

ГОТОВИМСЯ К ЕГЭ-2015

ПО МАТЕМАТИКЕ.

ЕГЭ- 2014.

ОСНОВНАЯ ВОЛНА 5.06.2014

ВАРИАНТ 1

ЧАСТЬ С

Учитель математики МБОУ СОШ № 143

г. Красноярск

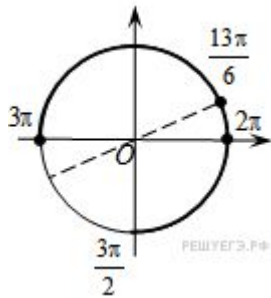
Князькина Т. В.

□ C1 а) Решите уравнение $2\sqrt{3}\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - \sin 2x = 0.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right].$

Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение $2\sqrt{3}\sin^2 x - 2\sin x \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin x(\sqrt{3}\sin x - \cos x) = 0 \Leftrightarrow$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0, \\ \operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k, \\ x = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right].$

Получим числа: $2\pi; \frac{13\pi}{6}; 3\pi.$

Ответ: а) $\pi k, \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$ б) $2\pi; \frac{13\pi}{6}; 3\pi.$



- **C2:** В треугольной пирамиде $MABC$ основанием является правильный треугольник ABC , ребро MB перпендикулярно плоскости основания, стороны основания равны 3, а ребро MB равно 6. На ребре AC находится точка D , на ребре AB точка E , а на ребре AM — точка L . Известно, что $AD = AL = 2$, и $BE = 1$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки E, D и L .

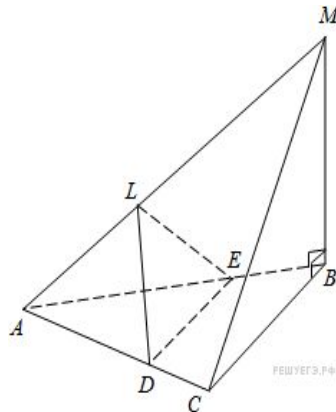
Решение.

Рассмотрим треугольники AMB и AMC : они прямоугольные, имеют общую сторону MB и равные стороны AB и BC , следовательно, эти треугольники равны по двум катетам, значит, $AM=MC=6$. Рассмотрим треугольник AMC воспользовавшись теоремой косинусов найдём косинус угла CAM :

$$\cos \angle CAM = \frac{AM^2 + AC^2 - MC^2}{2 \cdot AC \cdot AM} = \frac{36 + 9 - 36}{2 \cdot 3 \cdot 6} = \frac{1}{4}.$$

Из треугольника ADL найдем сторону LD : $LD = \sqrt{AD^2 + AL^2 - 2AL \cdot AD} = \sqrt{4 + 4 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4}} = \sqrt{6}.$

Рассмотрим прямоугольный треугольник AMB . Найдем косинус угла MAB : $\cos \angle MAB = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$



Из треугольника ALE найдем сторону LE :

$$LE = \sqrt{AL^2 + AE^2 - 2 \cdot AL \cdot AE} = \sqrt{4 + 4 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}} = 2.$$



В треугольнике ADE $AE=ED$, следовательно, он равнобедренный, углы при основании равны. Угол CAB равен 60° , значит $\angle ADE = \angle AED = 60^\circ$. Следовательно, $\triangle ADE$ - равносторонний, $AD=AE=DE=2$.

Опустим высоту EH в равнобедренном треугольнике LDE на основание LD . Найдем EH :

$$EH = \sqrt{LE^2 - \left(\frac{LD}{2}\right)^2} = \sqrt{4 - \frac{6}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

Треугольник DLE – искомое сечение, найдем его площадь:

$$S_{DLE} = \frac{1}{2}EH \cdot LD = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{10}}{2} \cdot \sqrt{6} = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{15}}{2}$.

Примечание. Площадь треугольника можно было найти по формуле Герона:

$$\begin{aligned} S_{DLE} &= \sqrt{\left(2 + \frac{\sqrt{6}}{2}\right) \left(2 + \frac{\sqrt{6}}{2} - 2\right) \left(2 + \frac{\sqrt{6}}{2} - 2\right) \left(2 + \frac{\sqrt{6}}{2} - \sqrt{6}\right)} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 \left(2 + \frac{\sqrt{6}}{2}\right) \left(2 - \frac{\sqrt{6}}{2}\right)} = \sqrt{\frac{6}{4} \left(4 - \frac{6}{4}\right)} = \frac{\sqrt{15}}{2}. \end{aligned}$$



□ С3 Решите систему неравенств:
$$\begin{cases} 36^{x-\frac{1}{2}} - 7 \cdot 6^{x-1} + 1 \geq 0, \\ x \cdot \log_4(5 - 3x - x^2) \geq 0. \end{cases}$$

Решение.

Решим первое неравенство системы. Пусть $t = 6^x$, тогда имеем:

$$\frac{1}{6}t^2 - \frac{7}{6}t + 1 \geq 0 \Leftrightarrow t^2 - 7t + 6 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 1, \\ t \geq 6, \end{cases}$$

откуда $\begin{cases} 6^x \leq 1, \\ 6^x \geq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0, \\ x \geq 1. \end{cases}$

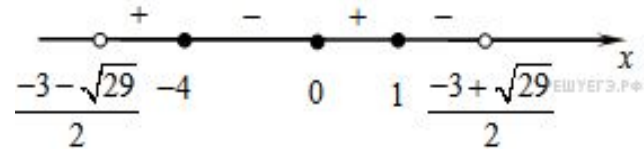
Решение первого неравенства $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$.

Решим второе неравенство методом интервалов. Поскольку корнями уравнения являются числа -4 и 1 , левая часть неравенства обращается в нуль в точках -4 , 0 и 1 . Учитывая, что

$$5 - 3x - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 5 < 0 \Leftrightarrow \frac{-3 - \sqrt{29}}{2} < x < \frac{-3 + \sqrt{29}}{2},$$



определим знаки левой части на ОДЗ (см. рис.):



Тем самым, ответ ко второму неравенству системы

$$\left(\frac{-3-\sqrt{29}}{2}; -4\right] \cup [0; 1].$$

Пересекая решения обоих неравенств, получаем ответ:

$$\left(\frac{-3-\sqrt{29}}{2}; -4\right] \cup \{0\} \cup \{1\}.$$

Ответ: $\left(\frac{-3-\sqrt{29}}{2}; -4\right] \cup \{0; 1\}.$

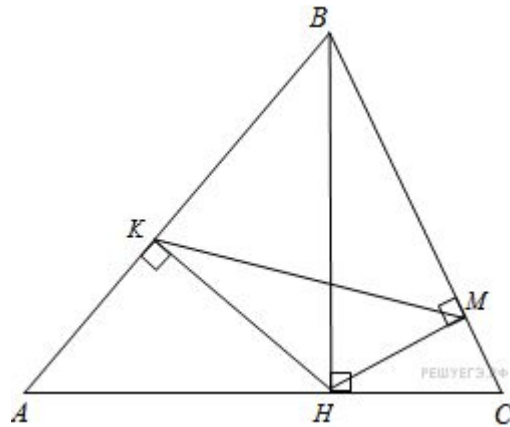
С4 В остроугольном треугольнике ABC провели высоту BH из точки H , на стороны AB и BC опустили перпендикуляры NK и NM соответственно.

а) Докажите, что треугольник MBK подобен треугольнику ABC .

б) Найдите отношение площади треугольника MBK к площади четырёхугольника $AKMC$, если $BH = 2$, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC равен 4.



Решение.



- а) Пусть угол $BAC = \alpha$. Углы BAC и KHB равны, как углы с взаимно перпендикулярными сторонами. Рассмотрим четырёхугольник $BKNM$, $\angle BKN + \angle BMN = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, следовательно, четырёхугольник $BKNM$ вписан в окружность. Значит, углы KHB и KMB — вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу, следовательно, они равны. Таким образом, $\angle BAC = \angle KHB = \angle KMB$.
- Треугольники ABC и MBK имеют общий угол B и $\angle BAC = \angle KMB$, значит, эти треугольники подобны по двум углам.



б) Из прямоугольного треугольника ВКН находим, что $BH = \frac{BK}{\sin \angle KHB}$.

Для треугольника АВС справедливо равенство $2R = \frac{BC}{\sin \angle BAC}$.

Учитывая, что $\angle KHB = \angle BAC$, получаем: $\frac{BC}{BK} = \frac{2R}{BH}$.

Стороны ВС и ВК- сходственные в подобных треугольниках АВС и МВК,

следовательно, их коэффициент подобия $k = \frac{BC}{BK} = \frac{2R}{BH} = 4$.

Найдем отношение площади треугольника МВК к площади четырехугольника АКМС:

$$\frac{S_{MBK}}{S_{AMKC}} = \frac{S_{MBK}}{S_{ABC} - S_{MBK}} = \frac{S_{MBK}}{k^2 S_{MBK} - S_{MBK}} = \frac{1}{k^2 - 1} = \frac{1}{16 - 1} = \frac{1}{15}.$$

Ответ: $\frac{1}{15}$.

С5 Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$(|x+2| + |x-a|)^2 - 5(|x+2| + |x-a|) + 3a(5-3a) = 0$$

имеет ровно два решения.

Решение.

Пусть тогда исходное уравнение принимает вид:

$$t^2 - 5t + 3a(5-3a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3a, \\ t = 5 - 3a \end{cases}$$



Откуда
$$\begin{cases} |x+2| + |x-a| = 3a, \\ |x+2| + |x-a| = 5-3a. \end{cases}$$

Значит, решение исходного уравнения – это решение уравнений $|x+2| + |x-a| = 3a$ или $|x+2| + |x-a| = 5-3a$. Исследуем сколько решений имеет уравнение $|x+2| + |x-a| = b$ в зависимости от a и b . Заметим, что слева стоит сумма модулей, то есть при $b < 0$ решений нет. Запишем уравнение в виде $|x+2| = -|x-a| + b$.

Левая часть этого уравнения- график модуля с вершиной в точке $(-2; 0)$, график правой части – график модуля, отраженный относительно оси Ox , с вершиной в Точке $(a;b)$. Это уравнение будет иметь два решения, если одновременно прямая $y = -x + a + b$ лежит правее прямой $y = -x - 2$ и прямая $y = x - a + b$ лежит левее прямой $y = x + 2$. Это достигается условиями $-x - a + b > -x - 2$ и $x + a + b > x + 2$. Таким образом, уравнение совокупности имеет два решения при условии

$$\begin{cases} a + b > -2, \\ a - b < -2, \\ b \geq 0. \end{cases}$$



□ Если вершина (a,b) находится внутри части плоскости отсекаемой графиком $y=|x+2|$, то уравнение имеет два решения, если прямые $y=-x-2$ и $y=-x+a+b$ совпадают или прямые $y=x+2$ и $y=x-a+b$ совпадают, то уравнение имеет бесконечно много решений, если вершина (a,b) совпадает с точкой $(-2; 0)$, то уравнение имеет одно решение.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два решения, если одно из уравнений совокупности имеет два решения, а второе не имеет решений, либо если каждое из уравнений совокупности имеет два решения, но эти решения совпадают.

Разберём каждый из этих случаев.

Первый случай. При $a+b > -2$ или $b-a < -2$, или $b < 0$ уравнение совокупности решений не имеет.

Таким

образом исходное уравнение имеет два решения, если первое уравнение имеет два решения, а второе — не имеет, либо наоборот. В случае, когда первое уравнение верно система условий имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} a+3a > -2, \\ a-3a < -2, \\ 3a \geq 0 \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} a+5-3a < -2, \\ a-5+3a > -2, \\ 5-3a < 0, \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} a > -\frac{1}{2}, \\ a > 1, \\ a \geq 0, \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} a > \frac{7}{2}, \\ a > \frac{3}{4}, \\ a > \frac{5}{3} \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow 1 < a < +\infty.$$



В случае, когда второе уравнение верно система условий имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} a + 3a < -2, \\ a - 3a > -2, \\ 3a < 0, \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} a + 5 - 3a > -2, \\ a - 5 + 3a < -2, \\ 5 - 3a \geq 0, \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} a > -\frac{1}{2}, \\ a < 1, \\ a < 0, \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} a < \frac{7}{2}, \\ a < \frac{7}{4}, \\ a \leq \frac{5}{3} \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow -\infty < a < \frac{3}{4}.$$

Второй случай. Решения совпадут, если совпадут уравнения, то есть. Если $3a=5-3a$, откуда $a=5/6$. При данном значении a оба уравнения принимают вид:

$$|x+2| + |x-a| = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}.$$

То есть уравнение имеет только одно решение при a равном $5/6$.

Таким образом, уравнение имеет ровно два решения при значениях a : $(-\infty; \frac{3}{4}) \cup (1; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; \frac{3}{4}) \cup (1; +\infty)$.



▣ С6 На сайте проводится опрос, кого из футболистов посетители сайта считают лучшим по итогам сезона. Каждый посетитель голосует за одного футболиста. На сайте отображается рейтинг каждого футболиста – доля голосов, отданных за него, в процентах, округленная до целого числа. Например, числа 9,3, 10,5 и 12,7 округляются до 9, 11 и 13 соответственно.

- а) Всего проголосовало 11 посетителей сайта. Мог ли рейтинг некоторого футболиста быть равным 38?
- б) Пусть посетители сайта отдавали голоса за одного из трех футболистов. Могло ли быть так, что все три футболиста получили разное число голосов, но их рейтинги одинаковы?
- в) На сайте отображалось, что рейтинг некоторого футболиста равен 5. Это число не изменилось и после того, как Вася отдал свой голос за этого футболиста. При каком наименьшем числе отданных за всех футболистов голосов, включая Васин голос, такое возможно?

Решение.

а) Пусть k — число посетителей, проголосовавших за футболиста. Заметим, что рейтинг футболиста будет равен 38, если доля голосов, отданных за него, лежит в пределах от 37,5% до 38,5%. Таким образом, получаем двойное неравенство:

$$\frac{37,5}{100} \leq \frac{k}{11} < \frac{38,5}{100} \Leftrightarrow 4,125 \leq k < 4,235.$$



Число k -целое, следовательно, оно не может лежать в полученном интервале.

б) Пусть число проголосовавших равно 999. Из них за первого футболиста-332 человека, за второго-333, за третьего-334. Тогда рейтинги каждого из них равны 33%.

в) Пусть k - число голосов, отданных за футболиста, включая Васин голос, n - общее число голосов. Заметим, что после того как Вася отдал свой голос за данного футболиста, доля голосов, отданных за этого футболиста увеличилась, а рейтинг нет, получаем:

$$\frac{4,5}{100} \leq \frac{k-1}{n-1} < \frac{k}{n} < \frac{5,5}{100}$$

Представляя в виде системы двух неравенств получим:

$$\begin{cases} \frac{9}{200} \leq \frac{k-1}{n-1}, \\ \frac{k}{n} < \frac{11}{200}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9n-9 \leq 200k-200, \\ 200k < 11n \end{cases} \Leftrightarrow 9n+191 \leq 200k < 11n \Leftrightarrow n > 95,5.$$

Так как n - целое число, то $n \geq 96$. Учитывая, что должны выполняться все неравенства системы, получим:

$$1055 \leq 9n + 191 \leq 200k \Leftrightarrow k > 5,275$$



Так как k -целое, то $k \geq 6$. Тогда из неравенства $200k < 11n$ получаем:

$$1200 \leq 200k < 11n \Leftrightarrow n > 109,09\dots$$

Следовательно, $n \geq 110$. Значит, минимальное число проголосовавших при условиях, данных в задаче равно 110.

Ответ: 110.

