

# «ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ»

Симплекс-метод основан на последовательном приближении к оптимальности. Процедура симплекс-метода включает 3 существенных элемента:

- указывается способ нахождения исходного (опорного) плана;
- устанавливается признак, дающий возможность проверить, является ли допустимый план оптимальным;
- формулируются правила, по которым неоптимальный план можно улучшить.

В математическую постановку задачи входит построение ограничений и целевой функции.

Решение задачи линейного программирования симплекс-методом получается не аналитическим путем, т.е. не с помощью формул, позволяющих вычислить оптимальный план через ограничения и целевую функцию, что здесь и невозможно, а решение получается алгоритмически, шаг за шагом – итерационно.

Особенность метода состоит в том, что составление первоначального плана основывается на понятии «базиса» – совокупности линейно независимых векторов.

Таблица 1.1– Исходные данные

Цена единицы продукции	Способ изготовления продукции			Ограничения на запасы ресурсов по месяцам			Итого
	первый	второй	третий				
	60	90	85				
ресурсы	Затраты ресурсов на единицу продукции $a_{ij}, i=1,2,3; j=1,2,3$			1 месяц	2 месяц	3 месяц	
сырье, (усл. ед.)	1,86	3,72	2,79	1860	2000	1800	
труд (чел.-час)	4,64	1,99	2,65	1420	1500	1420	
оборудование (станко -час)	2,30	1,38	1,73	900	950	900	
		Заявки по месяцам		565	575	585	1725

Решение задачи линейного программирования симплекс-методом начинается с ее преобразования к специальному каноническому виду. Для этого вводятся дополнительные переменные  $S_i$ , коэффициенты в целевой функции при  $S_i$  принимаются равными нулю:

$$1,86 \cdot x_1 + 3,72 \cdot x_2 + 2,79 \cdot x_3 + S_1 = 1860;$$

$$4,64 \cdot x_1 + 1,99 \cdot x_2 + 2,65 \cdot x_3 + S_2 = 1420;$$

$$2,30 \cdot x_1 + 1,38 \cdot x_2 + 1,73 \cdot x_3 + S_3 = 900;$$

Преобразуем эти соотношения к виду:

$$S_1 = 1860 - (1,86 \cdot x_1 + 3,72 \cdot x_2 + 2,79 \cdot x_3);$$

$$S_2 = 1420 - (4,64 \cdot x_1 + 1,99 \cdot x_2 + 2,65 \cdot x_3);$$

$$S_3 = 900 - (2,30 \cdot x_1 + 1,38 \cdot x_2 + 1,73 \cdot x_3).$$

В рассматриваемых далее симплекс-таблицах, соответствующих определенным опорным планам, выделены жирным шрифтом: максимальное значение показателя индексной строки  $d_k = \max\{d_j\}$ , минимальное значение отношения  $B_r/a_{rk} = \min\{B_r/a_{rk}\}$  и разрешающий элемент  $a_{rk}$ .

Таблица 1.2 – Первый опорный план

	$c_j$	60	90	85	0	0	0	$B_i$	$B_i/a_{ik}$
базис	$c_i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$S_1$	$S_2$	$S_3$		
$S_1$	0	1,86	<b>3,72</b>	2,79	<b>1,00</b>	0,00	0,00	1860	<b>500,00</b>
$S_2$	0	4,64	1,99	2,65	0,00	<b>1,00</b>	0,00	1420	713,57
$S_3$	0	2,30	1,38	1,73	0,00	0,00	<b>1,00</b>	900	652,17
$d_j$		60	<b>90</b>	85	0	0	0	0	

Максимальное значение показателя индексной строки равно 90 и соответствует переменной  $x_2$ , которую вводят в базис. Минимальное значение  $B_i/a_{i2}=500$  и соответствует переменной  $S_1$ , которая будет выводиться из базиса;  $a_{1,2}=3,72$ . Значение целевой функции для этого плана равно 0.

Переменную  $x_2$  вводят в базис на место  $S_1$ . Результаты перерасчета значений опорного плана приведены в таблице 1.3



Коэффициенты 1-ой строки второго опорного плана рассчитываются как результат деления коэффициентов 1-ой строки предыдущего плана на значение РЭ ( $a_{1,2}=3,72$ ):

$$a_{1,1}=1,86/3,72=0,5; a_{1,2}=3,72/3,72=1;$$

$$a_{1,3}=2,79/3,72=0,75; a_{1,4}=1/3,72=0,27;$$

$$a_{1,5}=0/3,72=0; a_{1,6}=0/3,72=0;$$

$B_1=1860/3,72=500$ ; в остальных строках 2-го столбца второго плана записываем нули:  $a_{2,2}=a_{3,2}=0$ . Для 2-ой и 3-ей строк второго плана коэффициенты рассчитываются по правилу прямоугольника:

$$a_{2,1}=4,64-1,86 \cdot 1,99/3,72=3,65; a_{2,3}=2,65-2,79 \cdot 1,99/3,72=1,16;$$

$$a_{2,4}=0-1 \cdot 1,99/3,72=-0,53; a_{2,5}=1-0 \cdot 1,99/3,72=1;$$

$$a_{2,6}=0-0 \cdot 1,99/3,72=0; B_2=1420-1860 \cdot 1,99/3,72=425;$$

$$a_{3,1}=2,30-1,86 \cdot 1,38/3,72=1,61; a_{3,3}=1,73-2,79 \cdot 1,38/3,72=0,70;$$

$$a_{3,4}=0-1 \cdot 1,38/3,72=-0,37; a_{3,5}=0-0 \cdot 1,38/3,72=0;$$

$$a_{3,6}=1-0 \cdot 1,38/3,72=1; B_3=900-1860 \cdot 1,38/3,72=210.$$

Таблица 1.3 – Второй опорный план



	$c_j$	60	90	85	0	0	0	$B_i$	$B_i/a_{ik}$
базис	$c_i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$S_1$	$S_2$	$S_3$		
$x_2$	90	0,50	<b>1,00</b>	0,75	0,27	0,00	0,00	500,00	666,67
$S_2$	0	3,65	0,00	1,16	-0,53	<b>1,00</b>	0,00	425,00	367,17
$S_3$	0	1,61	0,00	<b>0,70</b>	-0,37	0,00	<b>1,00</b>	210,00	<b>302,16</b>
$d_i$		15	0	<b>17,5</b>	-24,19	0	0	45000,00	

□

Максимальное значение показателя индексной строки равно 17,5 и соответствует переменной  $x_3$ , которую вводят в базис. Минимальное значение  $B_i/a_{i3}=302,16$  и соответствует переменной  $S_3$ , которая будет выводиться из базиса;  $a_{3,3}=0,70$ . В результате преобразования симплекс-таблицы для второго плана в соответствии с алгоритмом получим третий опорный план (таблица 1.4).

Таблица 1.4 – Третий опорный план – оптимальный



	$c_j$	60	90	85	0	0	0	$B_i$	$B_i/a_{ik}$
базис	$c_i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$S_1$	$S_2$	$S_3$		
$x_2$	90	-1,24	<b>1,00</b>	0,00	0,67	0,00	-1,08	273,38	
$S_2$	0	0,96	0,00	0,00	0,08	<b>1,00</b>	-1,67	75,25	
$x_3$	85	2,32	0,00	<b>1,00</b>	-0,53	0,00	1,44	302,16	
$d_j$		-25,54	0	0	-14,85	0	-25,18	50287,77	



Для всех переменных третьего плана значение показателя оптимальности  $d_j \leq 0$  – следовательно, получен оптимальный план.

Значение целевой функции (доход) в количестве 50288 у.д.е. обеспечивается при изготовлении 273,38 ед. продукции 2-ым способом и 302,16 ед. продукции 3-им способом.



# Решение задачи в MS EXCEL

1. Заполняем исходными данными таблицу

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		c <sub>j</sub>	60	90	85	0	0	0	B <sub>i</sub>
2	базис	c <sub>i</sub>	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	S <sub>3</sub>	
3	S <sub>1</sub>	0	1,86	3,72	2,79	1	0	0	1860
4	S <sub>2</sub>	0	4,64	1,99	2,65	0	1	0	1420
5	S <sub>3</sub>	0	2,3	1,38	1,73	0	0	1	900
6	d <sub>j</sub>		60	90	85	0	0	0	0

2. d<sub>j</sub> – индексная строка. Находим наибольшее значение. d<sub>j</sub> = 90 при переменной x<sub>2</sub> (столбец D).

Выделяем данный столбец

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		c <sub>j</sub>	60	90	85	0	0	0	B <sub>i</sub>
2	базис	c <sub>i</sub>	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	S <sub>3</sub>	
3	S <sub>1</sub>	0	1,86	3,72	2,79	1	0	0	1860
4	S <sub>2</sub>	0	4,64	1,99	2,65	0	1	0	1420
5	S <sub>3</sub>	0	2,3	1,38	1,73	0	0	1	900
6	d <sub>j</sub>		60	90	85	0	0	0	0

3. Создаем столбец J по следующей формуле: B<sub>i</sub>/a<sub>ik</sub>, где a<sub>ik</sub> - значения столбца D

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		c <sub>j</sub>	60	90	85	0	0	0	B <sub>i</sub>	B <sub>i</sub> /a <sub>ik</sub>
2	базис	c <sub>i</sub>	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	S <sub>3</sub>		
3	S <sub>1</sub>	0	1,86	3,72	2,79	1	0	0	1860	500
4	S <sub>2</sub>	0	4,64	1,99	2,65	0	1	0	1420	713,57
5	S <sub>3</sub>	0	2,3	1,38	1,73	0	0	1	900	652,17
6	d <sub>j</sub>		60	90	85	0	0	0	0	

J
B <sub>i</sub> /a <sub>ik</sub>
=I3/D3
=I4/D4
=I5/D5

4. Выбираем строку с наименьшим значением столбца **J** (Значение 500. Строка **3**). Выделяем ее.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		<b>c<sub>j</sub></b>	<b>60</b>	<b>90</b>	<b>85</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>B<sub>i</sub></b>	<b>B<sub>i</sub>/a<sub>ik</sub></b>
2	<b>базис</b>	<b>c<sub>i</sub></b>	<b>x<sub>1</sub></b>	<b>x<sub>2</sub></b>	<b>x<sub>3</sub></b>	<b>S<sub>1</sub></b>	<b>S<sub>2</sub></b>	<b>S<sub>3</sub></b>		
3	<b>S<sub>1</sub></b>	0	1,86	3,72	2,79	1	0	0	1860	500
4	<b>S<sub>2</sub></b>	0	4,64	1,99	2,65	0	1	0	1420	713,57
5	<b>S<sub>3</sub></b>	0	2,3	1,38	1,73	0	0	1	900	652,17
6	<b>d<sub>j</sub></b>		60	90	85	0	0	0	0	

5. Создаем новую таблицу и начинаем пересчитывать базис

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
9		<b>c<sub>j</sub></b>	<b>60</b>	<b>90</b>	<b>85</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>B<sub>i</sub></b>	<b>B<sub>i</sub>/a<sub>ik</sub></b>
10	<b>базис</b>	<b>c<sub>i</sub></b>	<b>x<sub>1</sub></b>	<b>x<sub>2</sub></b>	<b>x<sub>3</sub></b>	<b>S<sub>1</sub></b>	<b>S<sub>2</sub></b>	<b>S<sub>3</sub></b>		
11	<b>x<sub>2</sub></b>	<b>90</b>								
12	<b>S<sub>2</sub></b>	0								
13	<b>S<sub>3</sub></b>	0								
14	<b>d<sub>j</sub></b>									

**S<sub>1</sub>** (ячейка **A11**) заменяется на **x<sub>2</sub>** (из ячейки **D2**). В **B11** записываем значение ячейки **D1**

6. В следующей таблице указаны формулы для пересчета базиса. Далее рассмотрим каждую подробнее

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
9		<b>c<sub>j</sub></b>	<b>60</b>	<b>90</b>	<b>85</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>B<sub>i</sub></b>
10	<b>базис</b>	<b>c<sub>i</sub></b>	<b>x<sub>1</sub></b>	<b>x<sub>2</sub></b>	<b>x<sub>3</sub></b>	<b>S<sub>1</sub></b>	<b>S<sub>2</sub></b>	<b>S<sub>3</sub></b>	
11	<b>x<sub>2</sub></b>	<b>90</b>	=C3/\$D\$3	=D3/\$D\$3	=E3/\$D\$3	=F3/\$D\$3	=G3/\$D\$3	=H3/\$D\$3	=I3/\$D\$3
12	<b>S<sub>2</sub></b>	0	=C4-C\$3*\$D4/\$D\$3	0	=E4-E\$3*\$D4/\$D\$3	=F4-F\$3*\$D4/\$D\$3	=G4-G\$3*\$D4/\$D\$3	=H4-H\$3*\$D4/\$D\$3	=I4-I\$3*\$D4/\$D\$3
13	<b>S<sub>3</sub></b>	0	=C5-C\$3*\$D5/\$D\$3	0	=E5-E\$3*\$D5/\$D\$3	=F5-F\$3*\$D5/\$D\$3	=G5-G\$3*\$D5/\$D\$3	=H5-H\$3*\$D5/\$D\$3	=I5-I\$3*\$D5/\$D\$3
14	<b>d<sub>j</sub></b>		=C6-C\$3*\$D6/\$D\$3	0	=E6-E\$3*\$D6/\$D\$3	=F6-F\$3*\$D6/\$D\$3	=G6-G\$3*\$D6/\$D\$3	=H6-H\$3*\$D6/\$D\$3	=I6-I\$3*\$D6/\$D\$3

D
90
x2
=D3/\$D\$3
0
0
0

Столбец **D** (ранее выделенный)

Ячейка **D3** находилась на пересечении выделенных строки и столбца, таким образом, делим ее саму на себя

Строка **11** (дублирует ранее выделенную строку **3**)

Каждое предыдущее значение данной строки делим на значение ячейки **D3**

11	x2	90	=C3/\$D\$3	=D3/\$D\$3	=E3/\$D\$3	=F3/\$D\$3	=G3/\$D\$3	=H3/\$D\$3	=I3/\$D\$3
----	----	----	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
9		c <sub>j</sub>	60	90	85	0	0	0	B <sub>i</sub>
10	базис	c <sub>i</sub>	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	S <sub>3</sub>	
11	x <sub>2</sub>	90	0,5	1	0,75	0,27	0	0	500
12	S <sub>2</sub>	0		0					
13	S <sub>3</sub>	0		0					
14	d <sub>j</sub>			0					

Все остальные ячейки рассчитываются методом квадрата

Например, для ячейки **C12** (дублирует ячейку **C4**): =

$$C4 - C\$3 * \$D4 / \$D\$3$$

Перемножаем значения из выделенных ячеек,

стоящих на пересечении с ячейкой **C4**

(по горизонтали от **C4** – **D4**, по вертикали – **C3**)

и делим полученное значение на ячейку **D3**.

Все это необходимо вычесть из ячейки **D4**.

Таким образом, в данной формуле фиксируются параметры выделенных строки и столбца (**3** и **D**).

И формула копируется во все оставшиеся пустые ячейки.

КОРЕНЬ						=C4-C\$3*\$D4/\$D\$3	
	A	B	C	D	E		
1		c <sub>j</sub>	60	90	85		
2	базис	c <sub>i</sub>	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>		
3	S <sub>1</sub>	0	1,86	3,72	2,79		
4	S <sub>2</sub>	0	4,64	1,99	2,65		
5	S <sub>3</sub>	0	2,3	1,38	1,73		
6	d <sub>j</sub>		60	90	85		

7. Получаем пересчитанную таблицу

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
9		$c_j$	60	90	85	0	0	0	$B_i$
10	базис	$c_i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	
11	$x_2$	90	0,5	1	0,75	0,27	0	0	500
12	$S_2$	0	3,645	0	1,16	-0,53	1	0	425
13	$S_3$	0	1,61	0	0,70	-0,37	0	1	210
14	$d_j$		15	0	17,50	-24,19	0,00	0,00	-45000,00

8. Находим наибольшее значение  $d_j$ . 17,5 при переменной  $x_3$  (столбец **E**). Выделяем данный столбец. Также рассчитываем столбец **J**

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
9		$c_j$	60	90	85	0	0	0	$B_i$	$B_i/a_{ik}$
10	базис	$c_i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$S_1$	$S_2$	$S_3$		
11	$x_2$	90	0,5	1	0,75	0,27	0	0	500	666,67
12	$S_2$	0	3,645	0	1,16	-0,53	1	0	425	367,17
13	$S_3$	0	1,61	0	0,70	-0,37	0	1	210	302,16
14	$d_j$		15	0	17,50	-24,19	0,00	0,00	-45000,00	

J
$B_i/a_{ik}$
=I11/E11
=I12/E12
=I13/E13

9. Выбираем строку с наименьшим значением столбца **J** (Значение 302,16. Строка **13**). Выделяем ее.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
8		$c_j$	60	90	85	0	0	0	$B_i$	$B_i/a_{ik}$
9	базис	$c_i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$S_1$	$S_2$	$S_3$		
10	$x_2$	90	0,5	3,72	0,75	0,2688	0	0	500	666,67
11	$S_2$	0	3,65	0	1,16	-0,53	1,00	0,00	425,00	367,17
12	$S_3$	0	1,61	0	0,70	-0,37	0,00	1,00	210,00	302,16
13	$d_j$		15,00	0	17,50	-24,19	0,00	0,00	-45000,00	



## 10. Создаем новую таблицу и начинаем пересчитывать базис

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
15		<b>c<sub>j</sub></b>	<b>60</b>	<b>90</b>	<b>85</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>B<sub>i</sub></b>	<b>B<sub>i</sub>/a<sub>ik</sub></b>
16	<b>базис</b>	<b>c<sub>i</sub></b>	<b>x<sub>1</sub></b>	<b>x<sub>2</sub></b>	<b>x<sub>3</sub></b>	<b>S<sub>1</sub></b>	<b>S<sub>2</sub></b>	<b>S<sub>3</sub></b>		
17	<b>x<sub>2</sub></b>	90								
18	<b>S<sub>2</sub></b>	0								
19	<b>x<sub>3</sub></b>	85								
20	<b>d<sub>j</sub></b>									

S<sub>3</sub> (ячейка A19) заменяется на x<sub>3</sub> (из ячейки E10). В B19 записываем значение ячейки E9

## 11. Далее формулы для пересчета базиса

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
15		<b>c<sub>j</sub></b>	<b>60</b>	<b>90</b>	<b>85</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>B<sub>i</sub></b>
16	<b>базис</b>	<b>c<sub>i</sub></b>	<b>x<sub>1</sub></b>	<b>x<sub>2</sub></b>	<b>x<sub>3</sub></b>	<b>S<sub>1</sub></b>	<b>S<sub>2</sub></b>	<b>S<sub>3</sub></b>	
17	<b>x<sub>2</sub></b>	90	=C10-C\$12*\$E10/\$E\$12	=D10-D\$12*\$E10/\$E\$12	0	=F10-F\$12*\$E10/\$E\$12	=G10-G\$12*\$E10/\$E\$12	=H10-H\$12*\$E10/\$E\$12	
18	<b>S<sub>2</sub></b>	0	=C11-C\$12*\$E11/\$E\$12	=D11-D\$12*\$E11/\$E\$12	0	=F11-F\$12*\$E11/\$E\$12	=G11-G\$12*\$E11/\$E\$12	=H11-H\$12*\$E11/\$E\$12	
19	<b>x<sub>3</sub></b>	85	=C12/\$E\$12	=D12/\$E\$12	=E12/\$E\$12	=F12/\$E\$12	=G12/\$E\$12	=H12/\$E\$12	
20	<b>d<sub>j</sub></b>		=C13-C\$12*\$E13/\$E\$12	=D13-D\$12*\$E13/\$E\$12	0	=F13-F\$12*\$E13/\$E\$12	=G13-G\$12*\$E13/\$E\$12	=H13-H\$12*\$E13/\$E\$12	=I13-I\$12*\$E13/\$E\$12

E
85
<b>x<sub>3</sub></b>
0
0
=E12/\$E\$12
0

Столбец E (ранее выделенный)

Ячейка E12 находилась на пересечении выделенных строки и столбца, таким образом, делим ее саму на себя

Строка 19 (дублирует ранее выделенную строку 12)

Каждое предыдущее значение данной строки делим на значение ячейки E12

19	<b>x<sub>3</sub></b>	85	=C12/\$E\$12	=D12/\$E\$12	=E12/\$E\$12	=F12/\$E\$12	=G12/\$E\$12	=H12/\$E\$12	=I12/\$E\$12
----	----------------------	----	--------------	--------------	--------------	--------------	--------------	--------------	--------------

Формула для расчета C17 (дублирует C10) и всех последующих ячеек:

$$C10 - C\$12 * \$E10 / \$E\$12$$

В данной формуле фиксируются параметры выделенных строки и столбца (12 и E).

12. После пересчета получаем таблицу

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
15		c <sub>j</sub>	60	90	85	0	0	0	B <sub>i</sub>
16	базис	c <sub>i</sub>	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	S <sub>3</sub>	
17	x <sub>2</sub>	90	-1,237	3,72	0	0,6691	0	-1,079	273,38129
18	S <sub>2</sub>	0	0,9636	0	0,00	0,0829	1	-1,665	75,251799
19	x <sub>3</sub>	85	2,32	0,00	1,00	-0,53	0,00	1,44	302,16
20	d <sub>j</sub>		-25,54	0	0,00	-14,85	0	-25,18	-50287,77

Заметим, что все значения d<sub>j</sub> стали отрицательными, следовательно, план оптимален и не нуждается в дальнейшем перерасчете.

Значение целевой функции B<sub>i</sub> равно 50287,77 (берем модуль полученного значения).

В ячейках I17-I19 показано, сколько усл. ед. продукции необходимо изготовить для получения максимальной прибыли.

В базисе (столбец A) есть x<sub>2</sub> и x<sub>3</sub>. Таким образом, необходимо изготовить 273,38 усл. ед. 2м способом и 302,16 усл. ед. 3м.

Если необходимо получить результат в целых значениях (количество единиц продукции), тогда необходимо изготовить 273 усл. ед. 2м способом и 302 усл. ед. 3м. Прибыль будет равна 50240.