Тема 7

Решение обыкновенных дифференциальных уравнений.

Уравнение, содержащее производные от искомой функции y = y(x), называется ***обыкновенным дифференциальным уравнением*** (ОДУ).

Общий вид дифференциального уравнения:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \qquad (7.1)$$

где n – наивысший порядок производной, определяет ***порядок уравнения***.

Решением ОДУ называется функция y = y(x), которая после ее подстановки в уравнение (7.1) обращает его в тождество.

Общее решение ОДУ имеет вид:

$$y = y(x, C_1, C_2, ..., C_n) \qquad (7.2)$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – постоянные интегрирования.

Частное решение получается из общего при конкретных значениях C_i, $i = \overline{1, n}$. Эти значения определяются из n ***дополнительных условий***. В качестве таких условий могут быть заданы значения функции и ее производных при некоторых значениях аргумента x, иначе говоря, в некоторых точках.

В зависимости от того, как заданы эти дополнительные условия, выделяют 2 типа задач:

- **Задача Коши.** Все условия заданы в одной, ***начальной точке***, поэтому они называются ***начальными условиями***.
- **Краевая задача.** Условия заданы в более чем одной точке, обычно в начальной и конечной. Условия в этом случае называются ***краевыми*** или *граничными*. **Такая задача может возникнуть только при решении ОДУ с порядком выше первого**.

Разработано множество методов решения подобных задач:

1. **Графические методы**. Например, метод изоклин - путем графических построений находят точки исходной функции и строят ее график.
2. **Аналитические методы** позволяют получить формулу исходной функции путем аналитических преобразований.
3. **Приближенные методы** позволяют получить приближенное аналитическое решение в результате принятых упрощений. К приближенным относятся асимптотические методы и метод малых возмущений.
4. **Численные методы** позволяют получить <u>**таблицу приближенных значений**</u> искомой функции для ряда <u>**заранее выбранных**</u> значений ее аргумента.

На практике чаще всего применяются численные методы: они просты в использовании и не имеют ограничений.

Задача решения ОДУ 1-го порядка (задача Коши) формулируется следующим образом:

Найти $y = y(x)$, удовлетворяющую уравнению

$$y' = f(x,y) \qquad (7.3)$$

для $x \in [a,b]$ при заданном начальном условии $y(a) = y_0$.

Рассмотрим численные методы решения этой задачи.

7.1. Метод Эйлера (метод Рунге-Кутта 1-го порядка).

Разобьем [a, b] на n равных частей – ***элементарных отрезков***, $x_0, x_1, \ldots, x_n$ будем называть ***узлами сетки***, h = (b-a)/n - ***шаг сетки***.

Очевидно, что $x_i = a + i \cdot h$, $i = \overline{0, 1, \ldots, n}$; $x_0 = a$, $x_n = b$.

Заменим в уравнении (7.1) y' в точке x_i её приближенной оценкой – отношением приращений (это следует из определения производной):

$$y'_i \approx \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$$

Тогда получаем:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} \approx f(x_i, y_i)$$

Отсюда формула Эйлера:

$$y_{i+1} \approx y_i + h \cdot f(x_i, y_i) \qquad (7.4)$$

$x_i = a + i \cdot h$, $\quad i = \overline{0,1,\dots, n-1}$ – номер узла

Зная y_0 в точке x_0 (начальное условие) можно найти y_1, затем, используя уже известные значения x_1 и y_1, вычислить x_2 и y_2 и так далее.

Рассмотрим геометрическую иллюстрацию метода Эйлера. В координатах (x,y) отобразим известные данные: отрезок [a,b] на оси X и начальное условие y_0 – точка A с координатами (a, y_0). Отрезок [a,b] разобьем на n равных частей, получим узлы равномерной сетки $a = x_0, x_1, x_2, \ldots , x_n = b$. Вычислим значения первой производной искомой функции в точке A, используя координату этой точки и исходное уравнение (7.3)

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0) = \mathrm{tg}\alpha_0$$

Полученное значение позволяет построить касательную к искомой функции в точке А. Эту касательную можно использовать для вычисления приближенного значения искомой функции в новом узле x_1 (кривую $y(x)$ заменяем на отрезком АВ на элементарном отрезке $[x_0, x_1]$).

$$y_1 = y_0 + BC =$$
$$y_0 + h*tg\alpha_0 =$$
$$y_0 + h*f(x_0,y_0)$$

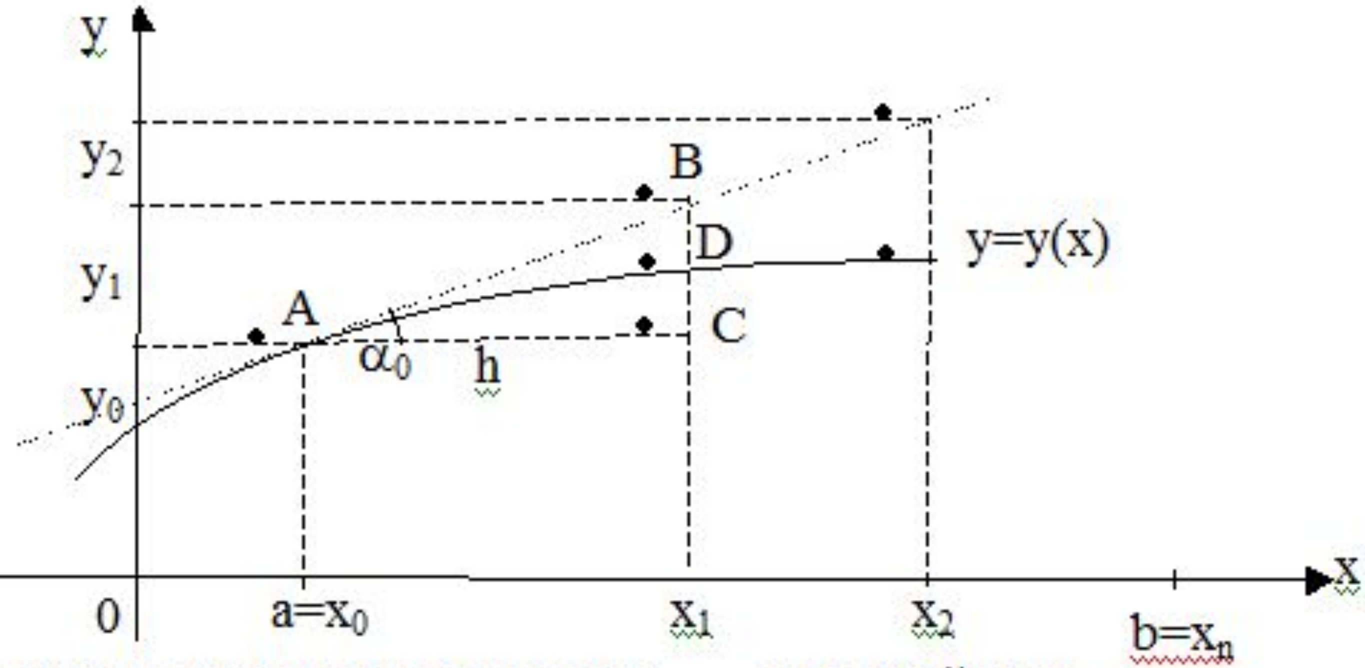


Рис. 7.1. Геометрическая иллюстра етода Эйлера.

Зная (x_1,y_1), можно аналогично получить новую точку (x_2,y_2) и т.д.
Из геометрической иллюстрации следует, что:

1. На каждом шаге есть погрешность (на рисунке это отрезок BD). **Погрешность тем больше, чем больше шаг**.
2. Ошибка может накапливаться.

Формула Эйлера (7.4) имеет погрешность метода $\delta_{\text{M}} = \text{O}(\text{h}^2)$

Для практического выбора h с целью обеспечения заданной точности решения задачи ε применяется следующий прием.

Выполняются 2 расчета: с n и 2n узлами. Если полученные значения функции в во всех узлах отличаются не более чем на ε, задача считается решенной. Если нет, число узлов вновь удваивают и опять сравнивают полученные значения функций.

Таким образом, расчет продолжается до достижения условия

$$\delta = \max_{i=\overline{1,n}} | y_i^n - y_i^{2n} | \le \varepsilon \qquad (7.5)$$

Значение n может достигать большой величины – более 1000. Чтобы не печатать столько значений функции, в алгоритме решения ОДУ методом Эйлера нужно предусмотреть печать не всех рассчитанных значений, а только части их, например, 10-ти значений, распределенных равномерно по всему отрезку.

Рис. 7.2. Алгоритм расчета новой точки методом Эйлера:

Пример 7.1. Дано уравнение $y' - 2y + x^2 = 1$

Найти решение для отрезка [0; 1], если y(0) = 1.

Выберем n = 10, тогда шаг h =(1-0)/10 = 0,1.

Запишем уравнение в каноническом виде $y' = f(x,y) = 1 + 2y - x^2$

Начальная точка $x_0 = 0$, $y_0 = 1$.

Вычислим первую точку

$$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0; y_0) = 1 + 0{,}1 \cdot f(0;\ 1) = 1 + 0{,}1 \cdot (1 + 2 \cdot 1 - 0^2) = 1 + 0{,}1 \cdot 3 = 1{,}3$$

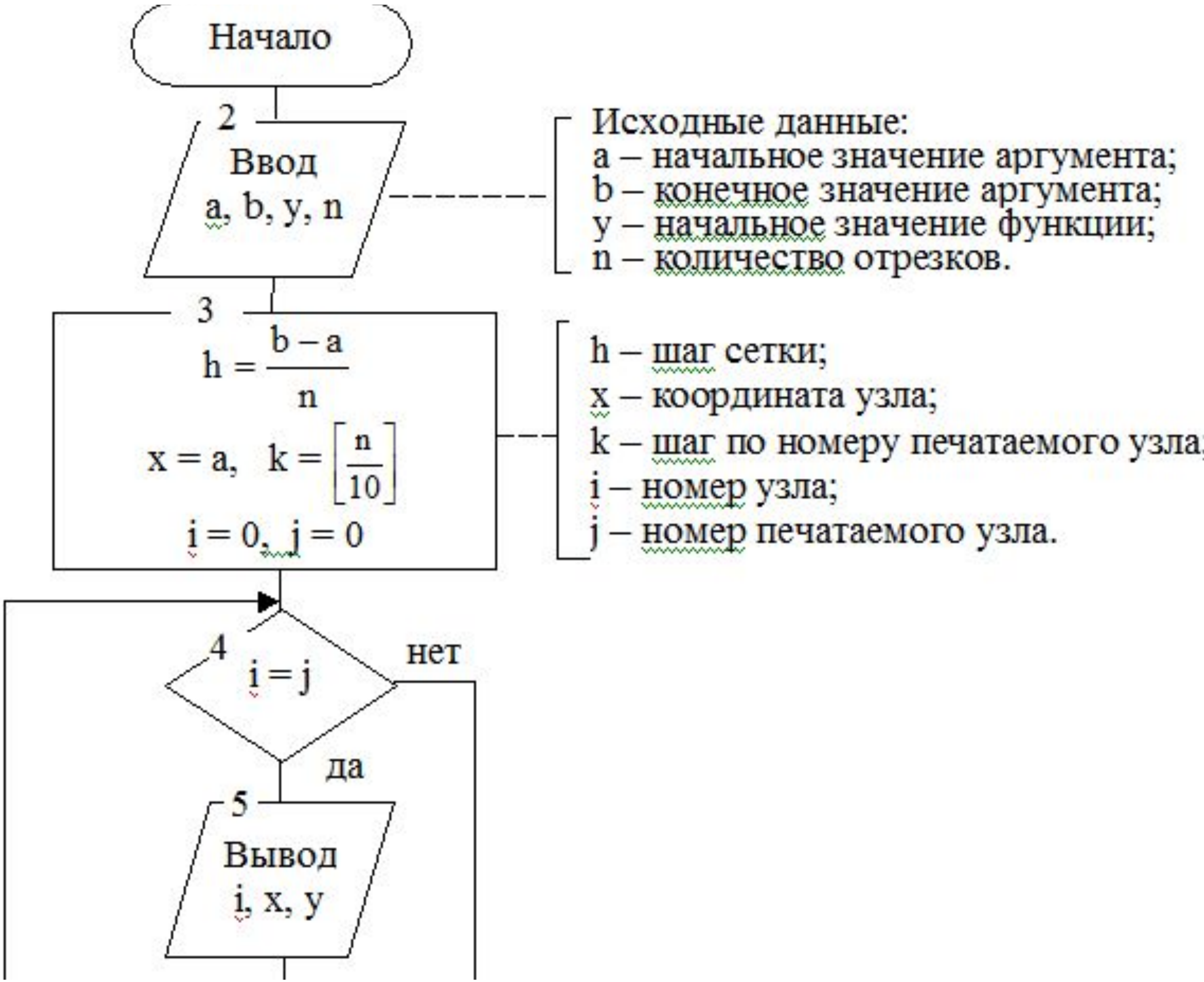
$$x_1 = x_0 + h = 0 + 0{,}1 = 0{,}1$$

Вычислим вторую точку

$$y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1; y_1) = 1{,}3 + 0{,}1 \cdot f(0{,}1; 1{,}3) = 1{,}3 + 0{,}1 \cdot (1 + 2{,}6 - 0{,}01) = 1{,}3 + 0{,}1 \cdot 3{,}59 = 1{,}659$$

$$x_2 = x_1 + h = 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}2$$

Аналогично нужно вычислить еще восемь точек (выбрано $n=10$).



Начало
2
Ввод
a, b, y, n
Исходные данные:
a – начальное значение аргумента;
b – конечное значение аргумента;
y – начальное значение функции;
n – количество отрезков.
3
$h = \frac{b-a}{n}$
$x = a, \quad k = \left[\frac{n}{10}\right]$
$i = 0, \; j = 0$
h – шаг сетки;
x – координата узла;
k – шаг по номеру печатаемого узла;
i – номер узла;
j – номер печатаемого узла.
4
i = j
нет
да
5
Вывод
i, x, y

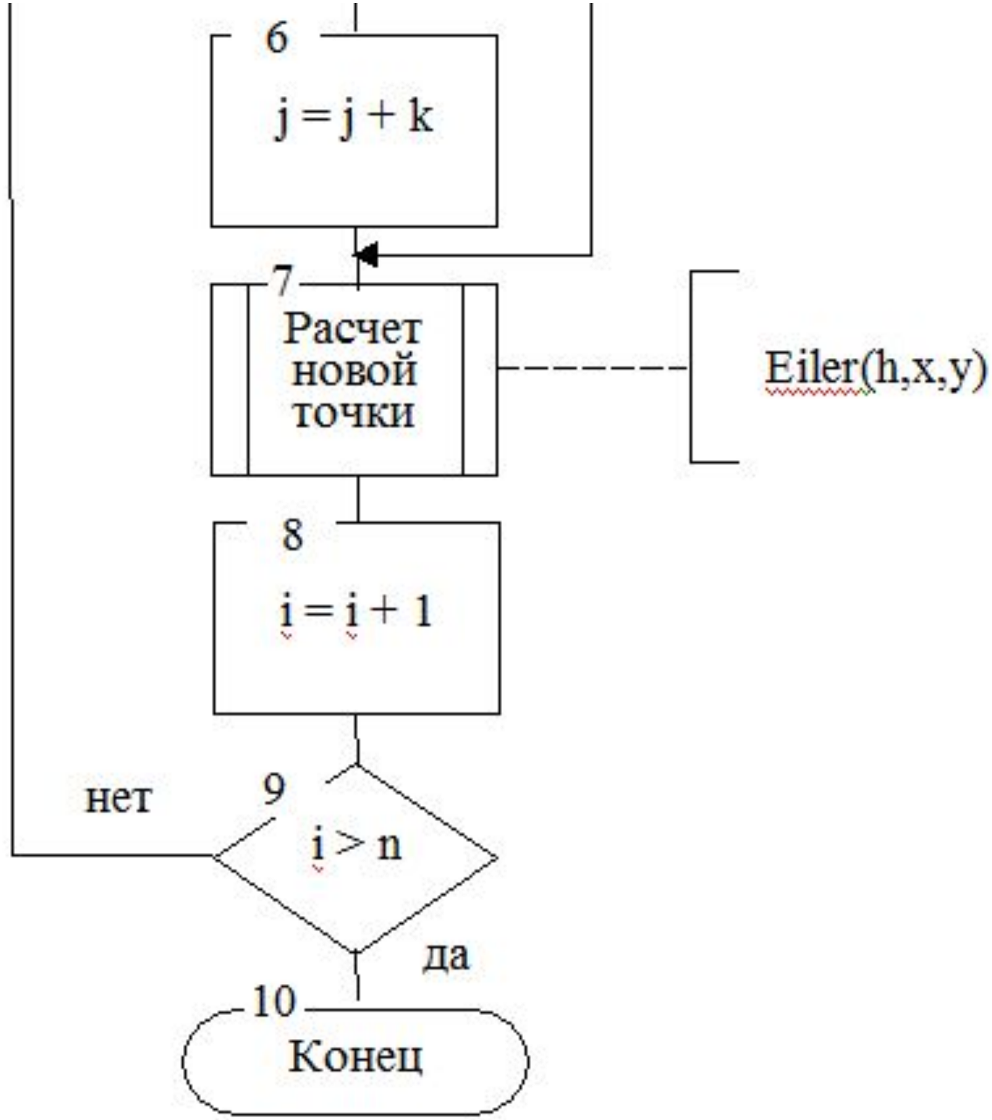


Рис. 7.3. Алгоритм решения ОДУ 1-го порядка методом Эйлера.

7.2. Модифицированный метод Эйлера (метод Рунге-Кутта 2-го порядка).

Для повышения точности формула Эйлера применяется дважды на каждом элементарном отрезке: сначала для вычисления значения функции в середине отрезка $\bar{y}$, затем это значение используется для вычисления тангенса угла наклона касательной к графику искомой функции в середине отрезка.

A- начальная точка.

L1- касательная к y(x) в точке A.

L2- касательная к y(x) в середине элементарного отрезка

L3 параллельно L2 через т. A

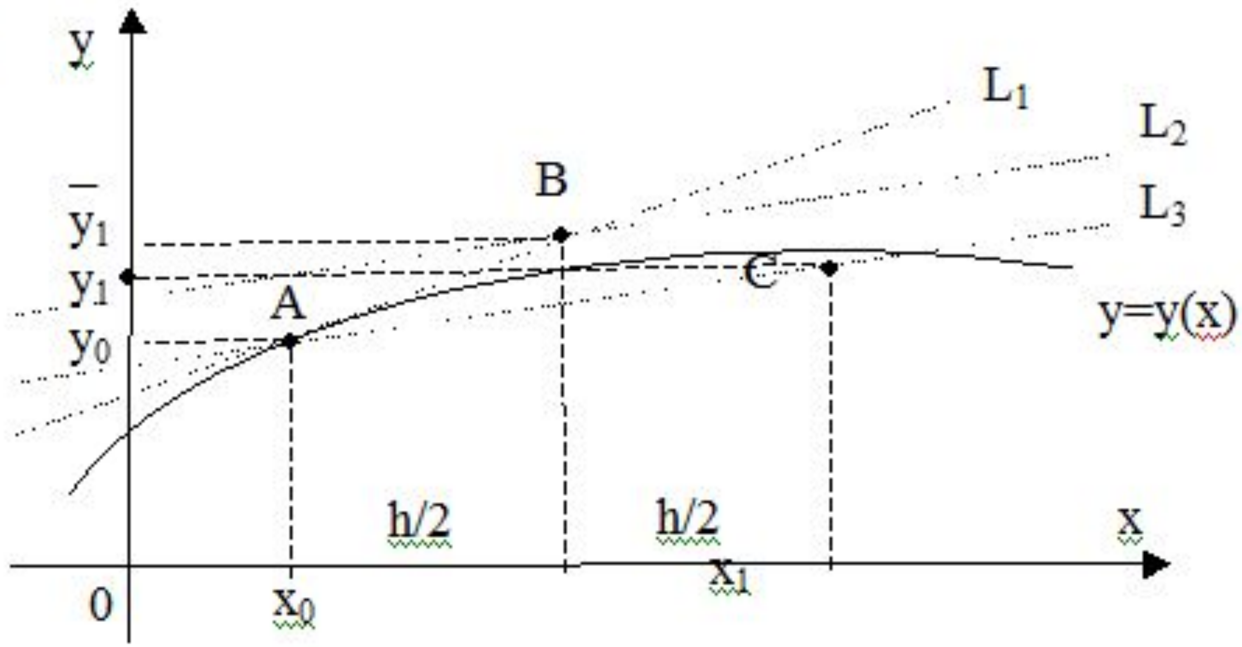


Рис. 7.4. Геометрическая иллюстрация модифицированного метода Эйлера.

Расчётные формулы:

$\overline{y_1} = y_0 + \frac{h}{2} \cdot f(x_0, y_0)$ - значение функции в середине отрезка $[x_0, x_1]$.

$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0 + \frac{h}{2}, \overline{y_1})$ - значение функции в конце отрезка $[x_0, x_1]$.

Формула модифицированного метода Эйлера:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} \cdot f(x_i, y_i)) \qquad (7.6)$$

где $i = 0, 1, \ldots, n-1$ - номер узла;

$x_i = a + i \cdot h$ - координата узла;

$y_0 = y(x_0)$ - начальное условие.

Алгоритм решения ОДУ отличается от описанного ранее алгоритма метода Эйлера (рис 7.3) только алгоритмом расчета новой точки (Рис. 7.5).

Погрешность метода $\delta \approx O(h^3)$.

Пример 7.2. Решение ранее рассмотренного уравнения (пример 7.1) модифицированным методом Эйлера.

$y' - 2 \cdot y + x^2 = 1, \quad x \in [0;1], \quad y(0) = 1.$

Пусть $n = 10$, $h = (1 - 0)/10 = 0{,}1$.

Начальная точка $x_0 = 0$, $y_0 = 1$.

Расчёт первой точки.

$$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0 + \frac{h}{2}; y_0 + \frac{h}{2} \cdot f(x_0;\ y_0)) = 1 + 0{,}1 \cdot f(0 + \frac{0{,}1}{2};\ 1 + \frac{0{,}1}{2} \cdot f(0;\ 1)) =$$

$$1 + 0{,}1 \cdot f(0{,}05;\ 1 + 0{,}05 \cdot (1 + 2 \cdot 1 - 0^2)) = 1 + 0{,}1 \cdot f(0{,}05;\ 1{,}15) =$$

$$1 + 0{,}1 \cdot (1 + 2 \cdot 1{,}15 - 0{,}05^2) = 1{,}32975$$

$$x_1 = x_0 + h = 0{,}1$$

Аналогично расчет следующих точек: 2, 3, ... ,10.

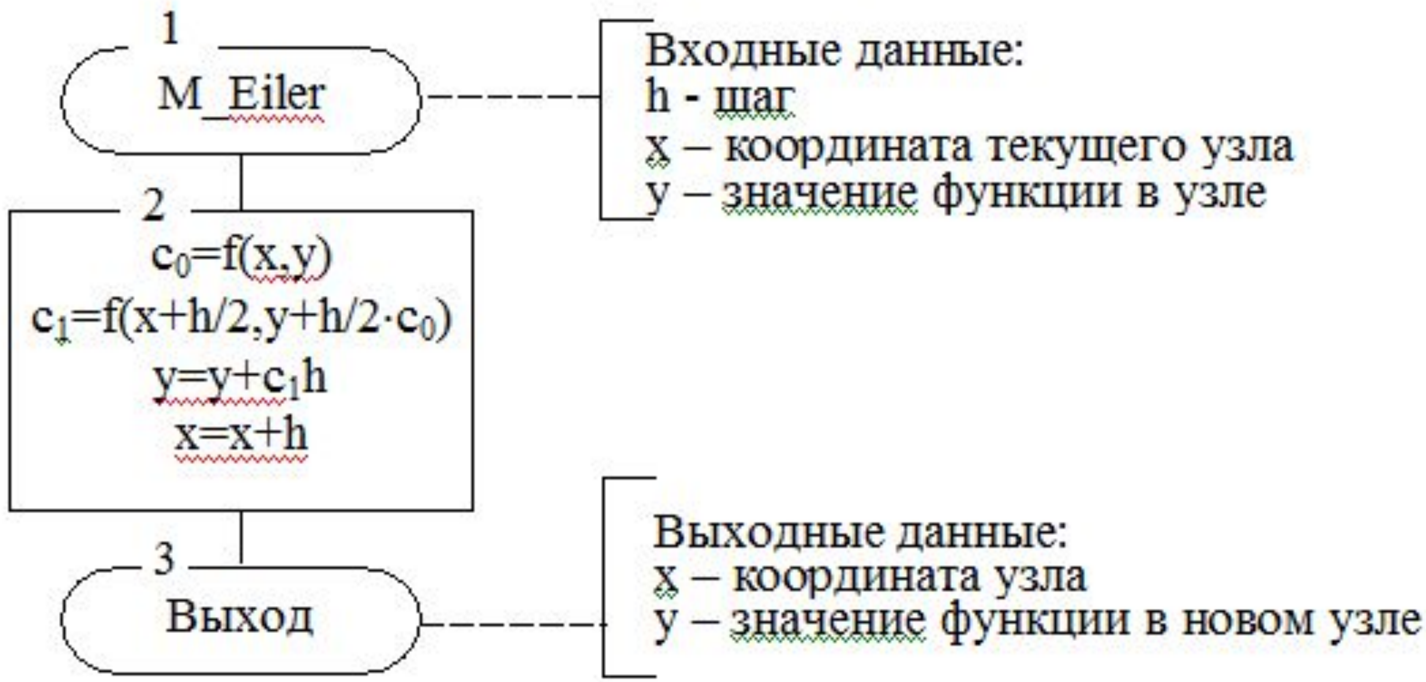


Рис. 7.5. Алгоритм расчёта новой точки модифицированным методом Эйлера:

7.2. Модифицированный метод Эйлера (метод Рунге-Кутта 2-го порядка).

Для повышения точности формула Эйлера применяется дважды на каждом элементарном отрезке: сначала для вычисления значения функции в середине отрезка , затем это значение используется для вычисления тангенса угла наклона касательной к графику искомой функции в середине отрезка.

A- начальная точка.

L_1- касательная к $y(x)$ в точке A.

L_2- касательная к $y(x)$ в середине элементарного отрезка

L_3 параллельно L_2 через т. A

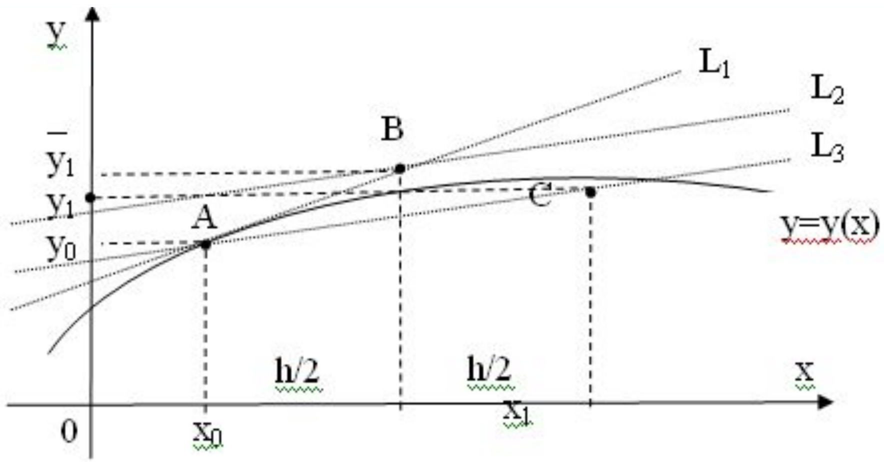


Рис. 7.4. Геометрическая иллюстрация модифицированного метода Эйлера.

Расчётные формулы:

$$\overline{y_1} = y_0 + \frac{h}{2} \cdot f(x_0, y_0)$$

- значение функции в середине отрезка $[x_0, x_1]$.

$$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0 + \frac{h}{2}, \overline{y_1})$$

- значение функции в конце отрезка $[x_0, x_1]$.

Формула модифицированного метода Эйлера:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} \cdot f(x_i, y_i))$$

(7.6)

где $i = 0, 1, \ldots, n-1$ - номер узла;

$x_i = a + i \cdot h$ - координата узла;

$y_0 = y(x_0)$ - начальное условие.

Алгоритм решения ОДУ отличается от описанного ранее алгоритма метода Эйлера (рис 7.3) только алгоритмом расчета новой точки (Рис. 7.5). Погрешность метода $\delta \approx O(h3)$.

Пример 7.2. Решение ранее рассмотренного уравнения (пример 7.1) модифицированным методом Эйлера.

$y' - 2 \cdot y + x2 = 1, \quad x \in [0;1], \quad y(0) = 1.$

Пусть $n = 10$, $h = (1 - 0)/10 = 0{,}1$.

Начальная точка $x0 = 0$, $y0 = 1$.

Расчёт первой точки.

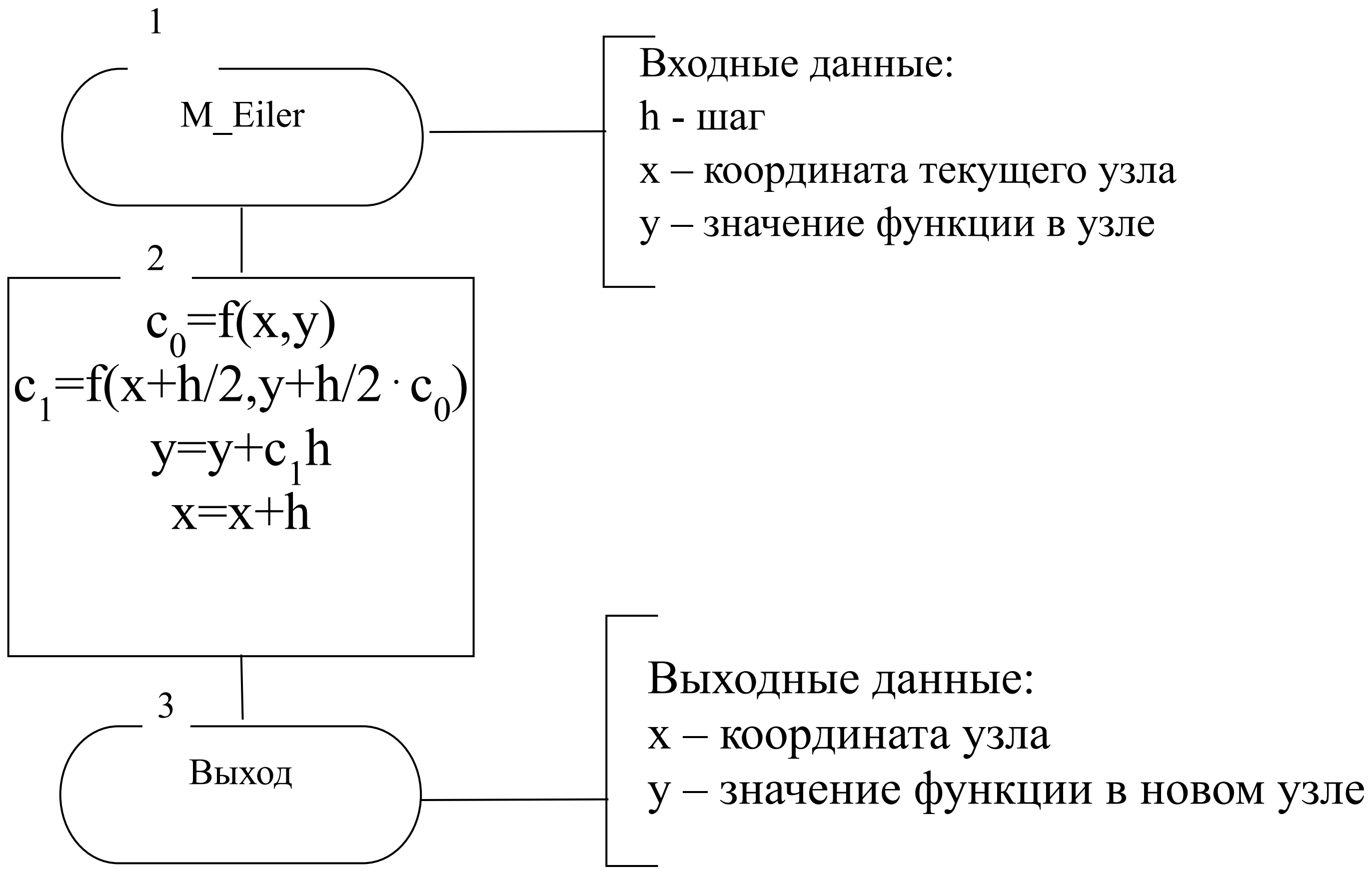
$$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0 + \frac{h}{2}; y_0 + \frac{h}{2} \cdot f(x_0;\ y_0)) = 1 + 0,1 \cdot f(0 + \frac{0,1}{2};\ 1 + \frac{0,1}{2} \cdot f(0;\ 1)) =$$

$$1 + 0,1 \cdot f(0,05;\ 1 + 0,05 \cdot (1 + 2 \cdot 1 - 0^2)) = 1 + 0,1 \cdot f(0,05;\ 1,15) =$$

$$1 + 0,1 \cdot (1 + 2 \cdot 1,15 - 0,05^2) = 1,32975$$

$$x_1 = x_0 + h = 0,1$$

Аналогично расчёт следующих точек: 2, 3, ... ,10.


1
M_Eiler
Входные данные:
h - шаг
x – координата текущего узла
y – значение функции в узле
2
$c_0=f(x,y)$
$c_1=f(x+h/2,y+h/2\cdot c_0)$
$y=y+c_1h$
$x=x+h$
3
Выход
Выходные данные:
x – координата узла
y – значение функции в новом узле