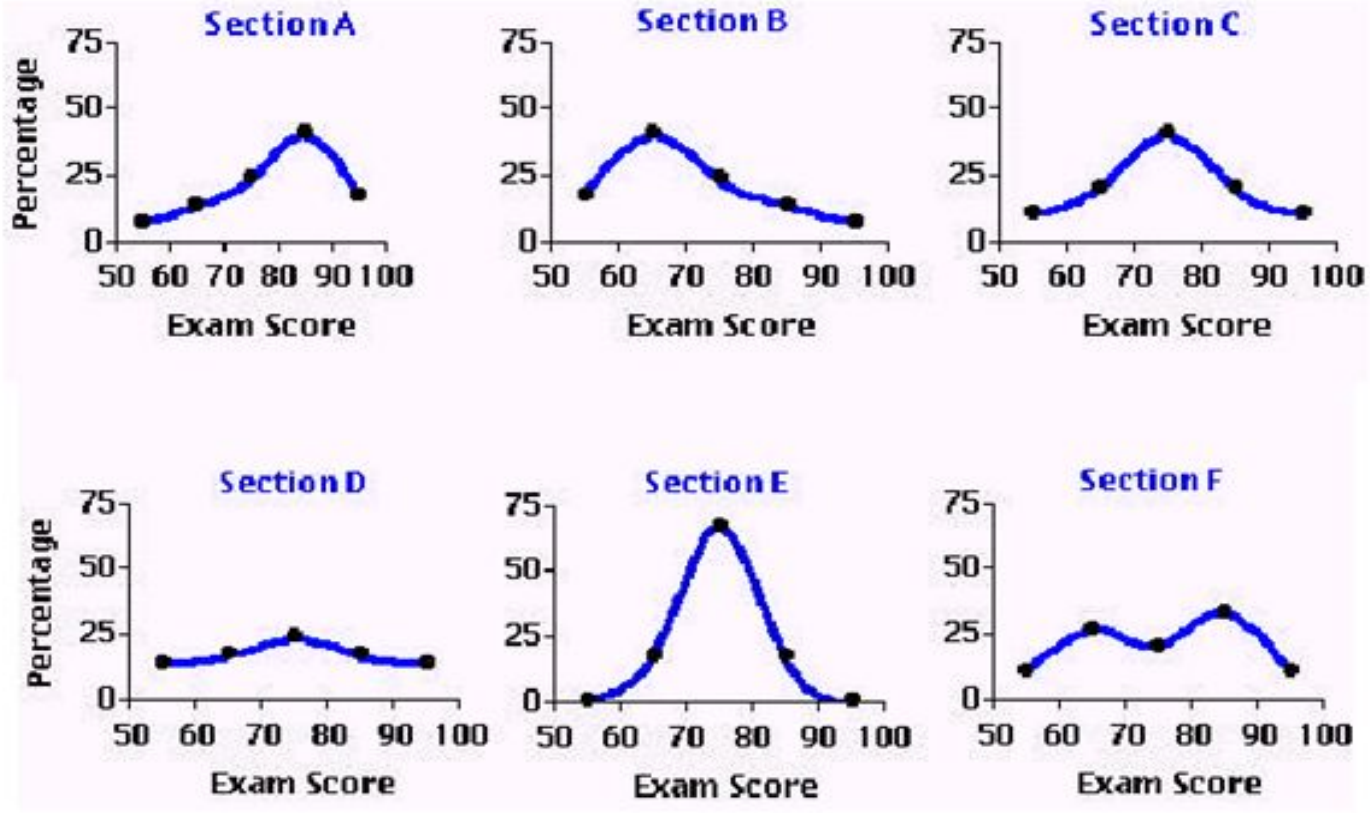
Описательная статистика

Параметры распределения

Асимметрия, эксцесс, модальность



Распределение оценок студентов по разным разделам дисциплины:

A – отрицательная асимметрия, B – положительная асимметрия, C – симметричное распределение, D – отрицательный эксцесс, E – положительный эксцесс, F –

Параметры главной тенденции:

«Каково типичное значение признака для данного распределения?»

- Среднее значение
- Мода
- Медиана

Среднее значение

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Значения	x_1	x_2	…	x_k
Частоты	p_1	p_2	…	p_k

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i p_i}{n}$$

Медиана (Me)

Для нахождения медианы необходимо **упорядочить** выборку по возрастанию и найти элемент, стоящий посередине вариационного ряда

Если n – нечетное число, то медианой будет элемент с номером i= (n+1)/2 в упорядоченном по возрастанию ряду. Например, в выборке объемом 7 медианой будет 4 элемент вариационного ряда:

3,1 3,8 4,2 5,7 6,3 7,2 7,9 Me = x_4 = 5,7

Если n – четное число, то медианой будет среднее значение двух элементов вариационного ряда с номерами i=n/2 и j=n/2+1. Например, при n=10 медианой будет среднее арифметическое 5 и 6 элементов вариационного ряда:

3,1 3,8 4,2 5,7 6,3 7,5 7,9 8,4 8,5 9,2

Me = (x_5 + x_6)/2 = (6,3+7,5)/2 = 6,9

Параметры разброса

Определяют различия в значениях признака у разных объектов

- Размах вариации
- Дисперсия
- Стандартное отклонение
- Коэффициент вариации

Дисперсия

Выборочная дисперсия:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X})^2}{n-1}$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} p_i (x_i - \overline{X})^2}{n-1}$$

Дисперсия генеральной совокупности:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{N}$$

- Стандартное отклонение

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{X})^2}{n-1}}$$

- Коэффициент вариации

$$V = \frac{s}{\bar{X}} \cdot 100\%$$

- V<33%  выборка однородная

Стандартная ошибка среднего

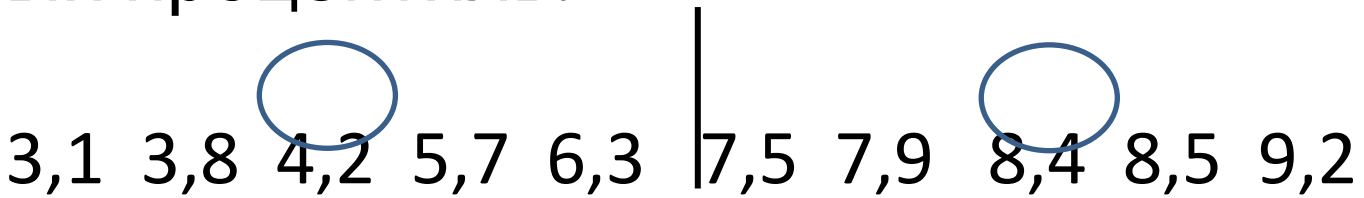
Разные выборки дают разные оценки параметров распределения. Для характеристики точности выборочных оценок используют *стандартную ошибку среднего:*

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Не является параметром разброса, только показывает точность оценки среднего. Чем больше выборка, тем меньше ошибка и выше точность

Процентили

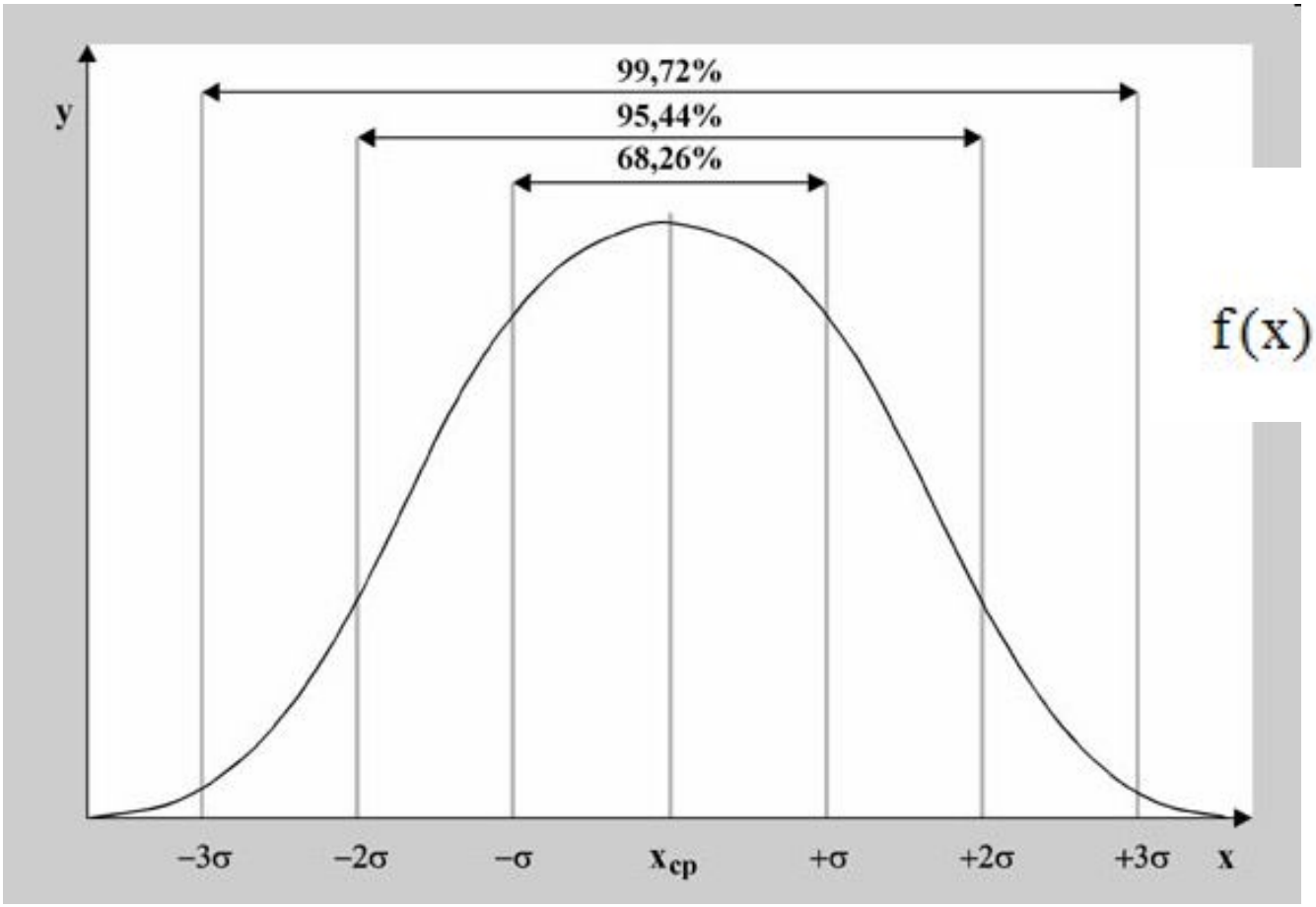
25-ый и 75-ый процентили (квартили) отсекают от распределения по четверти, т.е. одна четверть значений распределения будет не больше 25-го процентиля, а одна четверть – больше 75-го процентиля. Медиана – это 50-ый процентиль.



25% = 4,2

75% = 8,4

Нормальное распределение

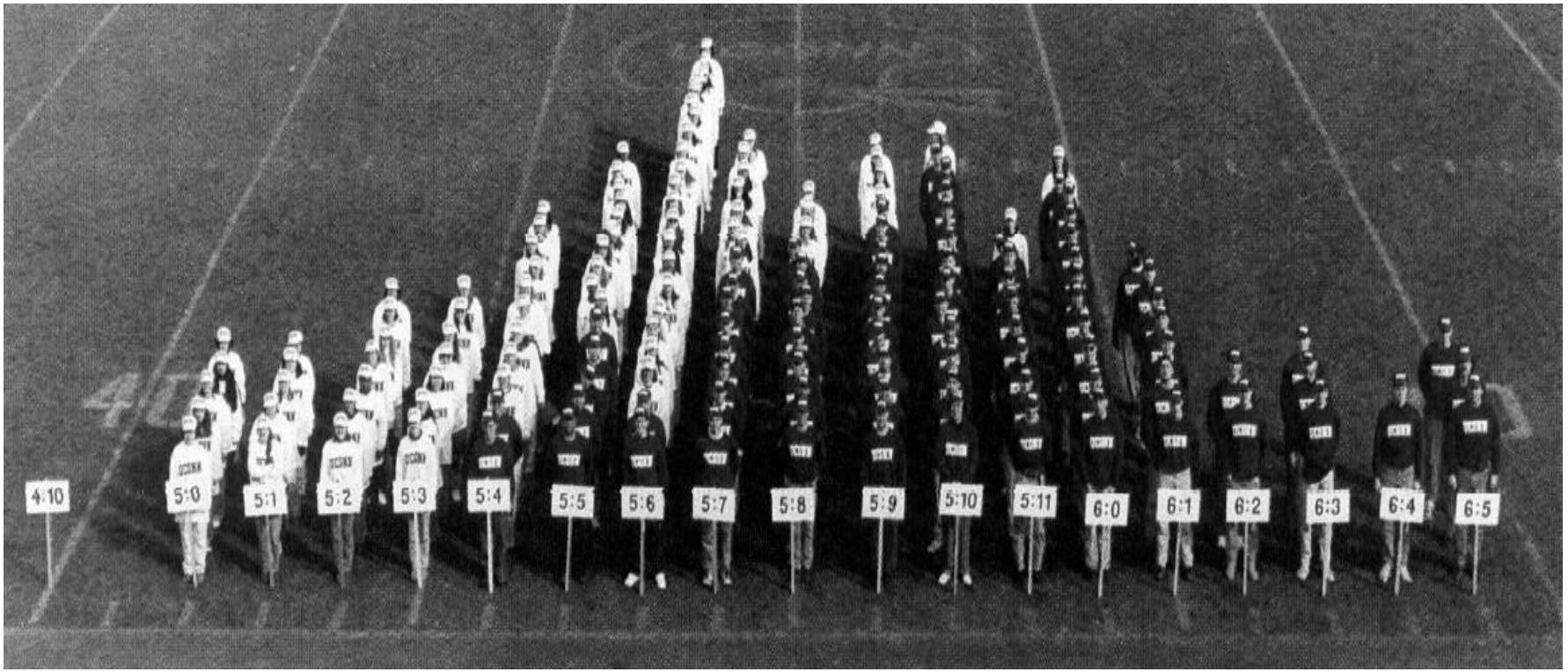


$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

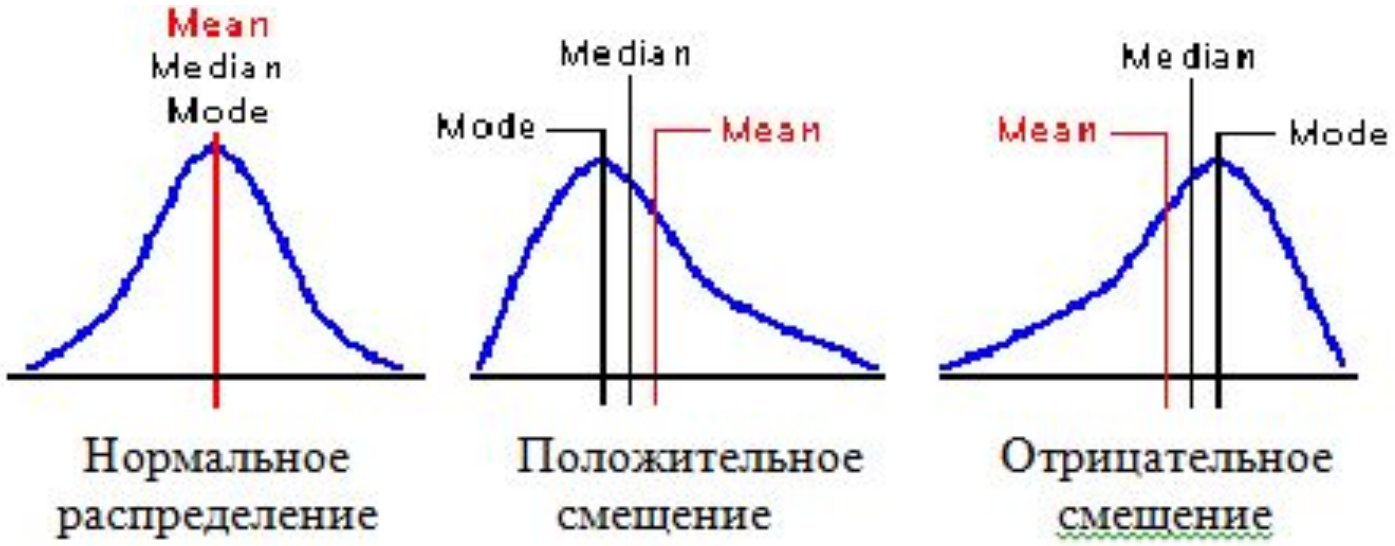
Свойства нормального распределения

- Полностью определяется средним значением и стандартным отклонением
- Мода, медиана и среднее значение совпадают
- Среднее значение характеризует положение кривой распределения и место ее максимума
- Стандартное отклонение характеризует форму кривой
- Зная среднее и стандартное отклонение, ориентировочно можно указать интервал практически всех значений изучаемой величины.

Распределение по росту



Симметричное и асимметричные распределения



Способы проверки соответствия распределения нормальному закону

1) Способы, основанные на визуальной оценке близости распределения признака к нормальному:

- построение гистограммы распределения признака
- построение графика функции распределения признака

2) Вычисление коэффициентов асимметрии и эксцесса. Для нормального распределения эти показатели равны 0.

3) Вычисление среднего, моды, медианы и процентилей

4) Статистические критерии для проверки нормальности распределения (Пирсона, Колмогорова-Смирнова,

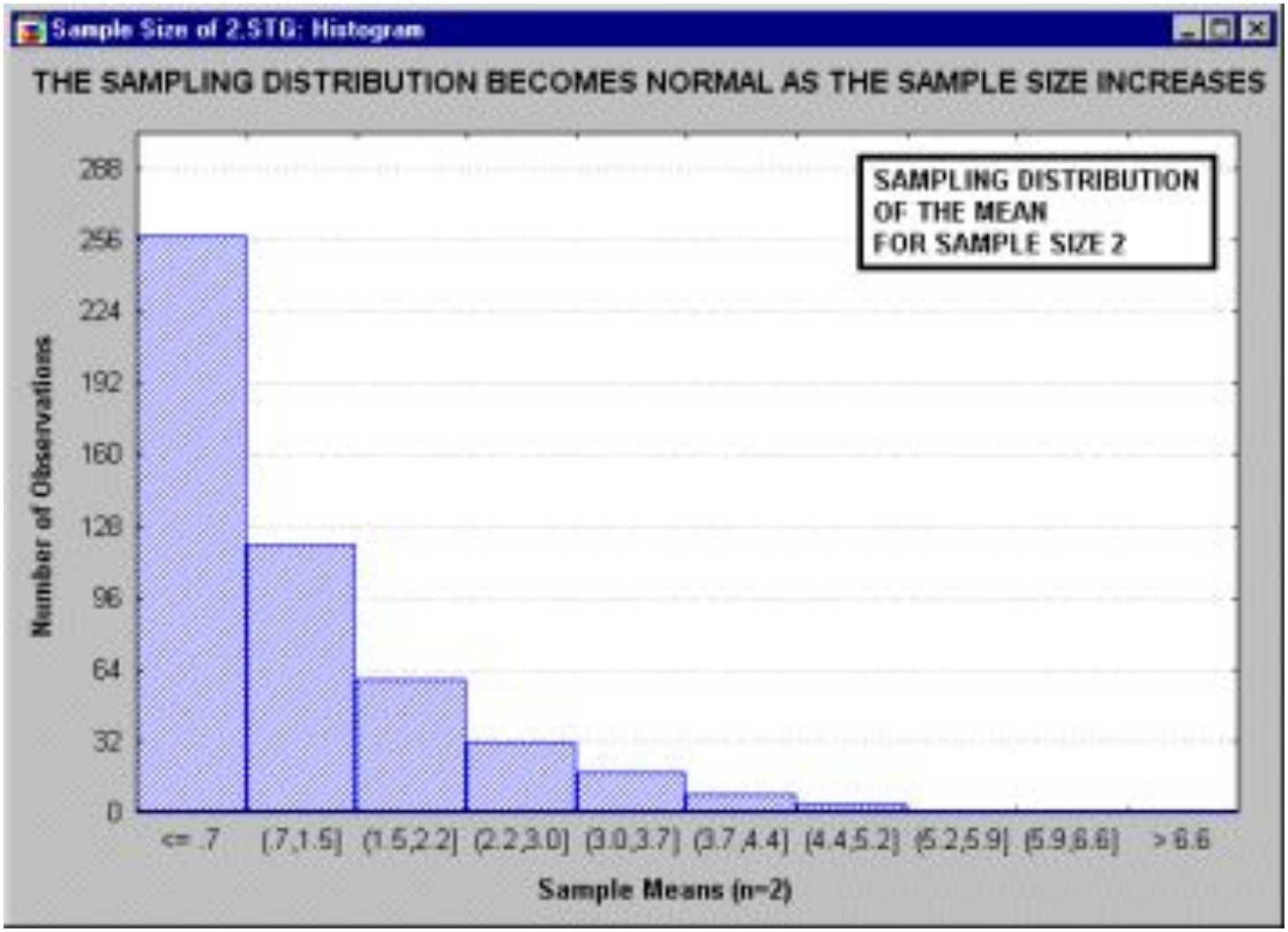
Проверка соответствия распределения нормальному закону

1) выборочные среднее, медиана и мода должны быть близки по значению и находиться примерно посередине между 25 и 75 процентилями;

2) интервал среднее ± два стандартных отклонения должен включать примерно 95% значений выборки и не должен содержать много значений, которых не может быть в данном распределении (*например, отрицательных, если речь идет о данных, которые могут принимать только положительные значения*).

Часто ли встречается нормальное распределение?

- Можно сказать, что из всех распределений в природе чаще всего встречается именно нормальное распределение – отсюда и произошло его название.
- Но для данных биомедицинских исследований это не всегда верно. Нормальное распределение встречается в биомедицинских признаках примерно в 20-25% (???).
- До тех пор пока выборка достаточно большая (например, 30 (100) или больше наблюдений), можно считать, что выборочное распределение нормально (???).


Sample Size of 2.STG: Histogram
THE SAMPLING DISTRIBUTION BECOMES NORMAL AS THE SAMPLE SIZE INCREASES
SAMPLING DISTRIBUTION
OF THE MEAN
FOR SAMPLE SIZE 2
Number of Observations
288
256
224
192
160
128
96
64
32
0
<= .7
(.7,1.5]
(1.5,2.2]
(2.2,3.0]
(3.0,3.7]
(3.7,4.4]
(4.4,5.2]
(5.2,5.9]
(5.9,6.6]
> 6.6
Sample Means (n=2)

Как правильно использовать параметры распределения для описания данных?

- Купе № 1: пассажиры возраста 19, 20, 21 год
- Купе №2: пассажиры возраста 54, 2 и 4 года

Каков средний возраст пассажиров каждого купе?

Пример: распределение возраста пациентов, заболевших менингитом, вызванным гемофильной палочкой

1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,20,50,71

n=23

Среднее = 7,

Стандартное отклонение = 17,6

Медиана = 1,

Мода = 1,

25 процентиль = 1,

75 процентиль = 1.

Описание количественных данных в зависимости от вида их распределения

- Для описания выборочного нормального распределения количественных признаков необходимо указывать: число наблюдений, среднее значение, стандартное отклонение.
- Для описания выборочного распределения количественных признаков, которое отличается от нормального, рекомендуется указывать: число наблюдений, медиану, 25 и 75 процентили (нижний и верхний квартили).

1: 21, 22, 22, 23, 23, 24, 24, 24, 25, 25, 25, 25, 26, 26, 26, 26, 27, 27, 28, 29, 30

2: 20, 20, 20, 20, 20, 20, 21, 21, 21, 21, 21, 21, 21, 21, 21, 33, 34, 34, 36, 37, 42

$n_1=n_2=21$

Среднее $_1$= **25,14**;

Ст. отклон.$_1$ = 2,31;

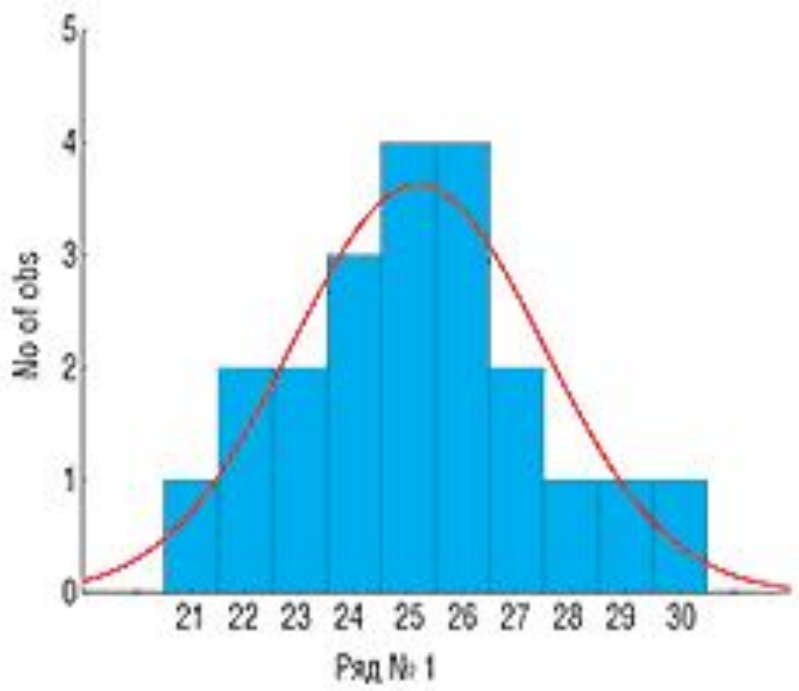
Медиана = 25; Мода=25 и 26

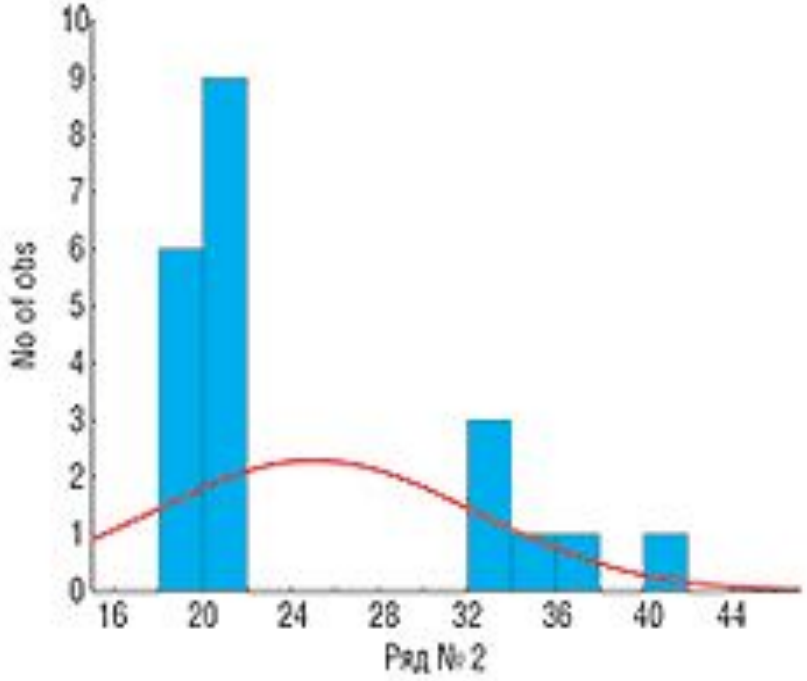
Среднее $_2$= **25,00**;

Ст. отклон.$_2$ = 7,32;

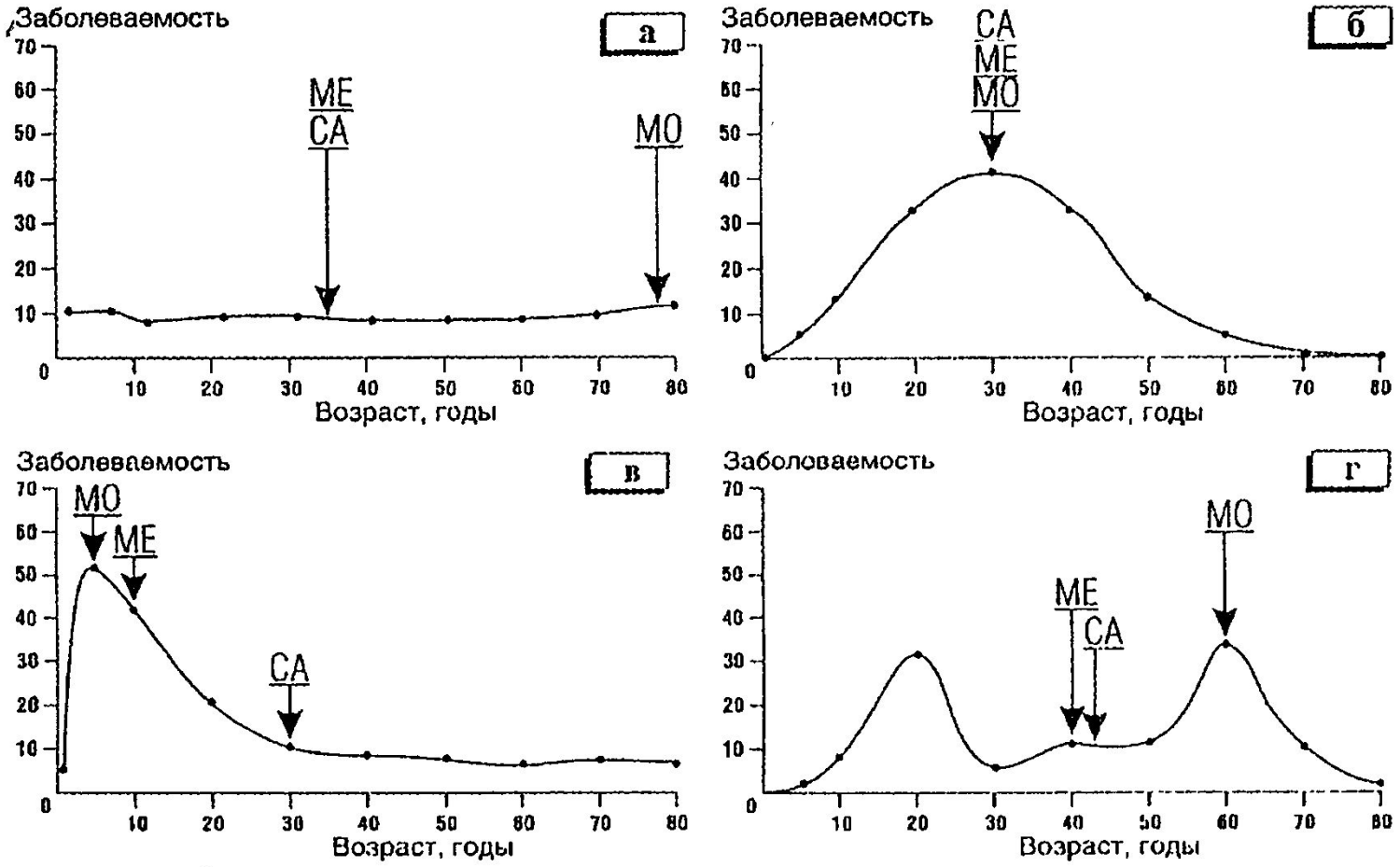
Медиана = 21; Мода 21

Визуальное представление 1 и 2 распределения





Примеры взаимного расположения параметров для разных видов распределений



Пример

- Найти параметры следующего выборочного распределения (клинические оценки тяжести серповидноклеточной анемии):
- 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 3 3 3 3 4 4 5 5 5 5 6 7 9 10 11
- Можно ли считать, что выборка извлечена из совокупности с нормальным распределением?

Таблица для расчета параметров распределения

Значения x_i	Частоты p_i	Накопленные частоты	$x_i \cdot p_i$	$x_i - \overline{X}$	$(x_i - \overline{X})^2$	$p_i \cdot (x_i - \overline{X})^2$
0	3	3	0	-3,09	9,55	**28,65**
1	11	14	11	-2,09	4,37	**48,07**
2	4	18	8	-1,09	1,19	**4,76**
3	4	22	12	-0,09	0,01	**0,04**
4	2	24	8	0,91	0,83	**1,66**
5	4	28	20	1,91	3,65	**14,6**
6	1	29	6	2,91	8,47	**8,47**
7	1	30	7	3,91	15,29	**15,29**
9	1	31	9	5,91	34,93	**34,93**
10	1	32	10	6,91	47,75	**47,75**
11	1	33	11	7,91	62,57	**62,57**
	$n=\sum p_i=33$		**$\sum=102$**			**$\sum=266,8$**

n= 33

Mo=1 (p=11)

Me=$x_{(33+1)/2}$ =x_{17}= 2

n/4=33/4=8,25≈8

25%=x_8= 1

3/4=3*33/4=24,75≈25

75%=x_{25}=5

$\overline{X} \pm 2 \cdot s$

3,09-2*2,89=-2,69;

3,09+2*2,89=8,87

Интервал: -2,69÷8,87

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i p_i}{n} = \frac{102}{33} = 3{,}09;$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} p_i (x_i - \overline{X})^2}{n-1} = \frac{266{,}8}{32} = 8{,}34;$$

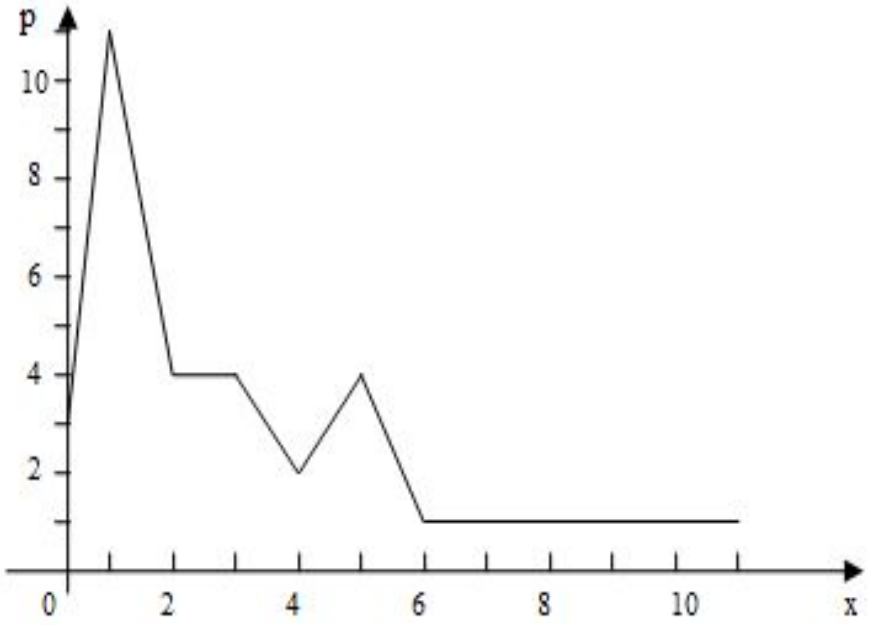
$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{8{,}34} = 2{,}89;$$

$$s_{\overline{X}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{2{,}89}{\sqrt{33}} = 0{,}5;$$

$$V = \frac{s}{\overline{X}} \cdot 100\% = \frac{2{,}89}{3{,}09} \cdot 100\% = 93{,}5\%$$

Проверка нормальности

1) Среднее, медиана и мода не совпадают, не находятся посередине между 25 и 75-м процентилями
2)Около четверти значений интервала среднее ± два стандартных отклонения имеют отрицательный знак, а в исходной выборке по самой природе изучаемого признака не может быть отрицательных значений



Выборка вряд ли извлечена из совокупности с нормальным законом распределения