

Методы интегрирования

Неопределенный интеграл

Метод замены переменной

Сущность интегрирования методом замены переменной (способом подстановки) заключается в преобразовании интеграла $\int f(x)dx$ в интеграл $\int F(u)du$, который легко вычисляется по какой-либо из основных формул интегрирования.

Для нахождения интеграла $\int f(x)dx$ заменяем переменную x новой переменной u с помощью подстановки $x = \varphi(u)$. Дифференцируя это равенство, получим $dx = \varphi'(u)du$. Подставляя в подынтегральное выражение вместо x и dx их значения, выраженные через u и du , имеем

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(u)]\varphi'(u)du = \int F(u)du.$$

После того как интеграл относительно новой переменной u будет найден, с помощью подстановки $u = \psi(x)$ он приводится к переменной x .

Метод замены переменной

Найдите следующие интегралы:

$$1) \int (3x + 2)^5 dx .$$

Решение:

Введём подстановку $3x + 2 = u$. Дифференцируя, имеем $3dx = du$, откуда

$$dx = \frac{1}{3} du$$

Подставив в данный интеграл вместо $3x + 2$ и dx их выражения, получим:

$$\int (3x + 2)^5 dx = \frac{1}{3} \int u^5 du = \frac{1}{3} \cdot \frac{u^6}{6} + C = \frac{1}{18} u^6 + C .$$

Заменяя u его выражением через x , находим:

$$\int (3x + 2)^5 dx = \frac{1}{18} u^6 + C = \frac{1}{18} (3x + 2)^6 + C .$$

Метод замены переменной

Найдите следующие интегралы:

$$2) \int (2x^3 + 1)^4 x^2 dx .$$

Решение:

Введём подстановку $2x^3 + 1 = u$. Дифференцируя, имеем $6x^2 dx = du$,
откуда $x^2 dx = \frac{1}{6} du$. Таким образом,

$$\int (2x^3 + 1)^4 x^2 dx = \frac{1}{6} \int u^4 du = \frac{1}{6} \cdot \frac{u^5}{5} + C = \frac{1}{30} u^5 + C = \frac{1}{30} (2x^3 + 1)^5 + C.$$

$$3) \int \frac{x dx}{(x^2 + 1)^3} .$$

Решение:

Введём подстановку $x^2 + 1 = u$. Дифференцируя, имеем $2x dx = du$,
откуда $x dx = \frac{1}{2} du$. Таким образом,

$$\int \frac{x dx}{(x^2 + 1)^3} = \int (x^2 + 1)^{-3} x dx = \frac{1}{2} \int u^{-3} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{4u^2} + C = -\frac{1}{4(x^2 + 1)^2} + C.$$

Метод замены переменной

Найдите следующие интегралы:

$$4) \int \frac{x^2 dx}{5x^3 + 1} .$$

Решение:

Введём подстановку $5x^3 + 1 = u$. Дифференцируя, имеем $15x^2 dx = du$,
откуда $x^2 dx = \frac{1}{15} du$. Таким образом,

$$\int \frac{x^2 dx}{5x^3 + 1} = \frac{1}{15} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{15} \ln u + C = \frac{1}{15} \ln |5x^3 + 1| + C .$$

Задачи для самостоятельной работы:

$$1. \int (7 - 2x)^3 dx ; \quad 2. \int (x^2 + 3)^5 x dx ; \quad 3. \int \frac{x^3 dx}{(5x^4 + 3)^5} .$$

Интегрирование по частям

Интегрируя обе части равенства $d(uv) = u dv + v du$, получим

откуда
$$\int d(uv) = \int u dv + \int v du; \quad uv = \int u dv + \int v du, \quad (1)$$

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

С помощью этой формулы вычисление интеграла $\int u dv$ сводится к вычислению интеграла $\int v du$, если последний окажется проще исходного.

Интегрирование по частям

Найдите следующие интегралы:

$$1) \int x \sin x \, dx .$$

Решение:

Пусть $u = x$, $dv = \sin x \, dx$; тогда $du = dx$, $\int dv = \int \sin x \, dx$, т.е.
Используя формулу (1), получим:

$$v = -\cos x .$$

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C .$$

$$2) \int \frac{\ln x \, dx}{x^2} .$$

Решение:

Пусть $u = \ln x$, $dv = \frac{dx}{x^2}$; тогда $du = \frac{dx}{x}$, $\int dv = \int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2} \, dx = -\frac{1}{x}$; $v = -\frac{1}{x}$.

Используя формулу (1), получим:

$$\int \frac{\ln x \, dx}{x^2} = -\frac{\ln x}{x} + \int x^{-2} \, dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C .$$

Интегрирование по частям

Задачи для самостоятельной работы:

$$1) \int x \cos x \, dx;$$

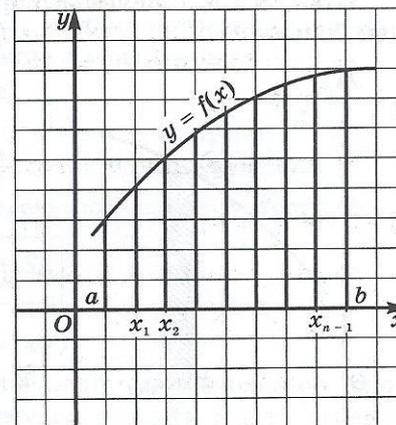
$$2) \int \frac{x \, dx}{\sin^2 x};$$

Определенный интеграл

Приложения определенного интеграла

Определенный интеграл

- В декартовой прямоугольной системе координат XOY фигура, ограниченная осью OX , прямыми $x=a$, $x=b$ ($a < b$) и графиком непрерывной неотрицательной на отрезке $[a;b]$ функции $y=f(x)$, называется криволинейной трапецией



Определенный интеграл

- Вычислим площадь криволинейной трапеции. Разобьем отрезок $[a;b]$ на n равных частей. Проведем через полученные точки прямые, параллельные оси OY . Заданная криволинейная трапеция разобьется на n частей. Площадь всей трапеции приближенно равна сумме площадей столбиков.

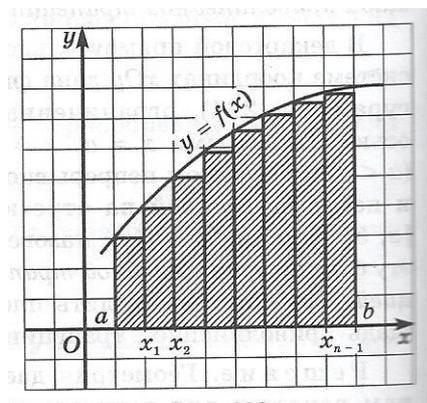
$$S_n = f(x_0) \cdot \Delta x_0 + f(x_1) \cdot \Delta x_1 + \dots + f(x_{n-1}) \cdot \Delta x_{n-1}$$

$$S \approx S_n$$

по определению $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, его называют

определенным интегралом от функции

$y=f(x)$ по отрезку $[a;b]$ и обозначают так: $\int_a^b f(x) dx$



Связь между определенным интегралом и первообразной (Формула Ньютона - Лейбница)

- Для непрерывной функции

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

где $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$.

Основные свойства определенного интеграла

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b dx = b - a$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Основные свойства определенного интеграла

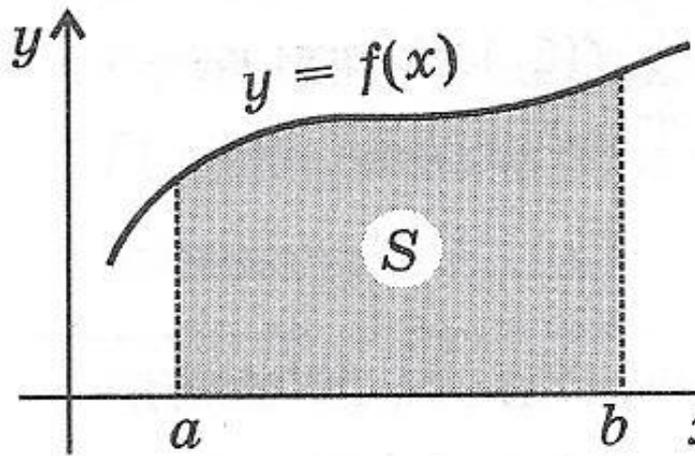
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx, c - const$$

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

Геометрический смысл определенного интеграла

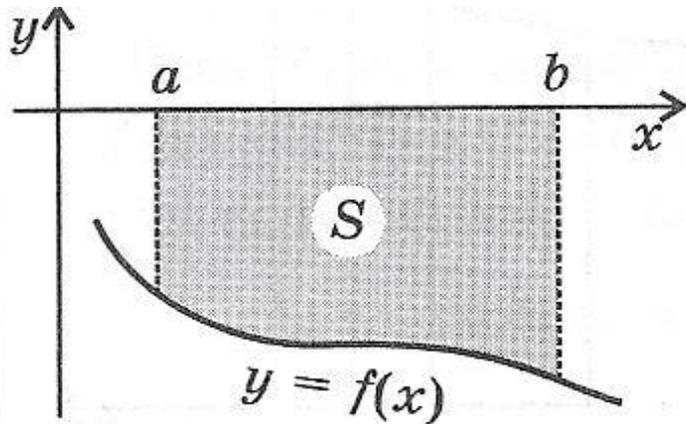
- Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной положительной на промежутке $[a;b]$ функции $f(x)$, осью x и прямыми $x=a$ и $x=b$:



$$S = \int_a^b f(x) dx$$

Геометрический смысл определенного интеграла

- Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной отрицательной на промежутке $[a;b]$ функции $f(x)$, осью x и прямыми $x=a$ и $x=b$:

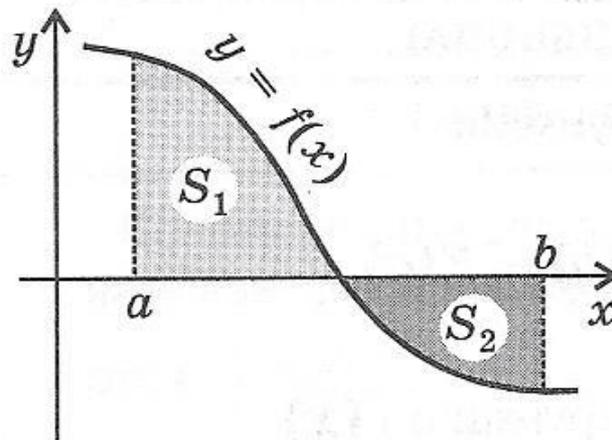


$$S = -\int_a^b f(x) dx$$

Геометрический смысл определенного интеграла

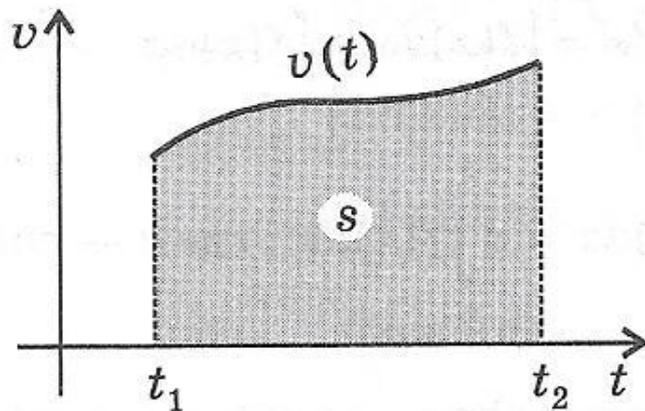
- **Замечание:** Если функция изменяет знак на промежутке $[a;b]$, то

$$S_1 - S_2 = \int_a^b f(x) dx$$



Физический смысл определенного интеграла

- При прямолинейном движении перемещение S численно равно площади криволинейной трапеции под графиком зависимости скорости v от времени t :



$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$

Пример

Вычислить определённый интеграл:

$$\int_{-2}^1 (3 - 2x - x^2) dx$$

Решение:

$$\int_{-2}^1 (3 - 2x - x^2) dx = 3x - x^2 - \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^1 =$$

$$= \left(3 \cdot 1 - 1^2 - \frac{1^3}{3} \right) - \left(3 \cdot (-2) - (-2)^2 - \frac{(-2)^3}{3} \right) = 9$$

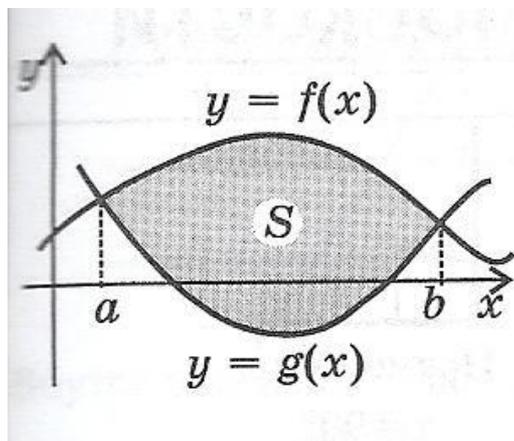
$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Вычисление площадей и объемов

с помощью определенного интеграла

Площадь фигуры,

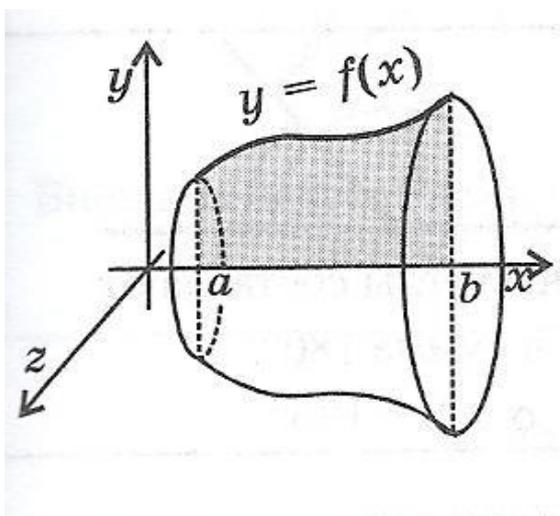
- Ограниченной графиками непрерывных функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$ таких, что $f(x) \geq g(x)$ для любого x из $[a;b]$, где a и b – абсциссы точек пересечения графиков функций:



$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

Объем тела,

- полученного в результате вращения вокруг оси X криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной и неотрицательной функции $y=f(x)$ на отрезке $[a;b]$:



$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$