

# Тема 7

Решение обыкновенных  
дифференциальных уравнений.

Уравнение, содержащее производные от искомой функции  $y = y(x)$ , называется *обыкновенным дифференциальным уравнением* (ОДУ).

Общий вид дифференциального уравнения:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (7.1)$$

где  $n$  – наивысший порядок производной, определяет *порядок уравнения*.

*Решением ОДУ* называется функция  $y = y(x)$ , которая после ее подстановки в уравнение (7.1) обращает его в тождество.

*Общее решение ОДУ* имеет вид:

$$y = y(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \quad (7.2)$$

где  $C_1, C_2, \dots, C_n$  – постоянные интегрирования.

**Частное решение** получается из общего при конкретных значениях  $C_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Эти значения определяются из  $n$  **дополнительных условий**. В качестве таких условий могут быть заданы значения функции и ее производных при некоторых значениях аргумента  $x$ , иначе говоря, в некоторых точках.

В зависимости от того, как заданы эти дополнительные условия, выделяют 2 типа задач:

- **Задача Коши.** Все условия заданы в одной, **начальной точке**, поэтому они называются **начальными условиями**.
- **Краевая задача.** Условия заданы в более чем одной точке, обычно в начальной и конечной. Условия в этом случае называются **краевыми** или **граничными**. Такая задача может возникнуть только при решении ОДУ с порядком выше первого.

Разработано множество методов решения подобных задач:

1. **Графические методы.** Например, метод изоклин - путем графических построений находят точки исходной функции и строят ее график.
2. **Аналитические методы** позволяют получить формулу исходной функции путем аналитических преобразований.
3. **Приближенные методы** позволяют получить приближенное аналитическое решение в результате принятых упрощений. К приближенным относятся асимптотические методы и метод малых возмущений.
4. **Численные методы** позволяют получить таблицу приближенных значений искомой функции для ряда заранее выбранных значений ее аргумента.

На практике чаще всего применяются численные методы: они просты в использовании и не имеют ограничений.

Задача решения ОДУ 1-го порядка (задача Коши) формулируется следующим образом:

Найти  $y = y(x)$ , удовлетворяющую уравнению

$$y' = f(x,y) \quad (7.3)$$

для  $x \in [a,b]$  при заданном начальном условии  $y(a) = y_0$ .

Рассмотрим численные методы решения этой задачи.

## 7.1. Метод Эйлера (метод Рунге-Кутта 1-го порядка).

Разобьем  $[a, b]$  на  $n$  равных частей – *элементарных отрезков*,  $x_0, x_1, \dots, x_n$  будем называть *узлами сетки*,  $h = (b-a)/n$  – *шаг сетки*.

Очевидно, что  $x_i = a + i \cdot h$ ,  $i = \overline{0, 1, \dots, n}$ ;  $x_0 = a$ ,  $x_n = b$ .

Заменяем в уравнении (7.1)  $y'$  в точке  $x_i$  её приближенной оценкой – отношением приращений (это следует из определения производной):

$$y'_i \approx \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$$

Тогда получаем:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} \approx f(x_i, y_i)$$

Отсюда формула Эйлера:

$$y_{i+1} \approx y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$$

(7.4)

$$x_i = a + i \cdot h, \quad i = \overline{0, 1, \dots, n-1} \text{ — номер узла}$$

Зная  $y_0$  в точке  $x_0$  (начальное условие) можно найти  $y_1$ , затем, используя уже известные значения  $x_1$  и  $y_1$ , вычислить  $x_2$  и  $y_2$  и так далее.

Рассмотрим геометрическую иллюстрацию метода Эйлера. В координатах  $(x, y)$  отобразим известные данные: отрезок  $[a, b]$  на оси  $X$  и начальное условие  $y_0$  – точка  $A$  с координатами  $(a, y_0)$ . Отрезок  $[a, b]$  разобьем на  $n$  равных частей, получим узлы равномерной сетки  $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ . Вычислим значения первой производной искомой функции в точке  $A$ , используя координату этой точки и исходное уравнение (7.3)

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0) = \operatorname{tg} \alpha_0$$

Полученное значение позволяет построить касательную к искомой функции в точке А. Эту касательную можно использовать для вычисления приближенного значения искомой функции в новом узле  $x_1$  (кривую  $y(x)$  заменяем на отрезком АВ на элементарном отрезке  $[x_0, x_1]$ ).

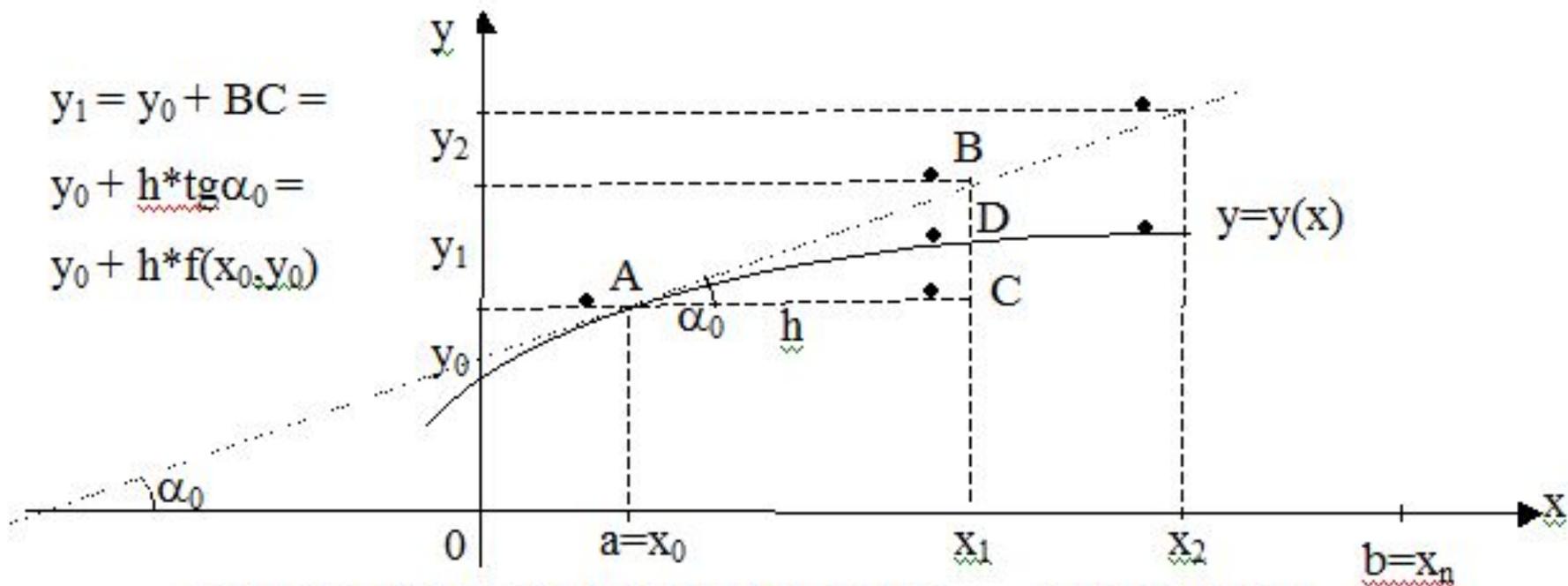


Рис. 7.1. Геометрическая иллюстрация метода Эйлера.

Зная  $(x_1, y_1)$ , можно аналогично получить новую точку  $(x_2, y_2)$  и т.д.  
 Из геометрической иллюстрации следует, что:

1. На каждом шаге есть погрешность (на рисунке это отрезок BD).  
**Погрешность тем больше, чем больше шаг.**
2. Ошибка может накапливаться.

Формула Эйлера (7.4) имеет погрешность метода  $\delta_M = O(h^2)$

Для практического выбора  $h$  с целью обеспечения заданной точности решения задачи  $\varepsilon$  применяется следующий прием.

Выполняются 2 расчета: с  $n$  и  $2n$  узлами. Если полученные значения функции в во всех узлах отличаются не более чем на  $\varepsilon$ , задача считается решенной. Если нет, число узлов вновь удваивают и опять сравнивают полученные значения функций.

Таким образом, расчет продолжается до достижения условия

$$\delta = \max_{i=1,n} |y_i^n - y_i^{2n}| \leq \varepsilon$$

(7.5)

Значение  $n$  может достигать большой величины – более 1000. Чтобы не печатать столько значений функции, в алгоритме решения ОДУ методом Эйлера нужно предусмотреть печать не всех рассчитанных значений, а только части их, например, 10-ти значений, распределенных равномерно по всему отрезку.



Рис. 7.2. Алгоритм расчета новой точки методом Эйлера:

Пример 7.1. Дано уравнение  $y' - 2y + x^2 = 1$

Найти решение для отрезка  $[0; 1]$ , если  $y(0) = 1$ .

Выберем  $n = 10$ , тогда шаг  $h = (1-0)/10 = 0,1$ .

Запишем уравнение в каноническом виде  
 $y' = f(x, y) = 1 + 2y - x^2$

Начальная точка  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 1$ .

Вычислим первую точку

$$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0; y_0) = 1 + 0,1 \cdot f(0; 1) = 1 + 0,1 \cdot (1 + 2 \cdot 1 - 0^2) = 1 + 0,1 \cdot 3 = 1,3$$

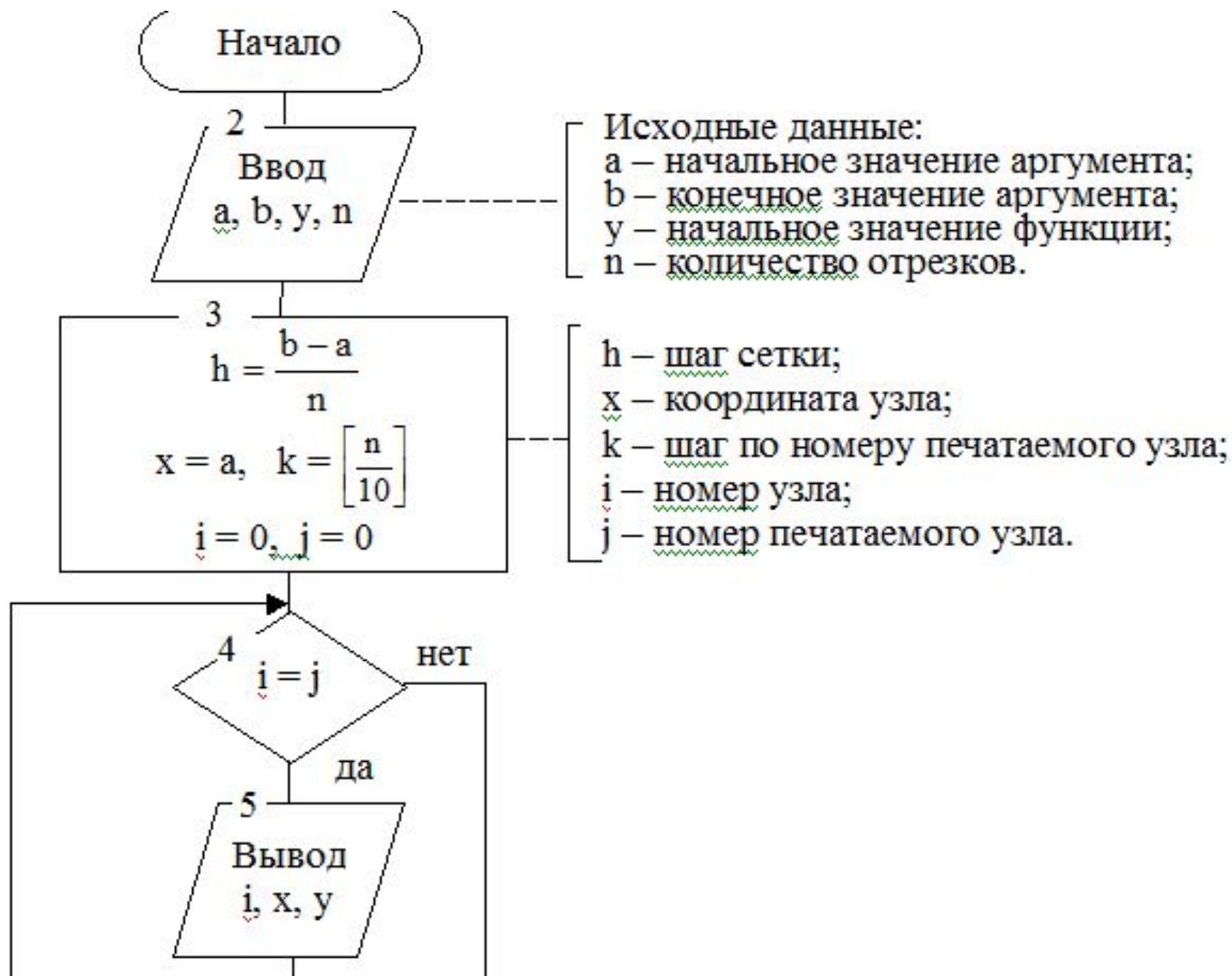
$$x_1 = x_0 + h = 0 + 0,1 = 0,1$$

Вычислим вторую точку

$$y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1; y_1) = 1,3 + 0,1 \cdot f(0,1; 1,3) = 1,3 + 0,1 \cdot (1 + 2,6 - 0,01) = 1,3 + 0,1 \cdot 3,59 = 1,659$$

$$x_2 = x_1 + h = 0,1 + 0,1 = 0,2$$

Аналогично нужно вычислить еще восемь точек (выбрано  $n=10$ ).



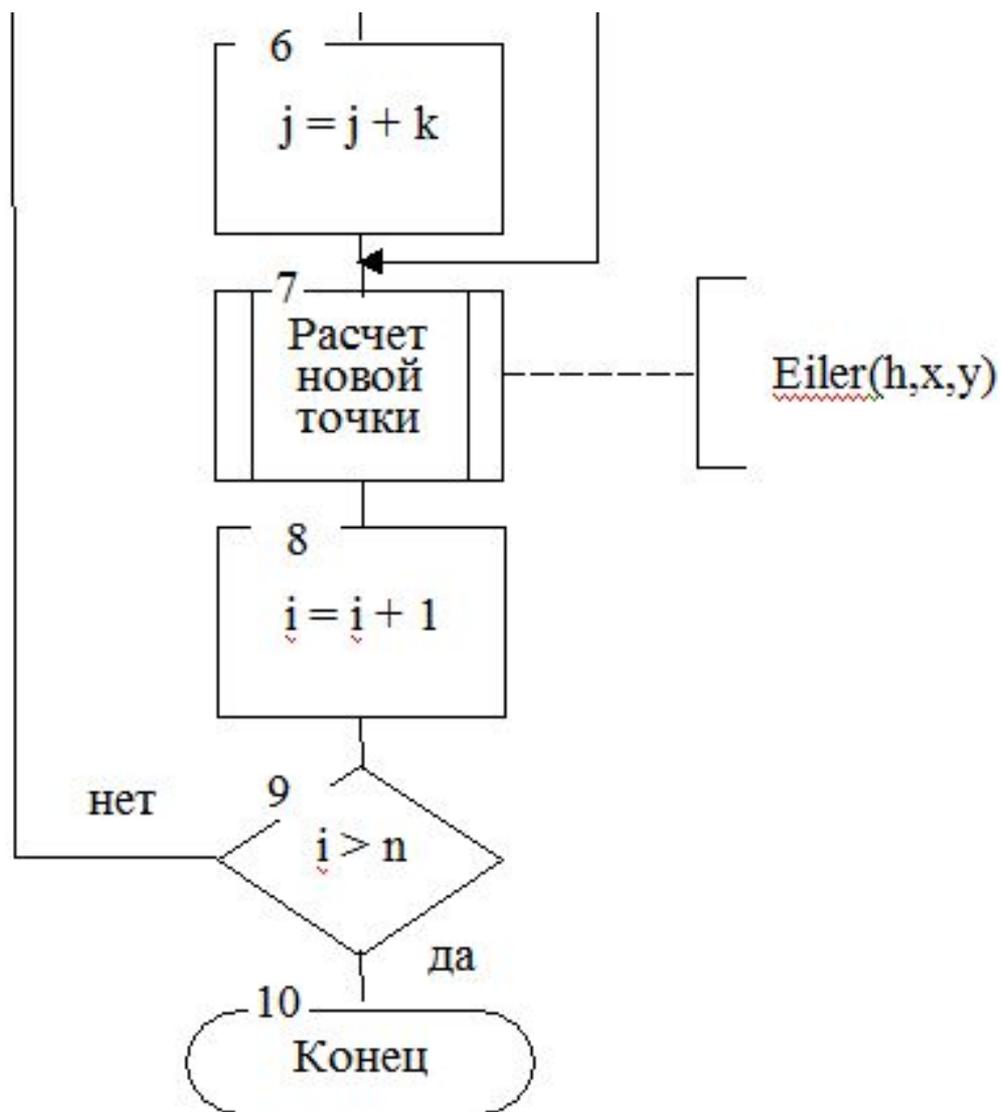


Рис. 7.3. Алгоритм решения ОДУ 1-го порядка методом Эйлера.

## 7.2. Модифицированный метод Эйлера (метод Рунге-Кутты 2-го порядка).

Для повышения точности формула Эйлера применяется дважды на каждом элементарном отрезке: сначала для вычисления значения функции в середине отрезка  $\bar{y}$ , затем это значение используется для вычисления тангенса угла наклона касательной к графику искомой функции в середине отрезка.

$A$  - начальная точка.

$L_1$  - касательная к  $y(x)$  в точке  $A$ .

$L_2$  - касательная к  $y(x)$  в середине элементарного отрезка

$L_3$  параллельно  $L_2$  через т.  $A$

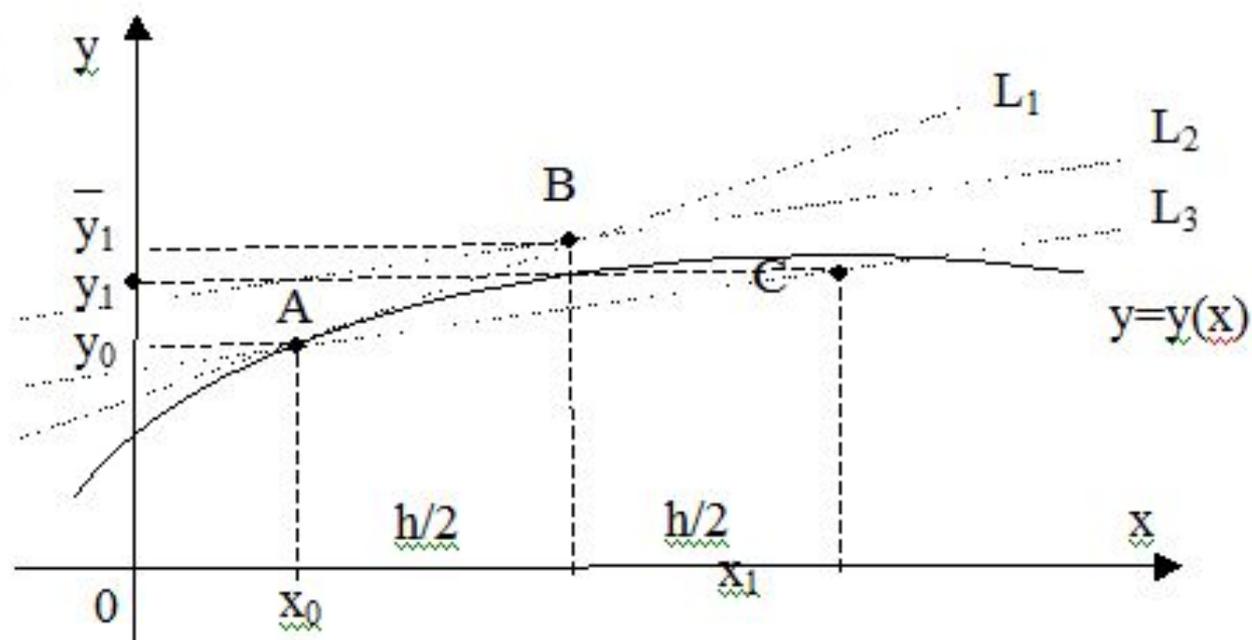


Рис. 7.4. Геометрическая иллюстрация модифицированного метода Эйлера.

Расчётные формулы:

$\bar{y}_1 = y_0 + \frac{h}{2} \cdot f(x_0, y_0)$  - значение функции в середине отрезка  $[x_0, x_1]$ .

$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0 + \frac{h}{2}, \bar{y}_1)$  - значение функции в конце отрезка  $[x_0, x_1]$ .

Формула модифицированного метода Эйлера:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} \cdot f(x_i, y_i)\right) \quad (7.6)$$

где  $i = 0, 1, \dots, n-1$  - номер узла;

$x_i = a + i \cdot h$  - координата узла;

$y_0 = y(x_0)$  - начальное условие.

Алгоритм решения ОДУ отличается от описанного ранее алгоритма метода Эйлера (рис 7.3) только алгоритмом расчета новой точки (Рис. 7.5).

Погрешность метода  $\delta \approx O(h^3)$ .

Пример 7.2. Решение ранее рассмотренного уравнения (пример 7.1) модифицированным методом Эйлера.

$$y' - 2 \cdot y + x^2 = 1, \quad x \in [0;1], \quad y(0) = 1.$$

Пусть  $n = 10$ ,  $h = (1 - 0)/10 = 0,1$ .

Начальная точка  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 1$ .

Расчёт первой точки.

$$\begin{aligned}y_1 &= y_0 + h \cdot f\left(x_0 + \frac{h}{2}; y_0 + \frac{h}{2} \cdot f(x_0; y_0)\right) = 1 + 0,1 \cdot f\left(0 + \frac{0,1}{2}; 1 + \frac{0,1}{2} \cdot f(0; 1)\right) = \\ &= 1 + 0,1 \cdot f(0,05; 1 + 0,05 \cdot (1 + 2 \cdot 1 - 0^2)) = 1 + 0,1 \cdot f(0,05; 1,15) = \\ &= 1 + 0,1 \cdot (1 + 2 \cdot 1,15 - 0,05^2) = 1,32975\end{aligned}$$

$$x_1 = x_0 + h = 0,1$$

Аналогично расчет следующих точек: 2, 3, ... ,10.



Рис. 7.5. Алгоритм расчёта новой точки модифицированным методом Эйлера:

## 7.2. Модифицированный метод Эйлера (метод Рунге-Кутта 2-го порядка).

Для повышения точности формула Эйлера применяется дважды на каждом элементарном отрезке: сначала для вычисления значения функции в середине отрезка, затем это значение используется для вычисления тангенса угла наклона касательной к графику искомой функции в середине отрезка.

A- начальная точка.

L<sub>1</sub>- касательная к y(x) в точке A.

L<sub>2</sub>- касательная к y(x) в середине элементарного отрезка

L<sub>3</sub> параллельно L<sub>2</sub> через т. A

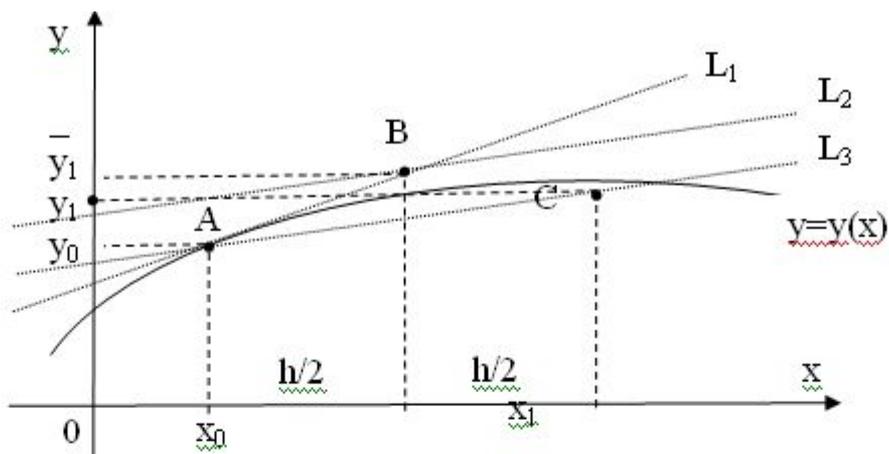


Рис. 7.4. Геометрическая иллюстрация модифицированного метода Эйлера.

Расчётные формулы:

$$\bar{y}_1 = y_0 + \frac{h}{2} \cdot f(x_0, y_0)$$

- значение функции в середине отрезка  $[x_0, x_1]$ .

$$y_1 = y_0 + h \cdot f\left(x_0 + \frac{h}{2}, \bar{y}_1\right)$$

- значение функции в конце отрезка  $[x_0, x_1]$ .

Формула модифицированного метода Эйлера:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} \cdot f(x_i, y_i)\right)$$

(7.6)

Где  $i = 0, 1, \dots, n-1$  - номер узла;

$x_i = a + i \cdot h$  - координата узла;

$y_0 = y(x_0)$  - начальное условие.

Алгоритм решения ОДУ отличается от описанного ранее алгоритма метода Эйлера (рис 7.3) только алгоритмом расчета новой точки (Рис. 7.5).  
Погрешность метода  $\delta \approx O(h^3)$ .

Пример 7.2. Решение ранее рассмотренного уравнения (пример 7.1) модифицированным методом Эйлера.

$$y' - 2 \cdot y + x^2 = 1, \quad x \in [0;1], \quad y(0) = 1.$$

Пусть  $n = 10$ ,  $h = (1 - 0)/10 = 0,1$ .

Начальная точка  $x_0 = 0, y_0 = 1$ .

Расчёт первой точки.

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + h \cdot f\left(x_0 + \frac{h}{2}; y_0 + \frac{h}{2} \cdot f(x_0; y_0)\right) = 1 + 0,1 \cdot f\left(0 + \frac{0,1}{2}; 1 + \frac{0,1}{2} \cdot f(0; 1)\right) = \\ &= 1 + 0,1 \cdot f(0,05; 1 + 0,05 \cdot (1 + 2 \cdot 1 - 0^2)) = 1 + 0,1 \cdot f(0,05; 1,15) = \\ &= 1 + 0,1 \cdot (1 + 2 \cdot 1,15 - 0,05^2) = 1,32975 \end{aligned}$$

$$x_1 = x_0 + h = 0,1$$

Аналогично расчёт следующих точек: 2, 3, ..., 10.

