

Элементы математического анализа

- Пусть даны две переменные x и y с областями изменения X и Y . Предположим, что переменной x может быть приписано произвольное значение из области X без каких-либо ограничений. Тогда переменная y называется функцией от переменной x в области её изменения X , если по некоторому правилу или закону каждому значению x из X ставится в соответствие одно определенное значение y из Y .

Независимая переменная x называется также аргументом функции.

Определение понятия функции

- Можно в определении понятия функции стать на более общую точку зрения, допуская, чтобы каждому значению x из X отвечало не одно, а несколько значений y (и даже бесконечное множество их). В подобных случаях функцию называют многозначной, в отличие от однозначной функции.

y есть функция от x .

Здесь буква ***f*** есть первая буква французского слова „*fonction*“, что значит: „функция“.

- $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=F(x)$ и т.п.
- ***Буквы $f, g, F, \dots$ характеризуют именно то правило, по которому получается значение x , отвечающее заданному y .***

■ Основные элементарные функции

- линейная функция $y=kx+b$
- показательная $a^x (0 < a \neq 1)$; ,
- логарифмическая $\log_a x (0 < a \neq 1)$; ,
- степенная $y=x^n$;
- тригонометрические $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$;
- обратные тригонометрические функции:
 $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$.

Пример 1.1. Найти область

определения функции $f(x) = \sqrt[4]{x^2 - 4}$

Решение. Известно, что корень четной степени определен только при неотрицательном подкоренном выражении. Таким образом, решая неравенство $x^2 - 4 \geq 0$

получаем, что $x \geq 2$

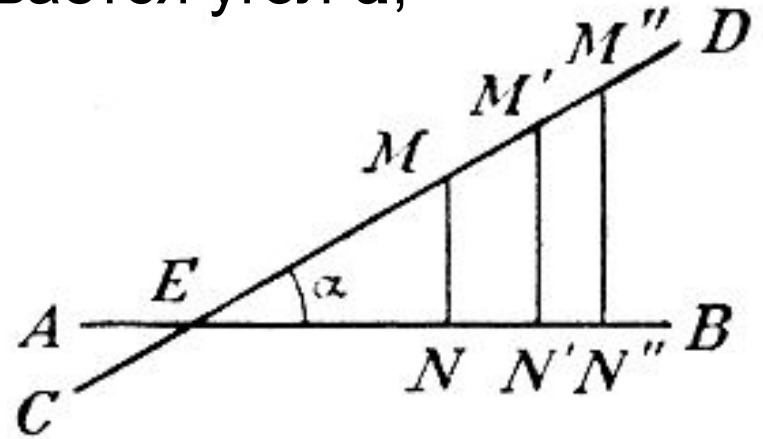
или $x \leq -2$

Поэтому $D(f) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

Подъем прямой

Подъемом какой-нибудь прямой **CD** по отношению к горизонтальной прямой **AB** называется угол α , образуемый этими прямыми.

Напр., говорят: „дорога идет в гору с подъемом в 5° “. Но чаще подъем выражается не самим углом α , а его тангенсом. Для нахождения величины тангенса вообразим, что на прямой **CD** мы взяли произвольную точку **M** и из нее провели $MN \perp AB$. Тогда из треугольника **MEN** находим: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{MN}{EN}$.

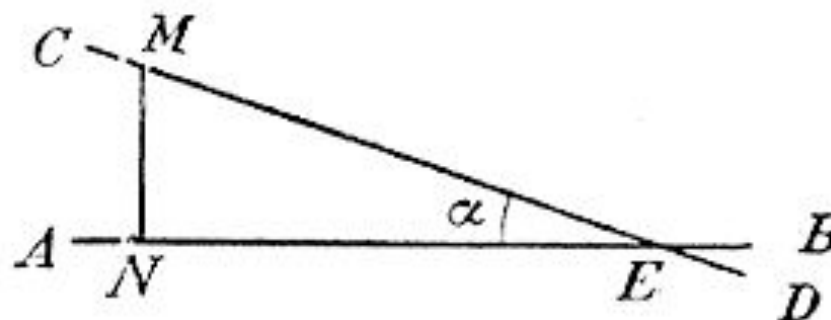


Точку **M** можно брать на прямой **CD** произвольно, так как если возьмем другие точки **M', M'', ...**, то, проведя перпендикуляры **M'N', M''N''**, мы получим подобные треугольники, из которых видно, что

$$\frac{MN}{EN} = \frac{M'N'}{EN'} = \frac{M''N''}{EN''} = \dots$$

Если, напр., $MN = \frac{1}{100} EN$, то и $M'N' = \frac{1}{100} EN'$, $M''N'' = \frac{1}{100} EN''$ и т. д.; тогда можно сказать, что подъем прямой **CD** равен $\frac{1}{100}$ (или что все равно - равен 1 метру на протяжении 100 метров по горизонтальному направлению).

На рисунке 2 изображена прямая **CD**, тоже наклонная к горизонтальной прямой **AB**, но идущая (слева направо) не в гору, а вниз. Тогда речь может идти не о подъеме прямой **CD**, а об ее уклоне.

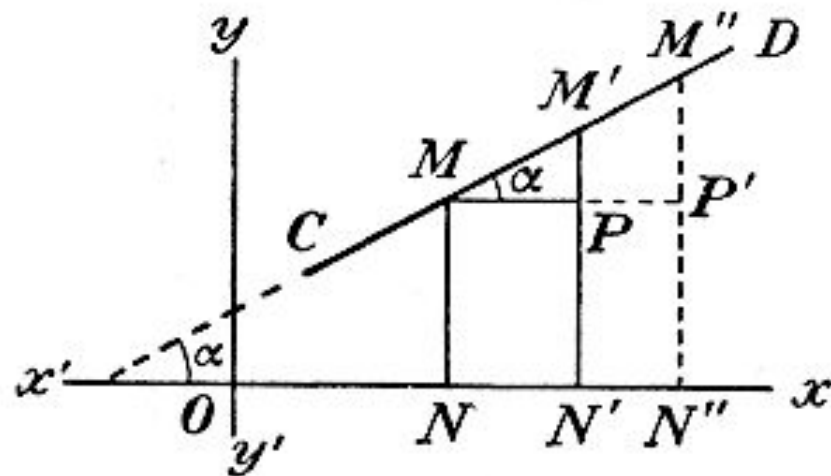


Уклон этот тоже измеряется чаще всего тангенсом угла α , образованного **CD** с **AB**, так что

$$\text{уклон} = \frac{MN}{EN}.$$

Можно условиться рассматривать уклон как отрицательный подъем; тогда, если $MN = 1/2 EN$, то можно сказать, что уклон прямой **CD** равен $1/2$, или — другими словами — что подъем прямой **CD** равен $-1/2$. Очевидно, что когда прямая **CD** не наклонна к **AB**, а параллельна ей или сливается с нею, тогда подъем равен нулю.

Положим теперь, что горизонтальная прямая будет ось Ox . Тогда подъем прямой CD будет тангенс угла α , образованного этой прямою (продолженной, если нужно) с положительным направлением оси Ox . Этот подъем можно найти и не продолжая CD до пересечения с осью Ox .

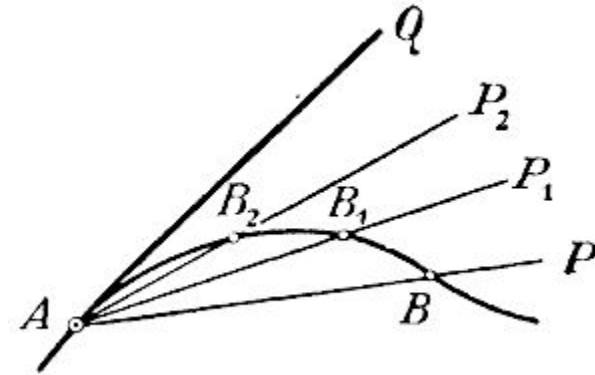


Для этого возьмем две какие-нибудь точки на прямой CD , напр.. M и M' , проведем их ординаты MN и $M'N'$ и прямую $MP \parallel Ox$. Тогда мы получим прямоугольный треугольник $MM'P$, у которого угол M равен α . Следовательно, подъем прямой CD равен отношению $M'P$ к MP . Отрезок MP , равный NN' , показывает, насколько увеличилась абсцисса ON при переходе от точки M к точке M' ; отрезок $M'P$ показывает, насколько при этом переходе увеличилась ордината MN . Значит, отрезок MP , равный NN' , есть приращение абсциссы Δx , полученное ею при переходе от точки M к точке M' , а $M'P$ —приращение ординаты Δy , соответствующее приращению абсциссы на NN' . Конечно, если абсциссе ON дадим иное приращение, напр. NN'' , то и ордината MN получит иное приращение $M''P'$, но тангенс угла α по-прежнему будет отношением $M''P'$ к NN'' . Таким образом:

$$\text{подъем прямой} = \frac{\text{приращение ординаты}}{\text{приращение абсциссы}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Общее определение касательной к кривой

Возьмем на кривой какие-нибудь 2 точки A и B и проведем через них секущую AP . Вообразим, что точка B , двигаясь по кривой, проходит через положения $B_1, B_2, \dots$ и приближается к точке A . Тогда секущая AP будет занимать последовательно положения $AP_1, AP_2, \dots$

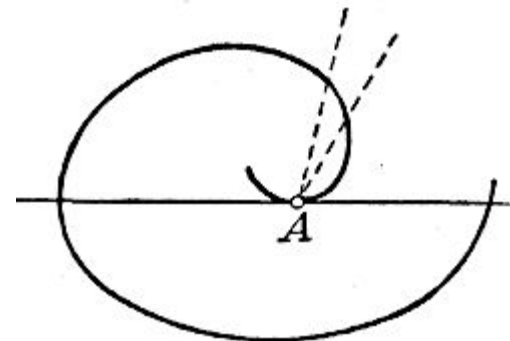


Если допустим, что точка B приближается к A неограниченно близко, то секущая приближается все более и более к некоторому предельному положению AQ так, что угол между прямою AQ и секущей делается и остается меньшим любого данного угла, как бы мал он ни был.

Это предельное положение секущей называется касательной к кривой в точке A .

Вспомним, что когда в геометрии говорилось о касательной к окружности, то там она определялась как такая прямая, которая с окружностью имеет только одну общую точку.

Это определение, верное относительно окружности, применимо однако не ко всякой кривой. Во-первых, прямая, имеющая с кривой только одну общую точку, может в этой точке пересекаться с кривой (незамкнутой, какова, напр., парабола); во-вторых, прямая—касающаяся кривой в какой-нибудь точке, может, кроме этой точки, иметь с кривою еще и другие общие точки (как это видно на чертеже).



Определение, рассматривающее касательную, как предельное положение секущей, есть общее определение *касательной*, так как оно применимо ко всякой кривой.

Пример. Прямая **CD** есть график такой линейной функции:

$$y = -\frac{1}{3}x + 2$$

Дадим абсциссе x произвольное значение, напр, $x = 4$; тогда функция y будет равна:

$$y = -\frac{1}{3} \cdot 4 + 2 = -\frac{4}{3} + 2 = \frac{2}{3}$$

Пусть теперь абсцисса **4** получит какое-нибудь приращение, напр. **1**. $\Delta x = 1$ Тогда ордината y будет:

$$y = -\frac{1}{3} \cdot 5 + 2 = -\frac{5}{3} + 2 = \frac{1}{3}$$

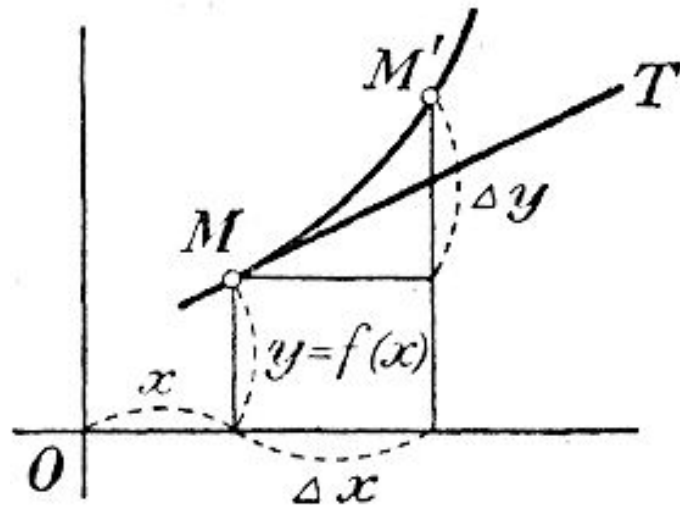
и, следовательно, приращение y окажется $\Delta y = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$

Поэтому

$$\text{подъем} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\frac{1}{3}}{1} = -\frac{1}{3}$$

Определение производной как предела отношения приращений

Пусть функция $y = f(x)$ изображена посредством координатных осей в виде кривой на рисунке и пусть на этой кривой взяты 2 точки $M(x, y)$ и $M'(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Тогда на участке кривой от точки M до M' средний подъем $= \Delta y / \Delta x$



Предел этого среднего подъема, когда $\Delta x \rightarrow 0$, есть подъем кривой в точке M (подъем касательной MT) и называется производной функцией от $f(x)$. Значит, мы можем написать: $f'(x) = \text{пред. } \Delta y / \Delta x$, если $\Delta x \rightarrow 0$.

Так как $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, то это равенство можно переписать так:

$$f'(x) = \text{пред. } \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad \text{если } \Delta x \rightarrow 0.$$

Опр. Производная функции $y=f(x)$ в точке x равна пределу отношения приращения этой функции $\Delta f(x)$ к приращению аргумента Δx при $\Delta x \rightarrow 0$

Пример вычисления производной по определению f'
Дано : $f(x) = x^2 + 1$.

Найдем $f'(x)$ в точке $x_0 = -2$, то есть $f'(-2)$.

Решение

$$\Delta f(x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$
$$f(x_0 + \Delta x) = f(-2 + \Delta x) = (-2 + \Delta x)^2 + 1 =$$

$$= 4 - 4\Delta x + \Delta x^2 + 1 = 5 - 4\Delta x + \Delta x^2$$

$$f(x_0) = (-2)^2 + 1 = 4 + 1 = 5$$

$$\Delta f(x) = 5 - 4\Delta x + \Delta x^2 - 5 = -4\Delta x + \Delta x^2$$

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{-4\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = -4 + \Delta x$$

Если $\Delta x \rightarrow 0$, то $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \rightarrow -4$, то есть $f'(x) = -4$.

Ответ : $f'(x) = -4$

Односторонние пределы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

Под **односторонним пределом** числовой функции подразумевают «приближение» к предельной точке с одной стороны. Такие пределы называют соответственно **левосторонним пределом** (или **пределом слева**) (рис. 1) и **правосторонним пределом** (**пределом справа**) (рис. 2).

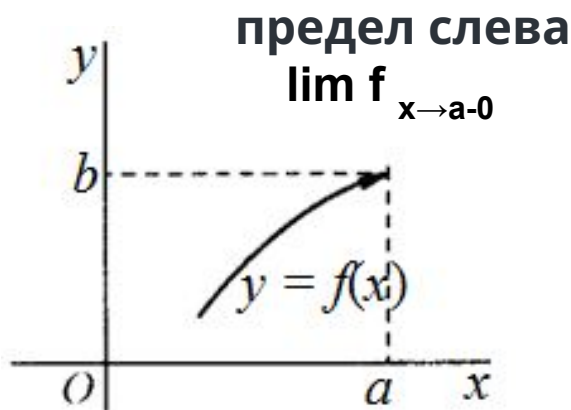


Рис. 1

предел справа
 $\lim_{x \rightarrow a+0} f$

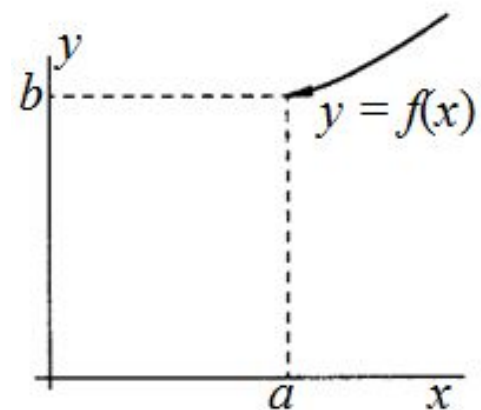


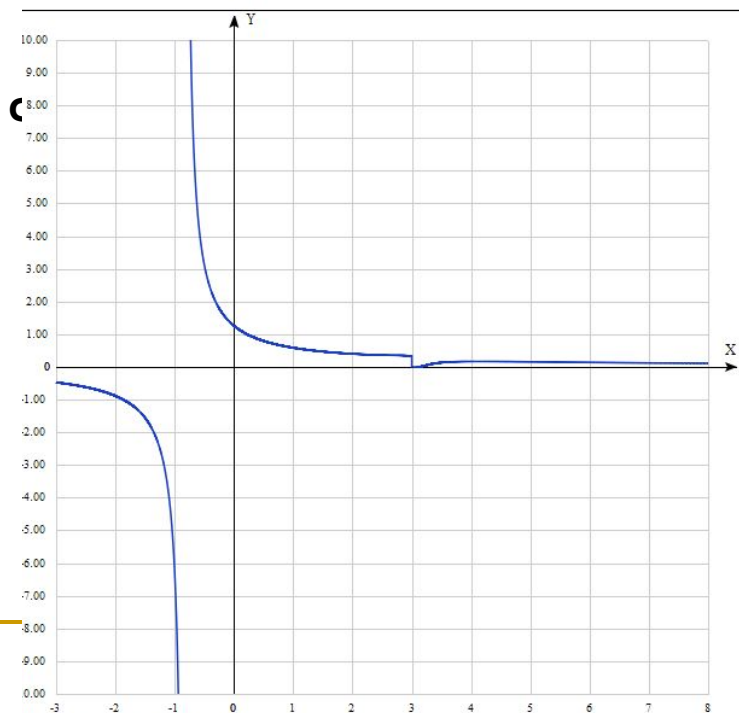
Рис.2

Односторонние пределы

Замечание. Основные свойства односторонних пределов схожи со свойствами обычных пределов.

ТЕОРЕМА Для существования (двустороннего) предела функции необходимо и достаточно, чтобы оба односторонних предела существовали и равнялись между собой.

- Найти левый и правый пределы $f(x) = \frac{1}{x+2x-3}$ в точке $x=3$



$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f = 1/3$$

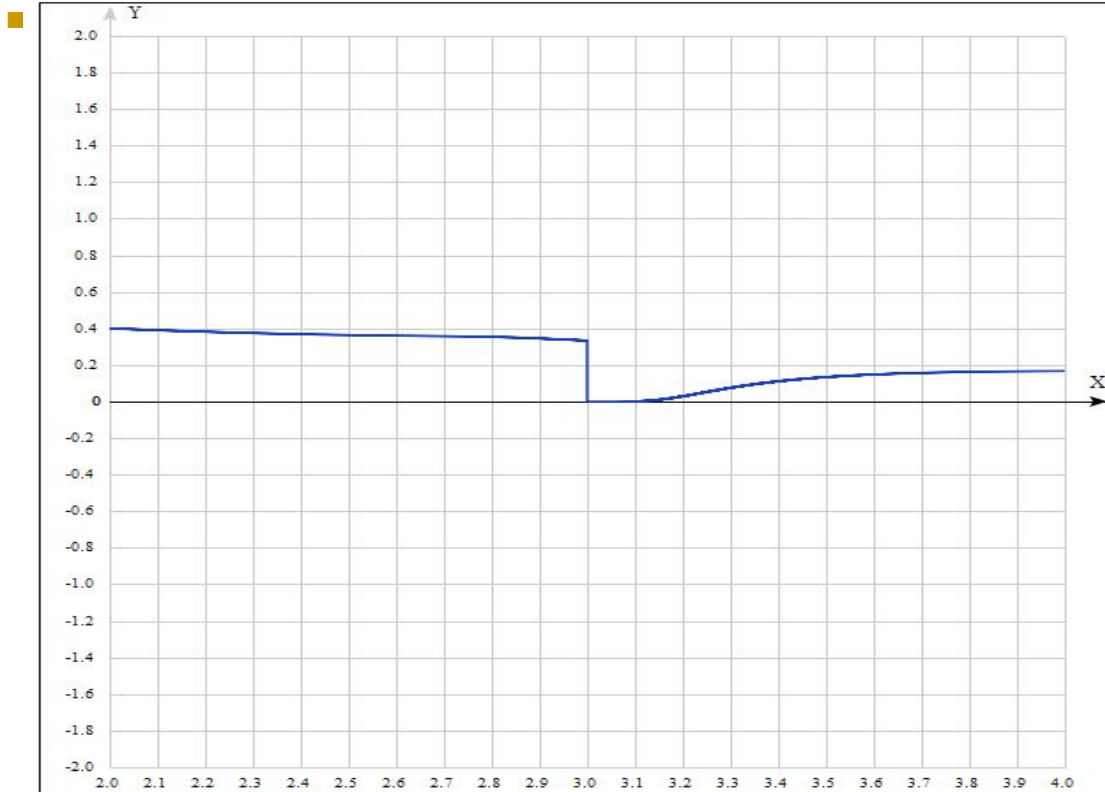
$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f = 0$$

$\lim_{x \rightarrow 3} f$ двусторонний предел
не существует

Функция

$$\varphi(x) = \frac{1}{x + \frac{1}{2x-3}} \quad \text{в точке } x=3$$

)



x	y
2.0	0.4
2.1	0.39
2.2	0.38
2.3	0.37
2.4	0.37
2.5	0.36
2.6	0.36
2.7	0.36
2.8	0.35
2.9	0.34
3.0	0
3.1	0
3.2	0.03
3.3	0.07
3.4	0.11
3.5	0.13
3.6	0.15
3.7	0.16
3.8	0.16
3.9	0.17
4.0	0.17

Производная от функции $y = ax^2$

Эта функция геометрически выражается параболой. Чтобы найти подъем этой параболы в точке с абсциссой x (рис.), дадим этой абсциссе приращение $\Delta x = h$; тогда ордината y получит приращение $\Delta y = a(x + h)^2 - ax^2 = ax^2 + 2ahx + ah^2 - ax^2 = 2ahx + ah^2$.

Следовательно, средний подъем параболы $y = ax^2$ на участке от точки с абсциссой x до точки с абсциссой $x + h$, будет

$$y' = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2ahx + ah^2}{h} = 2ax + ah.$$

Если $\Delta x = h \rightarrow 0$, то и $ah \rightarrow 0$, а $2ax$ остается без изменения; следовательно, подъем будет:

$$(ax^2)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2ax + ah) = 2ax.$$

Таким образом, производная от одночлена ax^2 равна показателю при x , умноженному на такой же одночлен, у которой только показатель уменьшен на 1. $(x^2)' = 2 \cdot x$

По формуле $(Cf(x))' = Cf'(x)$

$$(2 \cdot x^2)' = 2 \cdot 2x = 4x; \quad (3 \cdot x^2)' = 3 \cdot 2x = 6x.$$

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Функция, имеющая производную в некоторой точке, называется дифференцируемой в этой точке.

Операция нахождения производной данной функции называется дифференцированием обозначается с помощью штриха.

При нахождении производных применяются правила дифференцирования, например:

$$C' = 0 \quad (Cf(x))' = Cf'(x) \quad (2.3)$$

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Функции одного переменного. При нахождении производных применяются правила дифференцирования:

$$\left(f(x) + g(x)\right)' = f'(x) + g'(x) \quad (2.1)$$

$$\left(f(x)g(x)\right)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad (2.2)$$

$$C' = 0 \quad \left(Cf(x)\right)' = Cf'(x) \quad (2.3)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)} \quad (2.4)$$

Сложная функция

Опред. Если y зависит от x через посредство промежуточного аргумента u , то y называется сложной функцией от x .

Примеры. $y = (1 + 5x)^3$, $u = 1 + 5x$, $y = u^3$

$y = \sin 4x$, $u = 4x$, $y = \sin u$

Для сложной функции $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$
 $(f(\varphi(x)))' = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$

$$y' = ((1 + 5x)^3)' = 3 \cdot u^2 \cdot (1 + 5x)' = 3 \cdot (1 + 5x)^2 \cdot 5 = 15 \cdot (1 + 5x)^2$$

$$y' = (\sin 4x)' = (\sin u)' = \cos u \cdot u' = \cos 4x \cdot 4 = 4 \cos 4x$$

$$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u' \quad (\sin u)' = \cos u \cdot u' \quad (\cos u)' = -\sin u \cdot u'$$

Найти производную функции по определению $y = \sin x$

Используя определение производной, получаем

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}. \text{ Применим тригонометрическое тождество}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } y'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin\left(\frac{x + \Delta x - x}{2}\right) \cos\left(\frac{x + \Delta x + x}{2}\right)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cos\left(\frac{2x + \Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} \end{aligned}$$

*

$$* \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right). \text{ Первый предел в данном выражении равен}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\frac{\Delta x}{2} \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} = 1 \text{ (Первый замечательный предел)}$$

Поскольку $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x$, то для производной синуса получаем окончательное выражение: $y'(x) = (\sin x)' = \cos x$.

Таблица основных производных

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad x' = 1$	$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$
$(\cos x)' = -\sin x;$ $(\sin x)' = \cos x$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$ $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad (\operatorname{ctg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$	$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}; \quad (\operatorname{ctg} u)' = \frac{-u'}{\sin^2 u}$
$(a^x)' = a^x \ln a, \quad (e^x)' = e^x$	$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u', \quad (e^u)' = e^u u'$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}, \quad (\ln u)' = \frac{u'}{u}$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$(\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos u)' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$	$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2};$
$(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arcctg} u)' = \frac{-u'}{1+u^2}$

сайт для заочников

http://www.mathprofi.ru/proizvodnaya_slozhnoi_funkcii.html

Пример 2.1. Найти производную функции $y = \frac{\sqrt{x}}{x^2 - 1}$

- **Решение.** Применим формулы [\(2.4\)](#), [\(2.1\)](#) и (дважды) формулу производной степенной функции:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sqrt{x}}{x^2 - 1}\right)' &= \frac{(x^{1/2})'(x^2 - 1) - (x^2 - 1)'\sqrt{x}}{(x^2 - 1)^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2 - 1) - 2x\sqrt{x}}{(x^2 - 1)^2} = \\ &= \frac{x^2 - 1 - 4x^2}{2\sqrt{x}(x^2 - 1)^2} = -\frac{1 + 3x^2}{2\sqrt{x}(x^2 - 1)^2}.\end{aligned}$$

Пример 2.2. Найти производную функции $y = x \cos(3x)$

Решение. Сначала воспользуемся формулой (2.2) и табличной производной косинуса для сложной функции:

$$\begin{aligned} y' &= x' \cos 3x + x(\cos 3x)' = 1 \cdot \cos 3x + x \cdot (-\sin 3x) \cdot (3x)' = \\ &= \cos 3x - 3x \sin 3x. \end{aligned}$$

Пример 2.3. Найти в точке $x = 0$ производную функции

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{3e^{4x} + 5}}$$

- **Решение.** Предварительно «подготовим» функцию к дифференцированию

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{3e^{4x} + 5}} = (3e^{4x} + 5)^{-1/3}$$

Теперь воспользуемся формулами производных степенной функции и функции $y = e^u$

(из таблицы), а также формулами (2.1), (2.3):

$$\begin{aligned} f'(x) &= ((3e^{4x} + 5)^{-1/3})' = -\frac{1}{3} (3e^{4x} + 5)^{-4/3} (3e^{4x} + 5)' = \\ &= \frac{-3 \cdot e^{4x} \cdot (4x)'}{3(3e^{4x} + 5)^{4/3}} = \frac{-4e^{4x}}{(3e^{4x} + 5)^{4/3}}. \end{aligned}$$

Подставляем значение $x = 0$ и получаем:

$$f'(0) = \frac{-4}{(3+5)^{4/3}} = \frac{-4}{(2^3)^{4/3}} = \frac{-4}{2^4} = -\frac{1}{4}$$

Пример 2.4. Для $f(x) = \sqrt{3x - 2}$
найти вторую производную ($f''(x)$).

■ **Решение.** Сначала найдем первую производную:

$$f'(x) = \left((3x - 2)^{1/2} \right)' = \frac{1}{2} (3x - 2)^{-1/2} (3x - 2)' = \frac{3}{2} (3x - 2)^{-1/2}.$$

Далее воспользуемся тем,
что

$$\underline{\underline{f''(x) = (f'(x))'}}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{3}{2} (3x - 2)^{-1/2} \right)' = \frac{3}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) (3x - 2)^{-3/2} (3x - 2)' = \\ &= -\frac{3 \cdot 3}{4 \cdot \sqrt{(3x - 2)^3}}. \end{aligned}$$

Найти производные функций

- $y = x^2 - 4x + 3$

- $y = (\sin x)^3$

- $y = \sin(x^3)$

- $y = \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}, y(1)$

- $y = x \sin x$

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ОПТИМИЗАЦИИ

ЭКСТРЕМУМЫ функции одного переменного

Пусть $D(f)$ – область определения функции $y = f(x)$
и $x_0 \in D(f)$

Если для всех x из некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0) = M$ (или $f(x) \geq f(x_0) = m$), то число M (m) называется **локальным максимумом** (или **локальным минимумом**) функции, а сама точка – точкой локального максимума (локального минимума). Оба числа объединяются термином **«экстремум функции»** (соответственно, говорят и о **«точках экстремума»**).

При поиске экстремумов и точек экстремума функции придерживаются следующей схемы рассуждений.

- 1) Установить область определения функции . $y = f(x)$
- 2) Найти ее производную $f'(x)$
- 3) Проверить необходимое условие экстремума, т.е. выяснить, в каких точках из области определения функции производная обращается в нуль (решить уравнение $f'(x) = 0$)
Такие точки называются **стационарными**. Найти значения x , при которых функция определена, а производная – нет (совокупность таких точек и стационарных называется **множеством критических точек**).
- 4) Определить знак производной на числовых интервалах, на которые стационарные и критические точки разбили область определения.
- 5) Проверить достаточное условие экстремума: *если при переходе через найденную точку производная знак не меняет, то x_0 не является точкой экстремума; если слева от x_0 $f'(x) > 0$ а справа $f'(x) < 0$ то x_0 - точка максимума исходной функции и $f_{\max} = f(x_0)$ и наоборот.*

При поиске экстремумов и точек экстремума функции придерживаются следующей схемы рассуждений.

- 5) Проверить достаточное условие экстремума: если при переходе через найденную точку производная знак не меняет, то x_0 не является точкой экстремума; если слева от x_0 $f'(x) > 0$, а справа $f'(x) < 0$ то x_0 - точка максимума исходной функции и $J_{\max} = f(x_0)$ и наоборот.
- Если функция возрастает, т.е. угол наклона касательной к графику функции - острый $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha > 0$, а если функция убывает, то $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha < 0$ и угол наклона касательной тупой.
- Найти интервал возрастания и убывания (монотонности) функции $f(x) = x^3 - 7,5x^2 + 18x$ и точки экстремума
- Найти точки экстремума функции $f(x) = (x-2) \cdot e^x$

Пример 8.2. Найти экстремумы

функции $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

- Данная функция определена для всех действительных чисел, ее производная имеет вид $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$
- При этом производная не определена там, где в нуль обращается знаменатель, т.е. при $x=0$. Эта точка является критической. Стационарных точек нет, так как в числителе стоит постоянное число, и потому дробь не обращается в нуль. Учитывая, что знак производной совпадает со знаком $\sqrt[3]{x}$, а потому и со знаком x , получаем, что слева от $x=0$ (там, где $x<0$) $f'(x) < 0$ справа $f'(x) > 0$. Поэтому $x=0$ – точка минимума исходной функции, и $f_{\min} = f(0) = 0$

Наибольшее и наименьшее значение функции одного переменного на числовом интервале

- **Теорема 8.1.** Если функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на числовом отрезке $[a;b]$, то она достигает своих максимального и минимального значений в точках этого отрезка, т. е. существует $x_1 \in [a,b]$ и $x_2 \in [a,b]$ такие, что

$$\min_{x \in [a;b]} f(x) = f(x_1) \quad \max_{x \in [a;b]} f(x) = f(x_2)$$

- Теорема 8.1 позволяет построить *алгоритм решения задачи на поиск наибольшего и наименьшего значения функции , определенной и непрерывной на заданном отрезке $[a;b]$. Этот алгоритм заключается в следующем.*
 - 1) Найти производную $f'(x)$
 - 2) Найти стационарные и критические точки и выбрать те из них, которые попадают в отрезок $[a;b]$.
 - 3) Сравнить значения функции в найденных точках и на границах (т.е. в точках $x=a$, $x=b$), выбрать наибольшее и наименьшее значения.
Характер экстремума не определять.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=x^3-2x^2+x-2$ на заданном отрезке $[0,5;2]$.

Асимптоты

- Асимптотой для функции $y=f(x)$ называется прямая, к которой неограниченно (не пересекая) приближается кривая графика функции.

Функция может иметь

- вертикальную асимптоту $x=a$, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ (может, слева или справа),
- наклонную асимптоту $y=kx+b$, если существуют конечные числа k и b

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - kx$$

- горизонтальную $y=b$, если $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$

Горизонтальная асимптота – частный случай наклонной при $k=0$

Найти асимптоты функции $y=1/(x-2)$

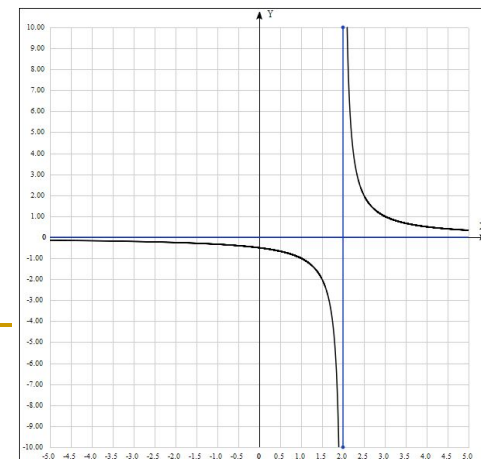
$$1) \lim_{x \rightarrow 2} f(x) : \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{1}{x-2} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{1}{x-2} = +\infty$$

Значит $x=2$ вертикальная асимптота.

$$2) \quad k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \quad k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x-2} : x \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(x-2)x} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - k \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x-2} = 0$$

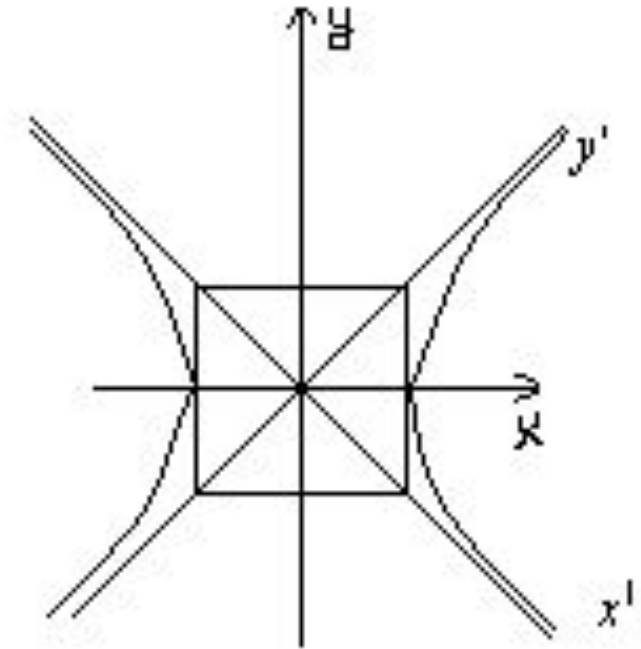
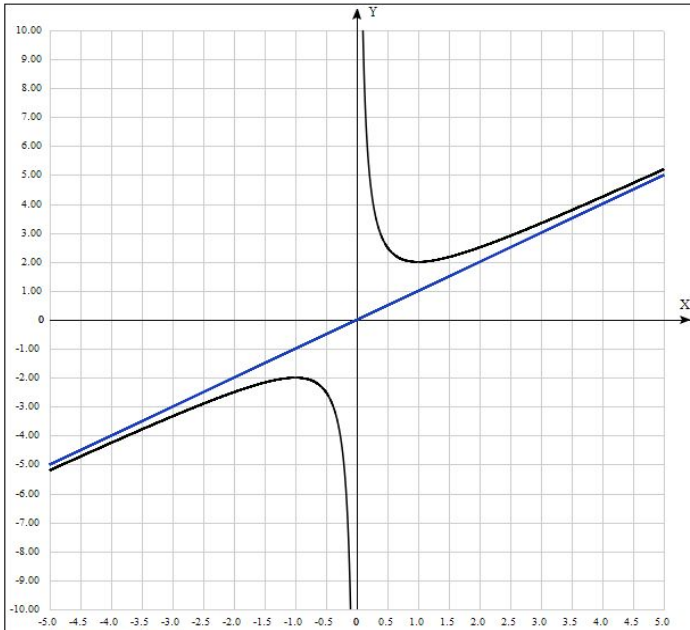
Значит $y=kx+b=0 \cdot x+0=0$, т.е. $y=0$ горизонтальная асимптота.



Найти асимптоты функции $y=(x^2+1)/x$

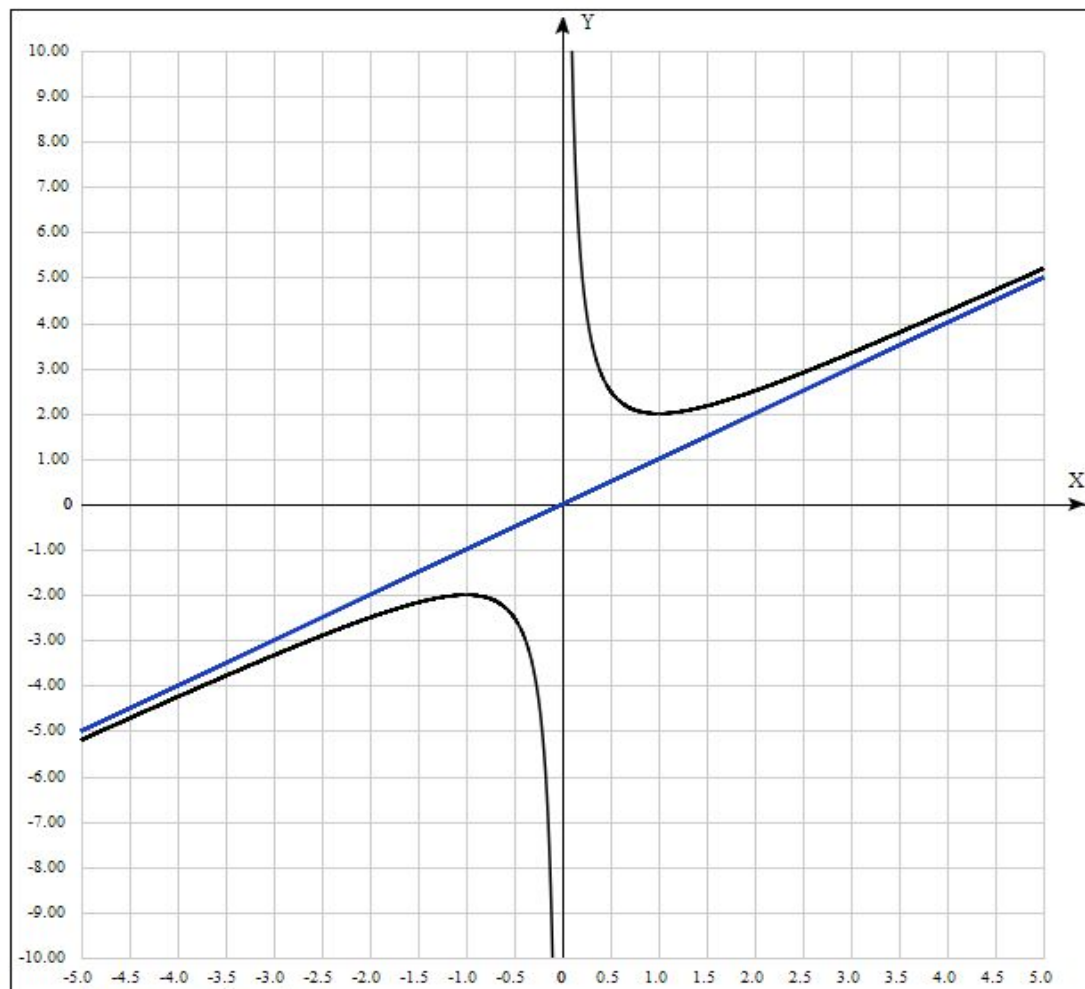
- Найти асимптоты функции $x^2-y^2=a^2$

Найти асимптоты функции $y=(x^2+1)/x$



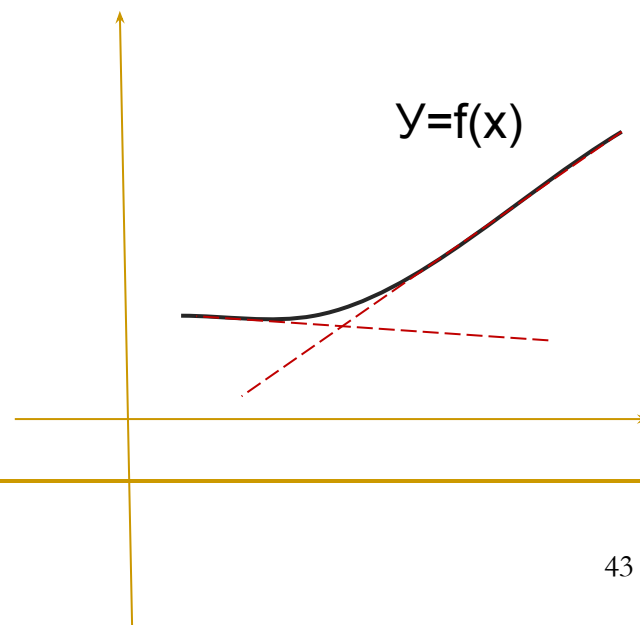
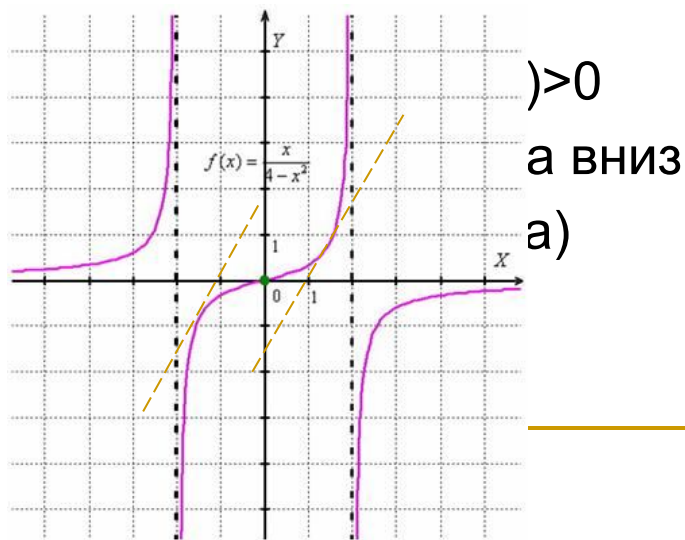
Найти асимптоты функции $x^2-y^2=a^2$

Найти асимптоты функции $y=(x^2+1)/x$



Вычисление второй производной функции и с ее помощью выяснение выпуклости вверх (вогнутости вниз), нахождение точек перегиба

- График функции имеет на интервале выпуклость, направленную вверх, если он расположен не выше любых касательных, проведенных к графику функции. ($f''(x) < 0$)
- Критические точки – точки графика, для которых вторая производная функции равна 0.
- В точке перегиба касательная пересекает график функции, так как он переходит с одной стороны касательной на другую, перегибаясь через нее.

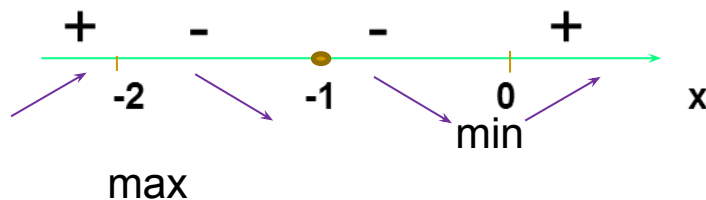


Исследование функции производится по схеме:

- 1) Область определения.
- 2) Область значений функции.
- 3) Нули функции.
- 4) Четность (нечетность).
- 5) Периодичность.
- 6) Вычисление первой производной и с ее помощью нахождение промежутков возрастания (убывания) функции, точек экстремума.
- 7) Вычисление второй производной функции и с ее помощью выяснение выпуклости вверх (вогнутости вниз), нахождение точек перегиба.
- 8) Нахождении асимптот графика.

Исследовать функцию $y = \frac{x^2}{1+x}$

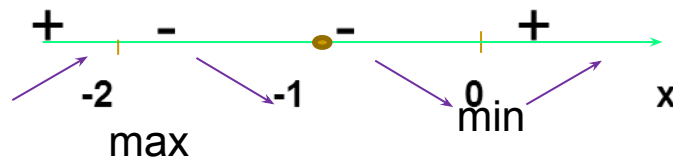
- 1) Область определения $x \neq -1$. При $x \rightarrow -1$ $y \rightarrow \infty$, значит $x = -1$ вертикальная асимптота.
- 2) Область значений функции. $(-\infty; +\infty)$
- 3) Нули функции. $y = \frac{x^2}{1+x} = 0$ при $x = 0$.
- 4) Четность (нечетность) $y(-x) = \frac{x^2}{1-x}$ функция общего вида.
- 5) $y' = \left(\frac{x^2}{1+x}\right)' = \frac{(1+x) - x^2}{(1+x)^2} = \frac{2x + 2x^2 - x^2}{(1+x)^2} = \frac{2x + x^2}{(1+x)^2} = \frac{x(x+2)}{(1+x)^2}$ $y' = 0$ при $x = 0$ и $x = -2$. y' не существует при $x = -1$. $y_{\max}(-2) = -4$, $y_{\min}(0) = 0$



$$y = \frac{x^2}{1+x}$$

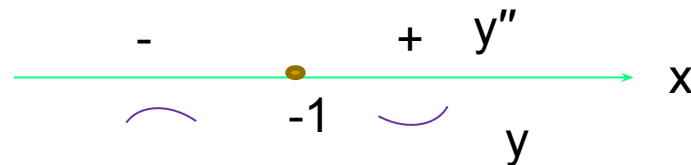
4) Четность (нечетность) $y(-x) = \frac{x^2}{1-x}$ функция общего вида.

5) $y' = \left(\frac{x^2}{1+x}\right)' = \frac{(1+x) - x^2}{(1+x)^2} = \frac{2x + 2x^2 - x^2}{(1+x)^2} = \frac{2x + x^2}{(1+x)^2} = \frac{x(x+2)}{(1+x)^2}$ $y' = 0$ при $x = 0$ и $x = -2$. y' не существует при $x = -1$. $y_{\max}(-2) = -4$, $y_{\min}(0) = 0$



$$6) y'' = \left(\frac{x(x+2)}{(1+x)^2}\right)' = \frac{(1+x)^2(2+2x) - (2x+x^2)2(1+x)}{(1+x)^4} = \frac{2+4x+2x^2-4x-2x^2}{(1+x)^3} = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$y'' > 0$ при $x > -1$ и $x < -1$



$$y = \frac{x^2}{1+x}$$

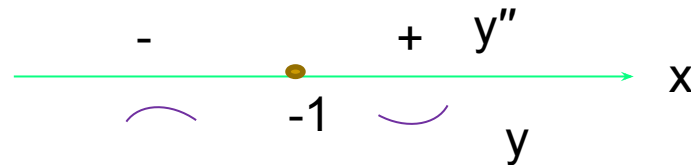
7) Ищем наклонную асимптоту: $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(1+x)x} = 1$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - kx = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{1+x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{1+x} = -1$$

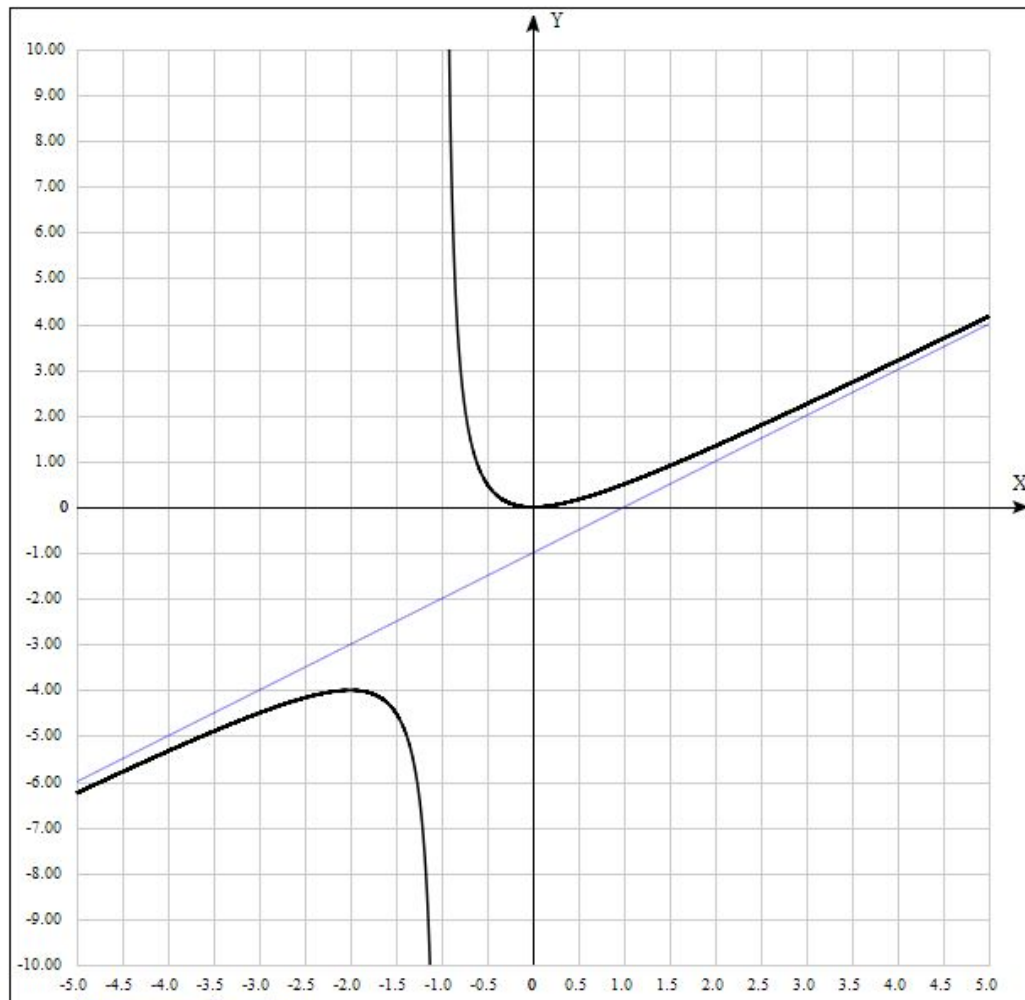
Итак, $y = kx + b = x - 1$ наклонная асимптота

$$6) y'' = \left(\frac{x(x+2)}{(1+x)^2} \right)' = \frac{(1+x)^2(2+2x) - (2x+x^2)2(1+x)}{(1+x)^4} = \frac{2+4x+2x^2-4x-2x^2}{(1+x)^3} = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$y'' > 0$ при $x > -1$ и $x < -1$



Строим график $y = \frac{x^2}{1+x}$



ДЗ:

- Всем: Исследовать функцию $y = 0,2x^3 + 0,5x^2 - 2x + 1$
- Посложнее: Исследовать функцию $y = \frac{x^2}{x+2}$
- Простая: Исследовать функцию $y = 5x - 4x^2 + 3$

- Следующее занятие по математическому анализу через неделю во вторник 24.01 в 9.00 (одна пара)