{3x^2}{x^3+1}dx$ **, подведем под знак дифференциала** $\ln(x^3+1)$**.**

Замечание 1. Не следует думать, что во всех примерах на интегрирование можно выполнять подведение под знак дифференциала.

Замечание 2. Обычно под знаком “d” подводят (если целесообразно выполнять это) либо знаменатель дроби, либо основание степени, либо подкоренное выражение, либо аргумент функции и т.д.

Для этого необходимо иметь навыки.

Метод замены переменной является одним из основных методов вычисления неопределенных интегралов. Часто при решении другими методами приходится в промежуточных вычислениях прибегать замены переменной.

Однако умение выбрать удачную подстановку в большинстве случаев представляет искусство, которое приходит в результате практики.

Весьма часто встречаются интегралы, которые могут быть взяты с помощью нескольких подстановок, и искусство вычислителя состоит в том, чтобы применить ту из них, которая быстрее и проще приведет к цели.

Например, в $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ **можно применить подстановки:**

1) $x=\frac{1}{t}$; **2)** $x=tgt$; **3)** $\sqrt{1+x^2=t}$ **.**

Часты случаи, когда для нахождения интеграла приходится применять метод замены переменной не один, а несколько раз.

МЕТОД ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ЧАСТЯМ

Этот метод основан на следующей формуле:

$$\int u dv = uv - \int v du \qquad (*)$$

Пусть $u = u(x)$ **и** $v = v(x)$ **- функции от x, имеющие непрерывные производные** $u'(x)$ **и** $v'(x)$ **.**

Известно, что $d(uv) = udv + vdu$**, или**

$udv = d(uv) - vdu \Rightarrow \int udv = \int d(uv) - \int vdu$ **, или** $\int udv = uv - \int vdu$

.

Интегралы $\int udv$ **и** $\int vdu$ $\exists$ **, так как по условию функции u и v дифференцируемы, а значит и непрерывны.**

Формула (*) носит название формулы интегрирования по частям.

Метод, основанный на ее применении, называется методом интегрирования по частям.

Он сводит вычисление $\int udv$ к вычислению другого интеграла: $\int vdu$.

Применение метода интегрирования по частям состоит в том, что под интегральное выражение заданного интеграла стараются представить в виде произведения udv, где u и v - некоторые функции от x, причем эти функции выбирают так, чтобы $\int vdu$ был для вычисления проще, чем исходный интеграл. Для вычисления $\int vdu$ предварительно находят du и $v = \int dv$ (в качестве “v” берут одну какую-либо из исходных первообразных, находимых по dv,поэтому в дальнейшем при вычислении “v” постоянную C в записи будем опускать).

<u>Замечание.</u> Разбивая под интегральное выражение на множители udv, должны понимать, что dv должен содержать и dx.

Общих правил для разложения под интегрального выражения на множители «u» и «dv», к сожалению, дать нельзя. Этому может научить большая и вдумчивая практика.

При всем этом следует иметь в виду, чтобы $\int v\,du$ был проще, чем исходный интеграл.

<u>**Пример.**</u> $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = ?$

$$I = \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \left| \begin{array}{l} u = x^2, dv = \dfrac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \Rightarrow du = 2xdx, \\ v = \displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(a^2 - x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\sqrt{a^2 - x^2} \end{array} \right| =$$

$$= -x^2 \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + \int 2x\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = -x^2\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2}\,d(a^2 - x^2) =$$

$$= -x^2\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{2(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} + C = -x^2\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{2}{3}(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2} + C =$$

$$= \sqrt{a^2 - x^2}\left[-x^2 - \frac{2}{3}a^2 + \frac{2}{3}x^2 \right] + C = -\frac{1}{3}\sqrt{a^2 - x^2}(x^2 + 2a^2 + C)$$

Иногда для получения окончательного результата правило интегрирования по частям применяют последовательно несколько раз.

Метод интегрирования по частям удобно применять, конечно, далеко не всякий раз и умение пользоваться им зависит от наличия опыта.

При вычислении интегралов важно правильно установить, каким методом интегрирования следует пользоваться (так в предыдущем примере тригонометрическая подстановка быстрее приводит к цели).

Несмотря на то, что метод интегрирования по частям имеет более узкую область применения, чем метод подстановки, есть такие интегралы, которые могут быть взяты только с помощью метода интегрирования по частям.

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся интегралы, которые вычисляются интегрированием по частям.

1. **Интегралы вида**: $\int P(x)e^{ax}dx; \int P(x)\sin ax; \int P(x)\cos axdx.$

где $P(x)$ - целый (относительно x) многочлен; a – постоянное число.

Если под знаком интеграла стоит произведение тригонометрической или показательной функции алгебраическую, то за «u» обычно принимают алгебраическую функцию. $u = P(x)$

Пример.

$$\int (x^2+1)\sin xdx = \left| \begin{matrix} u = x^2+1, \\ dx = 2xdx, \\ dv = \sin xdx, \\ v = -\cos x \end{matrix} \right| = -(x^2+1)\cos x + 2\int x\cos xdx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = x, dv = \cos xdx, \\ du = dx, v = \sin x \end{matrix} \right| = -(x^2+1)\cos x + 2x\sin x - 2\int \sin xdx =$$

$$= -(1+x^2)\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C = 2x\sin x + (1-x^2)\cos + C$$

Заметим, что другая разбивка на множители:

$u = \sin x, dv = (x^2 + 1)dx$ **не приводит к цели.**

Доказано, $du \cos xdx, v = \int (x^2 + 1)dx = \frac{x^3}{3} + x$ **.**

$$I = \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\sin x - \int \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\cos xdx.$$

Получим более сложный интеграл.

2. *Интегралы вида:*

$$\int P(x)\ln xdx; \int P(x)\arcsin xdx; \int P(x)\arccos xdx; \int P(x) arctgxdx; \int P(x) arcctgxdx;$$

где $P(x)$ **- многочлен.**

Если под знаком интеграла стоит произведение логарифма функции или обратной тригонометрической функции на алгебраическую, то за «u» следует принимать функции $\ln x, \arcsin x, \arccos x, arctgx, arcctgx.$

Пример.

$$\int xarctgx = \left| \begin{matrix} u = arctgx \Rightarrow du\dfrac{dx}{1+x^2}; \\ dv = xdx \Rightarrow v = \int xdx = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2}arctgx - \frac{1}{2}\frac{x^2dx}{x^2+1} = \frac{x^2}{2}arctgx - \frac{1}{2}\int\frac{(x^2+1)-1}{x^2+1}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}arctgx - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}arctgx + C = \frac{x^2+1}{2}arctgx - \frac{1}{2}x$$

3. Интегралы вида: $\int e^{ax}\sin bxdx; \int e^{ax}\cos bxdx$

Здесь можно использовать любую из 2-х возможных разбивок под интегрального выражения на множители: за «u» можно принять как e^{ax}, так и $\sin bx(\cos bx)$.

Причем вычисление таких интегралов с помощью метода интегрирования по частям приводит к исходному интегралу, то есть получается уравнение относительно искомого интеграла.

Пример. Вычислить $I = \int \cos 3x \cdot e^x dx$ **.**

Пусть $u = \cos 3x \Rightarrow du = -3\sin 3x dx, dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$ **.**

$$I = e^x \cos 3x + 3\int e^x \sin 3x dx = \left| \begin{aligned} & u = \sin 3x, \\ & du = 3\cos 3x d, \\ & v = e^x \end{aligned} \right| = e^x \cos 3x + 3e^x \sin 3x - 9\int e^x \cos 3x dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10\int e^x \cos 3x dx = e^x \cos 3x + 3e^x \sin 3x + C \Rightarrow \int e^x \cos 3x dx = \frac{1}{10} e^x (\cos 3x + 3\sin 3x) + C$$

При интегрировании часто приходится последовательно применять метод подстановки и метод интегрирования по частям.

Пример.

$$\int (\arcsin x)^2 dx = \left| \begin{aligned} & \arcsin = t \Rightarrow \\ & \Rightarrow x = \sin t \Rightarrow \\ & \Rightarrow dx = \cos t dt \end{aligned} \right| = t^2 \sin t - 2\int t \sin t dt = \left| \begin{aligned} & u = t \Rightarrow du = dt; \\ & v = -\cos t \end{aligned} \right| =$$

$$= t^2 \sin t + 2t \cos t - 2\sin t + C = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t + C =$$

$$= (\arcsin^2 x - 2)\sin t + 2\arcsin x \cdot \cos(\arcsin x) + C = (\arcsin^2 x - 2)\sin t + 2\sqrt{1 - x^2}\arcsin x + C$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЙ, СОДЕРЖАЩИХ КВАДРАТНЫЙ ТРЕХЧЛЕН

1. $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}?$

$(a \neq 0, a \in R, b \in R, c \in R)$

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \left| \begin{array}{l} ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = \\ = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right] = \\ a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right] \end{array} \right| = \int \frac{dx}{a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} x+\frac{b}{2a} = t \Rightarrow dx = dt; \\ \frac{4ac-b^2}{4a^2} = \pm k^2 \end{array} \right| = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2 \pm k^2}$$

- табличный интеграл.

2. $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx = ? \quad a \neq 0,$

$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx =$ **|в числителе выделяем производную знаменателя|**

$$\int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+(B-\frac{Ab}{2a})}{ax^2+bx+c}dx = \frac{A}{2a}\int \frac{d(ax^2+bx+c)}{ax^2+bx+c} + (B-\frac{Ab}{2a})\cdot \int \frac{dx}{ax^2+bx+c} =$$

$$= \frac{A}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right| + (B-\frac{Ab}{2a})\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

3. $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = ? \qquad (a \neq 0);$ a, b, c - действительные числа

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]}} = \left|\frac{4ac-b^2}{4a^2} = \pm k^2\right| = \int \frac{dx}{\sqrt{a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2\right]}}$$

1) $a > 0$

$$I = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2\right]}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|x+\frac{b}{2a}+\sqrt{x^2+\frac{b}{a}x+c}\right|+C.$$

2) $a < 0$

В этом случае имеет смысл рассматривать только тогда, когда дискриминант $D = b^2 - 4ac$ **трехчлена** $ax^2 + bx + c$ **положителен:** $D = b^2 - 4ac > 0$

Теперь имеем:

$$\int \frac{d(x+\frac{b}{2a})}{\sqrt{a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - k^2\right]}} = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\arcsin\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}+C.$$

$$k^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2};\ k = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$

Замечание. На практике не пользуются обычно готовыми результатами, а предпочитают всякий раз проводить аналогичные вычисления вновь.

Пример. $\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2-2x-3)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-\left[(x-1)^2-4\right]}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x-1)^2}} =$

$$= \arcsin \frac{x-1}{2} + C$$

4. $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

Преобразуем числитель так, чтобы из него можно было выделить производную квадратного трехчлена:

$$\int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+(B-\frac{Ab}{2a})}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \frac{A}{2a}\int \frac{d(ax^2+bx+c)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + (B-\frac{Ab}{2a})\cdot \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} =$$

$$= \frac{A}{2a}\cdot 2\sqrt{ax^2+bx+c} + (B-\frac{Ab}{2a})\cdot \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

В связи с тем, что не существует на практике удобного общего метода вычисления неопределенных интегралов, приходится на ряду с частными методами интегрирования рассматривать также способы интегрирования некоторых частных классов функций, интегралы от которых часто встречаются на практике.

Важнейшим классом среди них является класс рациональных функций.