Логические основы ЭВМ

Базовые понятия

- Любое вычислительное устройство компьютера (например, двоичный сумматор) представляет собой **электронную схему**, состоящую из *простых логических элементов,* работа которых базируется на законах и правилах алгебры логики.
- **Алгебра логики** (*булева алгебра*) – раздел дискретной математики, изучающий *высказывания* и *логические операции* над ними.
- **Высказывание** – связное *повествовательное* предложение, о котором

- **Логическая формула (логическое выражение)** – это составное высказывание, включающее логические значения (**Истина** или **Ложь**), логические переменные, логические функции и логические операции.

Логические операции

В алгебре логики имеются три базовые операции:

– **логическое отрицание** (инверсия, НЕ, NOT**, ¬,** ⫟);

– **логическое умножение** (конъюнкция**, И**, **AND, &,** $\wedge$);

– **логическое сложение** (дизъюнкция, ИЛИ, OR, **|,** $\vee$, **+**).

Таблицы истинности для логических операций

В таблице истинности перечислены все возможные сочетания логических значений операндов вместе со значением результата операции для каждого из этих сочетаний.

Инверсия. Результат операции логического отрицания равен **1(истина)**, если значение переменной равно **0(ложь)** и, наоборот, результат ... переменная равна **1(и**...

A	*¬A*
0	**1**
1	**0**

Конъюнкция. Результат операции равен **1(истина)** только тогда, когда обе переменные равны **1(истина)**.

A	*B*	*A*⋀*B*
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Дизъюнкция. Результат операции равен **0(ложь)** только тогда, когда обе переменные равны **0(ложь)**.

A	*B*	*A*⋁*B*
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Импликация (логическое следование «если А, то В», →). Результат операции равен **0(ложь)** тогда и только тогда, когда первая переменная равна **1(истина)**, а вторая **– 0(лож**

A	*B*	*A→B*
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Эквивалентность (логическое равенство, **~**). Результат операции равен **1(истина)** тогда и только тогда, когда об… нно равны либо **0(ложь),** либо **1**

A	*B*	*A~B*
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Преобразование логических формул

Приоритеты выполнения логических операций при преобразовании логических формул следующие:

1) инверсия;
2) конъюнкция;
3) дизъюнкция;
4) импликация;
5) эквивалентность.

Для преобразования логических формул с целью их упрощения используются *законы алгебры логики*.

Приведем основные законы, используемые при упрощении логических выражений:

1) ***коммутативные***:

$$A \vee B = B \vee A; \quad A \wedge B = B \wedge A;$$

2) ***ассоциативные*** (***сочетательные***):

$$A \vee (B \vee \mathrm{C}) = (A \vee B) \vee \mathrm{C}; \; A \wedge (B \wedge \mathrm{C}) = (A \wedge B) \wedge \mathrm{C};$$

3) ***отрицание***:

$$A \vee \overline{A} = 1; \quad A \wedge \overline{A} = 0; \; \overline{\overline{A}} = A;$$

4) ***двойственность*** (***правило де Моргана***):

$$\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}; \quad \overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B};$$

5) ***дистрибутивные*** (***распределительные***):

$$A \vee (B \wedge \mathrm{C}) = (A \vee B) \wedge (A \vee \mathrm{C}); \; A \wedge (B \vee \mathrm{C}) = (A \wedge B) \vee (A \wedge \mathrm{C});$$

6) ***поглощение***:

$$A \vee (A \wedge \mathrm{B}) = A; \; A \wedge (A \vee \mathrm{B}) = A.$$

Пример 1. Упростить логические выражения.

a) $A \vee B \wedge (A \wedge B) = A \wedge B \wedge A \wedge \underbrace{B}_{0} = (A \wedge \underbrace{A) \wedge}_{\bar{B}} (B \wedge B) = 0$

b) $\underbrace{(A \wedge B)}_{1} \vee A \vee B \vee \underbrace{A}_{\bar{A}} = (A \wedge B) \vee (A \wedge B) \vee A =$
$= A \wedge (B \vee B) \vee A = (A \wedge 1) \vee A = A \vee A = 1$

c) $A \wedge B \vee B \vee C = A \vee B \vee (B \wedge C) = A \vee B \vee \underbrace{(B \wedge C)}_{\bar{B}} =$
$= A \vee B$

Пример 2. Составить таблицу истинности для логической функции $F = \overline{A} \wedge B \vee \overline{(A \wedge B)}$

Указать, при каких значениях переменных A и B логическая функция $F = 0$?

A	B	$\overline{A}$	$\overline{A} \wedge B$	$A \wedge B$	$\overline{A \wedge B}$	$F = \overline{A} \wedge B \vee \overline{(A \wedge B)}$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1	1
1	**1**	0	0	1	0	**0**

Ответ: логическая функция ***F*** **= 0** при ***A*** **= 1** и ***B*** **= 1**.

Логические элементы

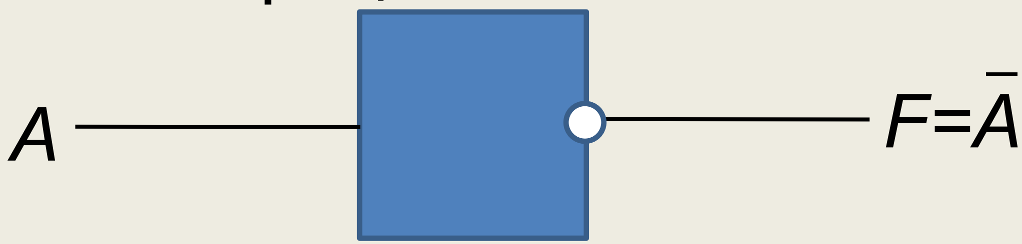
Логический элемент – это *простая электронная схема,* которая реализует элементарную логическую функцию.

На входы логического элемента поступают сигналы – значения аргументов, на выходе появляется сигнал – значение функции. Входные и выходные сигналы логических элементов могут иметь одно из двух логических состояний:

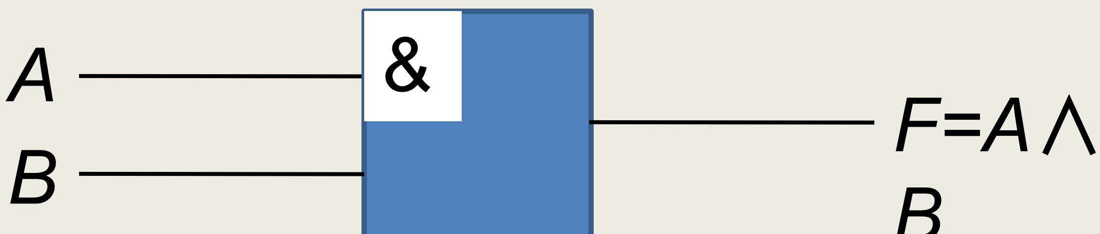
1 (истина) или **0** (ложь).

К *базовым* логическим элементам относятся электронные схемы: **НЕ, И, ИЛИ, И–НЕ, ИЛИ–НЕ**, а также ***триггер***.

Инвертор (схема **НЕ**) – реализует функцию логического отрицания.



Конъюнктор (схема **И**) – реализует функцию логического умножения.



Дизъюнктор (схема **ИЛИ**) – реализует функцию логического сложения.

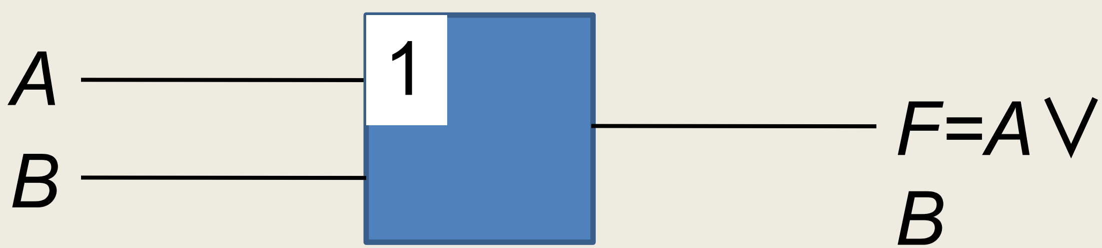
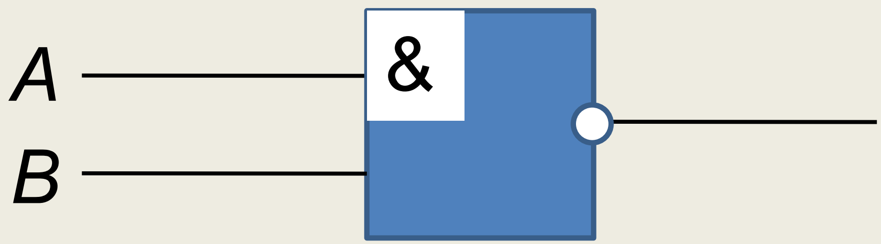
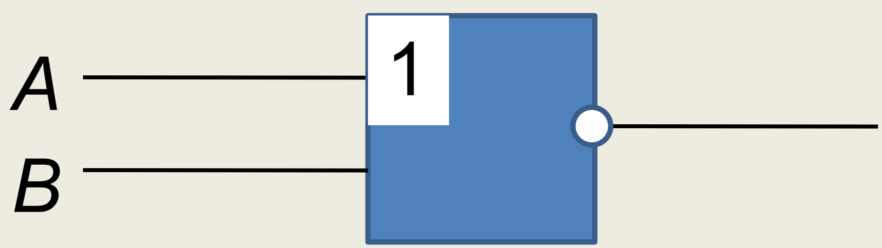


Схема И-НЕ – реализует функцию логического отрицания результата схемы **И**.



$F=\overline{A \wedge B}$

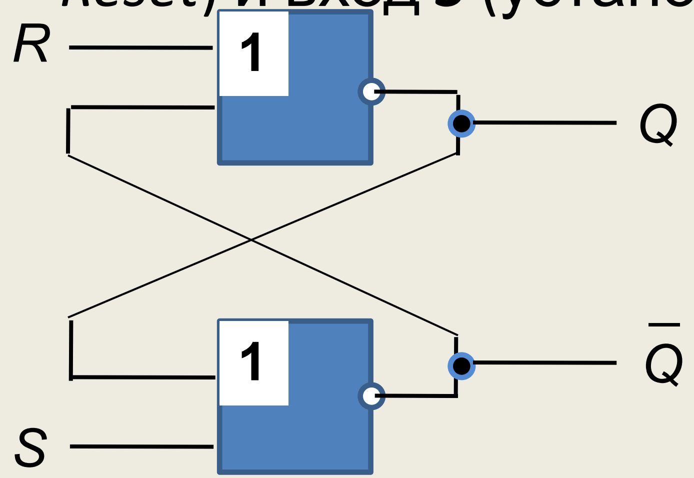
Схема ИЛИ-НЕ – реализует функцию логического отрицания результата схемы **ИЛИ**.



$F=\overline{A \vee B}$

RS-триггер – электронное устройство с двумя устойчивыми состояниями, предназначенное для хранения **1 бита** данных. Он содержит *защелку* из двух элементов **ИЛИ-НЕ** и два раздельных статических входа управления:

вход ***R*** (сброс – *Reset*) и вход ***S*** (установка – *Set*).



***R*=0; *S*=1; *Q*=1** – режим записи;

***R*=0; *S*=0** – режим хранения;

***R*=1; *S*=0; *Q*=1** – режим очистки триггера;

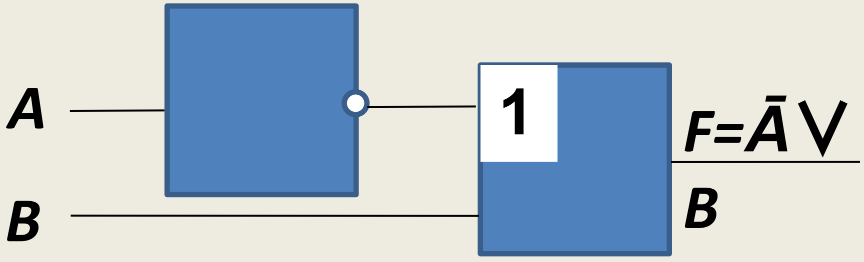
***R*=1; *S*=1** – запрещенный режим.

Пример 1. Построить схему логической функции импликации $F = A \rightarrow B$.

Решение

Логической функции импликации равносильна функция $\boldsymbol{F=\bar{A} \vee B}$. В этом можно убедиться, если для функции ***F*** построить таблицу истинности.

A	B	$\bar{A}$	$\bar{A} \vee B$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	**0**	**0**	**0**
1	1	0	1



Таким образом, схему логической функции ***F*** (импликации) описывают инвертор и дизъюнктор.

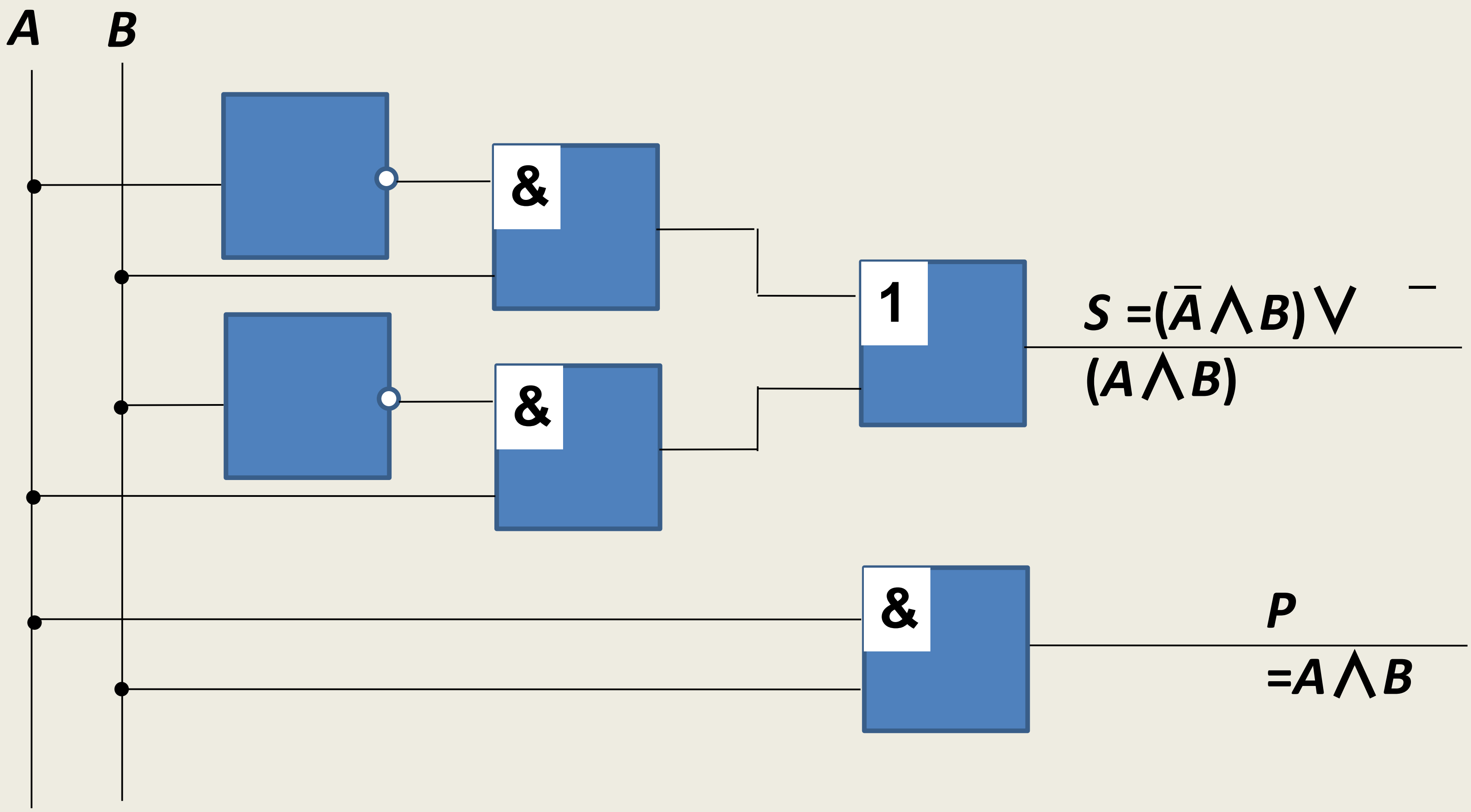
Пример 2. Таблица истинности для двоичного сумматора имеет следующий вид:

Входы		**Выходы**	
A	B	$S=(\overline{A}\wedge B)\vee(A\wedge\overline{B})$	$P=A\wedge B$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

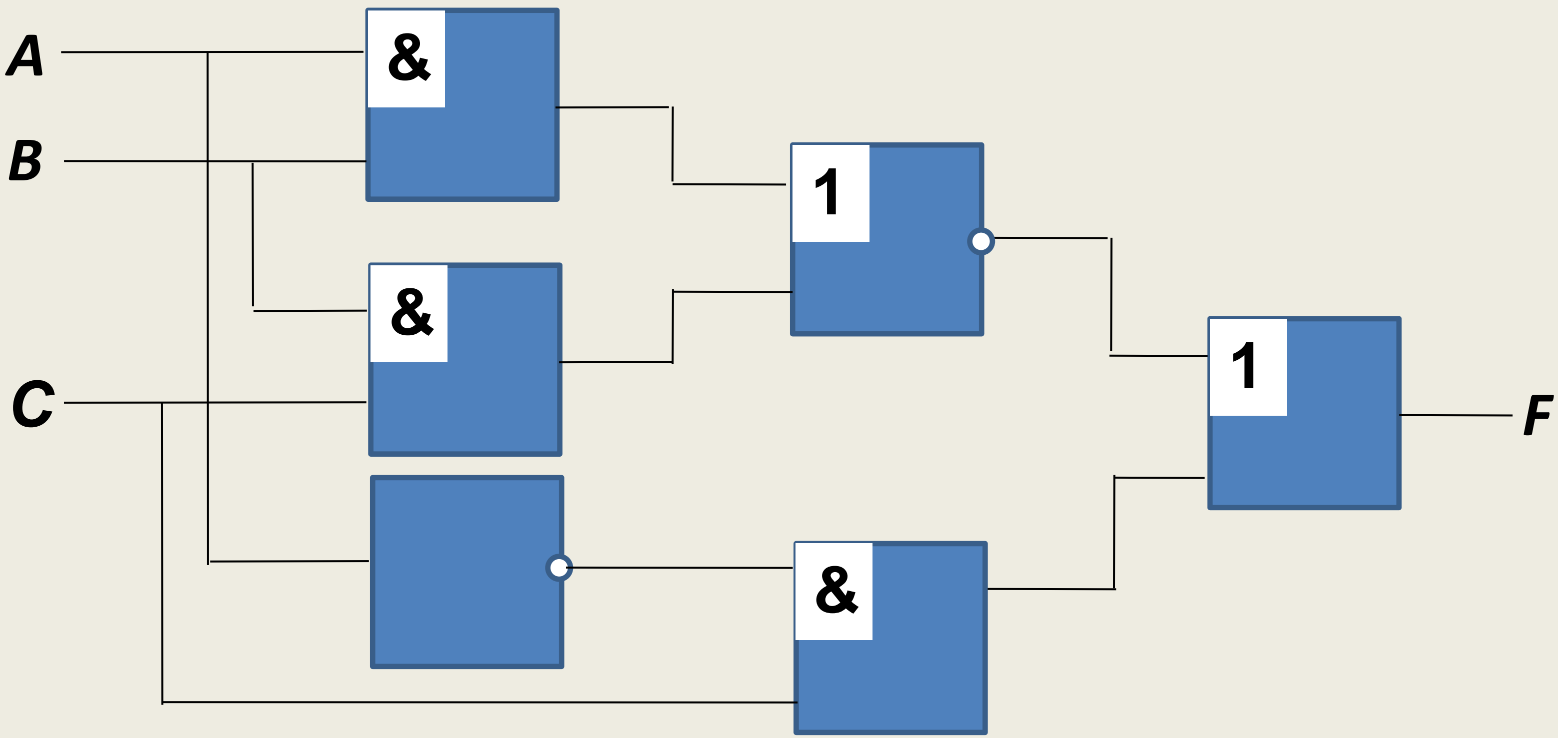
Для ебуется два инвертора, два конъюнктора и один дизъюнктор.

Для реализации схемы функции ***P*** потребуется один конъюнктор.

Логическая схема сумматора



Пример 3 **(самостоятельно).** Логическая функция ***F***, задана схемой. Записать для этой функции логическое выражение.



Ответ: $F=\overline{(A\wedge B)\vee(B\wedge C)}\vee(A\wedge C)$