

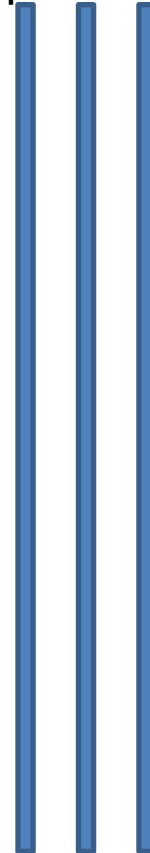
# Кристаллография, кристаллохимия, минералогия

Светлана Геннадьевна Титова

[sgtitova@mail.ru](mailto:sgtitova@mail.ru)



Конт.  
работы

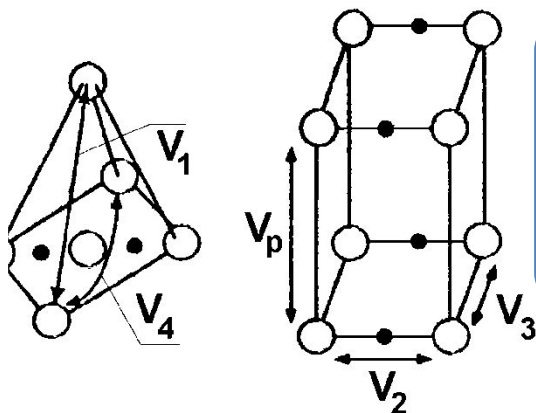


34

A large blue circle containing the number '34', representing the total number of assignments.

# Взаимосвязь кристаллографии с другими науками и техникой

## Кристаллография



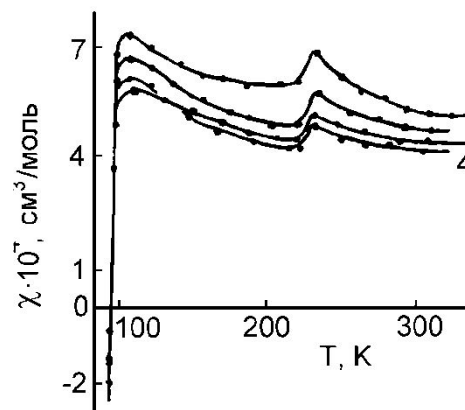
Структура

## Кристаллохимия, термодинамика и

№	Фаза	Название
1	$Al_2O_3$	Корунд
2	$(Mg_{0.595}Al_{0.405})(Al_{1.77}Mg_{0.14})O_4$	Шпинель
3	$SiO_2$	Кварц
4	$Ca_{12}Al_{14}O_{33}$	Майенит
5	$MgAl_2Si_2O_6 \cdot 4(OH)$	Магнезиокарфолит (гидроксид)
6	$MgO$	
7	$KO_2^{**}$	Калия оксид
8	$(Mg,Al)_9(Si,Al)_8O_{20}(OH)_{10} \cdot 4H_2O^*$	

Синтез  
Состав

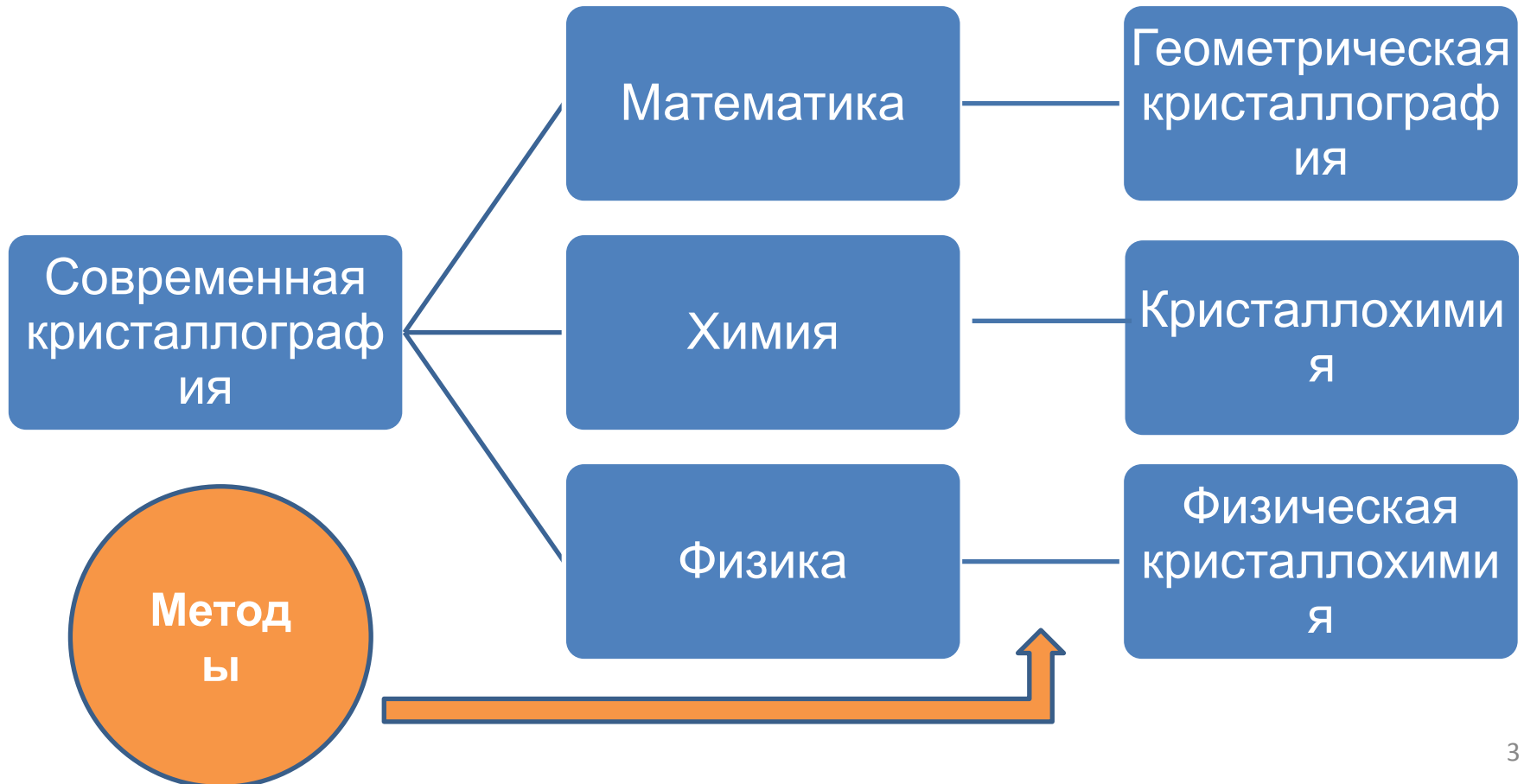
## Физика и Техника



Свойства

**Кристаллография** — наука о кристаллах, их структуре, возникновении и свойствах.

Исторически кристаллография возникла в рамках минералогии, как наука, описывающая идеальные кристаллы.



# Определения

- **Минерал** - гомогенное твердое тело, образованное природными процессами и обладающее закономерным расположением атомов, что устанавливает пределы для области изменения его химического состава и придает ему характерные физические свойства.
- **Минералогия** (от лат. *minera*— руда и *λόγος* — учение, наука)—наука о минералах - природных химических соединениях. Минералогия принадлежит к числу геологических наук, изучающих минералы, вопросы их генезиса, квалификации. Минералогия изучает состав, свойства, структуры и условия образования минералов.
- **Кристаллография** — наука о кристаллах, их структуре, возникновении и свойствах. Исторически кристаллография возникла в рамках минералогии, как наука, описывающая идеальные кристаллы. Кристаллография тесно связана с химией, физикой и математикой.

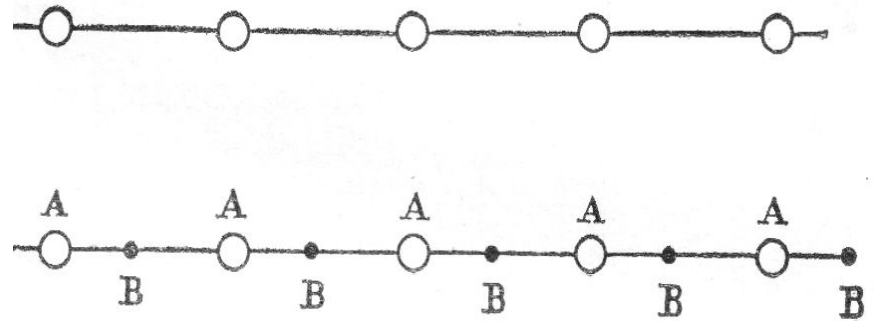
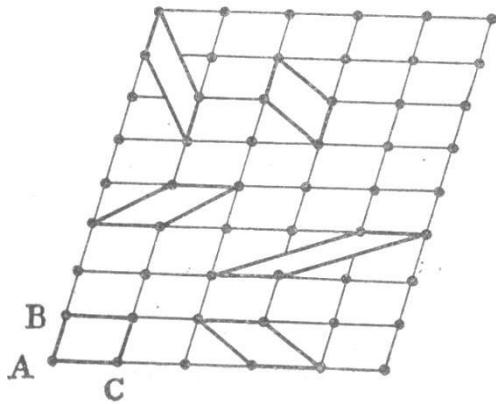
# Определения

- **Кристалл** — твёрдое вещество, имеющие естественную внешнюю форму правильных симметричных многогранников.
- **Элементы ограничения:** грани (плоскости), ребра (отрезки пересечения граней) и вершины (точки пересечения граней и ребер).



Формула Эйлера-  
Декарта  
**Грани + Вершины - Ребра = 2**

# Кристаллическая решетка



**КРИСТАЛЛИЧЕСКАЯ РЕШЕТКА** - пространственное периодическое расположение атомов или ионов в кристалле. Точки **КР**, в которых расположены атомы или ионы, называются узлами **КР**.

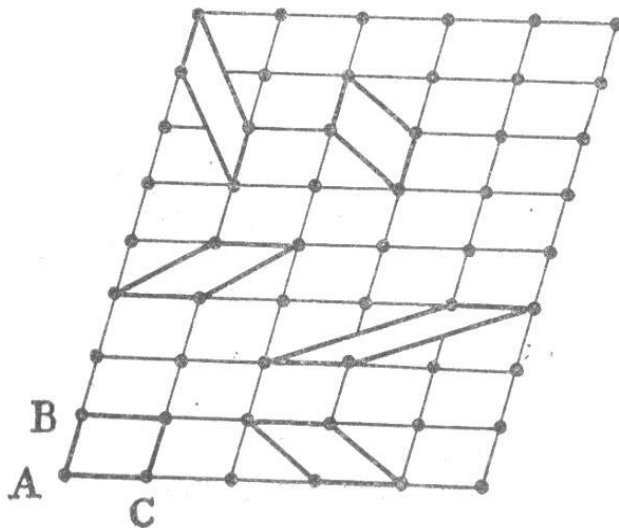
**Узел КР** - атом (ион), вакансия или группа атомов, составной элемент кристаллической решетки.

**Одномерный ряд** - (прямая) проходящая в кристаллической решетке через два произвольно выбранных одинаковых узла.

**Плоская сетка** – совокупность узлов, расположенных в вершинах параллелограммов, ориентированных параллельно, смежных по целым сторонам, нацело покрывающих плоскость.

- Расстояние между двумя ближайшими узлами называется **периодом идентичности**. При смещении на период идентичности узел совмещается с аналогичным узлом. Вектор, равный или кратный периоду идентичности, называется **трансляцией**.
- **Примитивная ячейка** – фигура,

идентичные узлы только в



Доказать, что площади ПЯ плоской сетки равны; объемы ПЯ трехмерной решетки равны.

# Элементы симметрии

I конгруэнтные – прямое равенство (поворотные оси  $L_n$ );

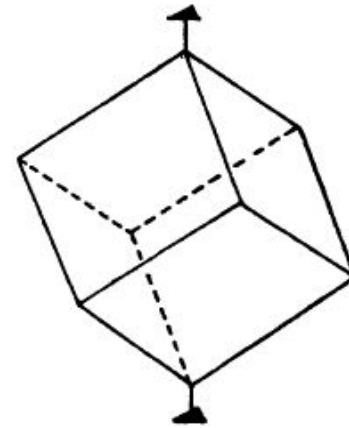
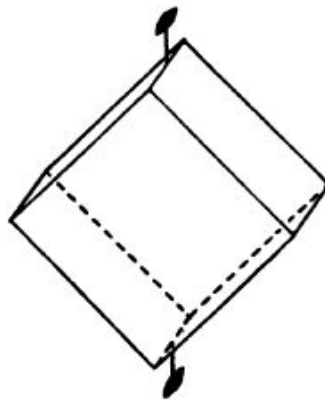
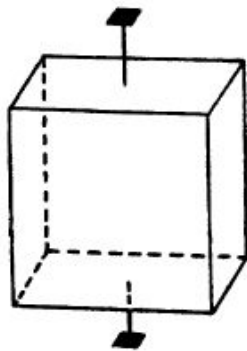


**Поворотная ось** - прямая, проходящая через центр тяжести фигуры, при повороте вокруг которой на определенный угол фигура совмещается сама с собой.

**Центр грани**

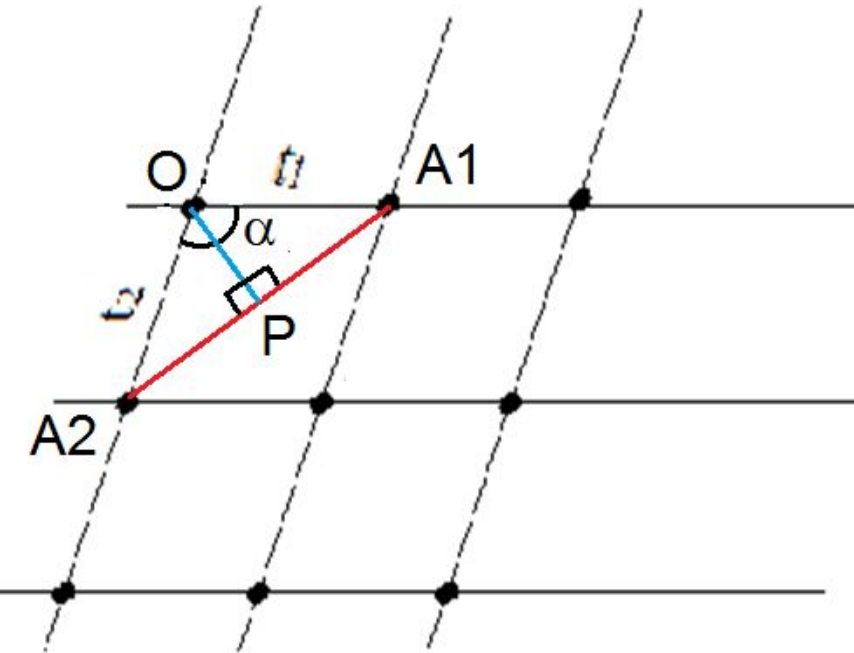
**центр ребра**

**вершины**

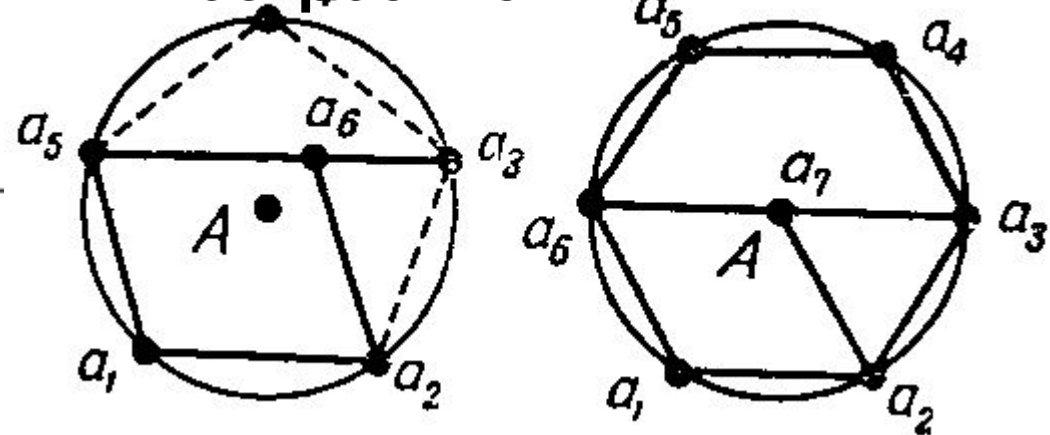




# Доказать, что в кристаллах $n \neq 5$ и $n \leq 6$



## Доказательство построением



Рассмотрим плоскую сетку узлов.

Пусть  $t_1 = t_2 = t$  – ПЭЯ (минимальное расстояние между эквивалентными узлами),  
Точка  $O$  – поворотная ось с углом поворота  $\alpha$  ( $n = 360/\alpha$ ).

Расстояние  $d = A_1 - A_2$  должно превышать ПЭЯ. Тогда

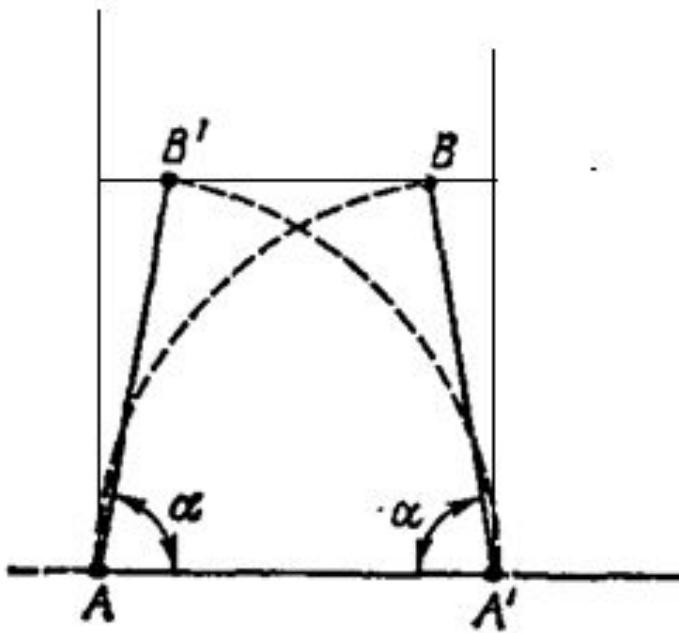
$$d \geq t.$$

$$d = 2t \times \sin(\alpha/2). \quad \text{Тогда } 2t \sin(\alpha/2) \geq t$$

Следовательно,  $2 \sin(\alpha/2) \geq 1$ ,  $\sin(\alpha/2) \geq 1/2$ ,  $\alpha/2 \geq 30^\circ$ ,  $\alpha \geq 60^\circ$ , то есть  $n \leq 6$ .

Пусть ось симметрии с углом поворота  $\alpha=2\pi/n$  перпендикулярна плоскости в узле  $A$ . Тогда в ряду узлов  $A, A' \dots$  в каждом узле находится такая же ось,  $AA' = AB' = a$ , где  $a$  - трансляция. При поворотах вокруг этих осей формируется параллельный ряд узлов  $B, B', \dots$ , причем  $BB' = Na$ .

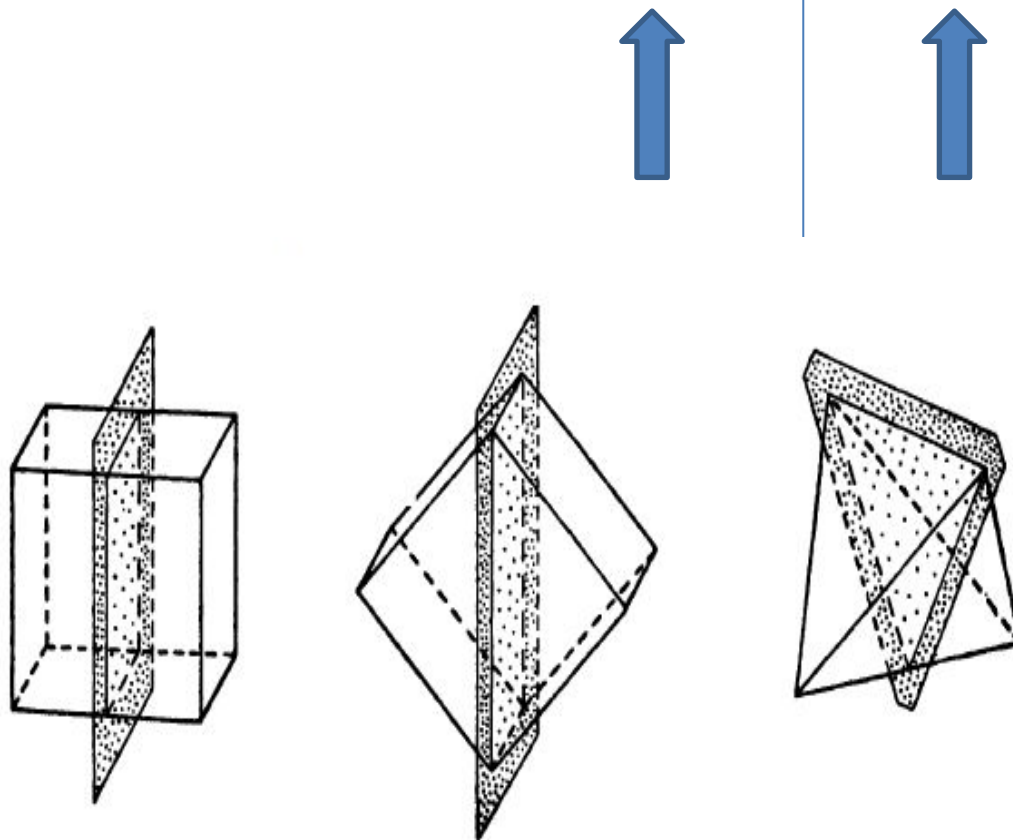
$BB' = a - 2a \cos \alpha$ , откуда  $a - 2a \cos \alpha = Na$  и  $\cos \alpha = (1 - N)/2$ . При условии  $-1 < \cos \alpha < +1$  находим возможные значения  $n$ :



$N$	-1	0	1	2	3
$\cos \alpha$	1	1/2	0	-1/2	-1
$\alpha$	$0^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$180^\circ$
Порядок оси симметрии	1	6	4	3	2

## II энантиоморфные (с участием зеркального отражения) – меняют хиральность

**Плоскость симметрии (P)** – делит фигуру на две зеркально равные части.



Где  
проходят:  
Через центры  
граней,  $\perp$

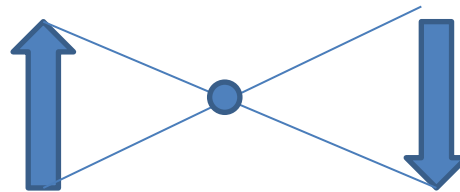
Перпендикулярно  
ребрам через их  
середины

Через вершины

## II энантиоморфные (с участием зеркального отражения) – меняют хиральность

**Центр инверсии (С)** – точка, совпадающая с центром тяжести фигуры, при отражении в которой фигура совмещается сама с собой.

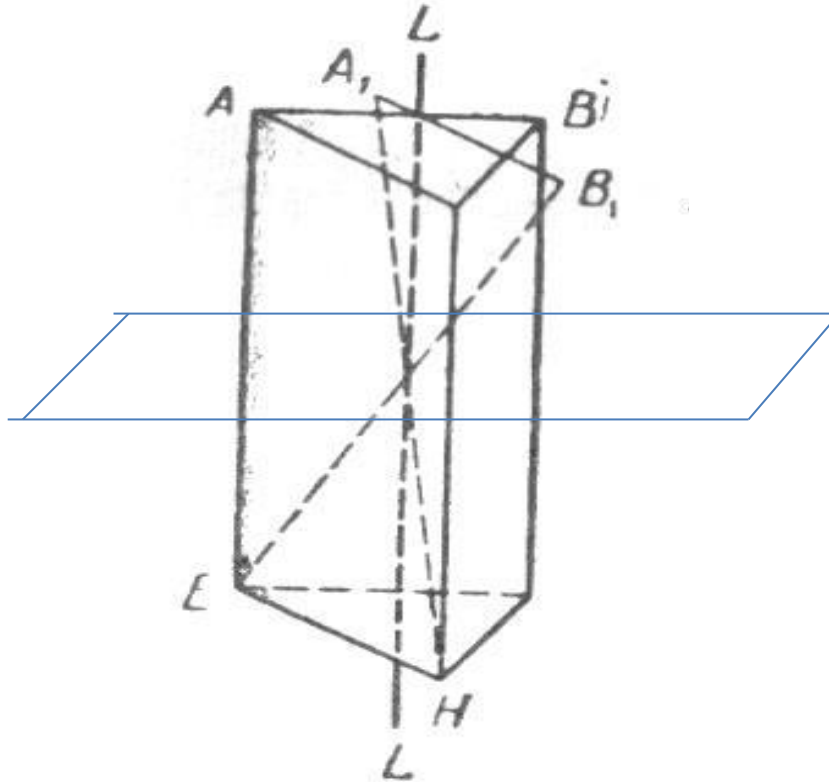
Признак: каждой грани можно найти симметричную равную грань.



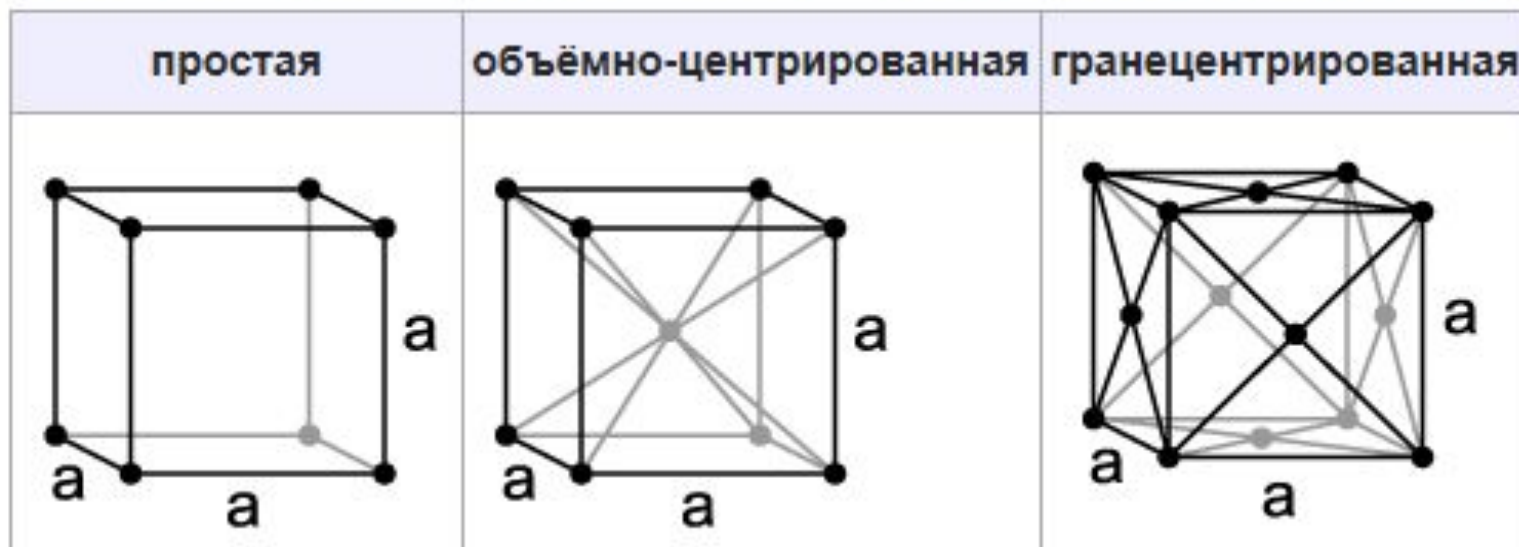
## II энантиоморфные (с участием зеркального отражения)

**Инверсионные оси** – сочетание поворотной оси и отражения в центре тяжести:  $L_{in} = L_n C$

$$L_{i1} = C, \quad L_{i2} = P, \quad L_{i6} = L_3 P (\perp)$$



**Элементарная ячейка** - минимальная ячейка, обладающая всеми элементами симметрии, характерными для кристалла (без учета дефектов).



### Правила Браве выбора ЭЯ

- Симметрия ЭЯ должна соответствовать симметрии кристалла.
- ЭЯ должна иметь максимальное число равных ребер и равных углов.
- При выполнении двух первых правил, ЭЯ должна иметь минимальный объем.

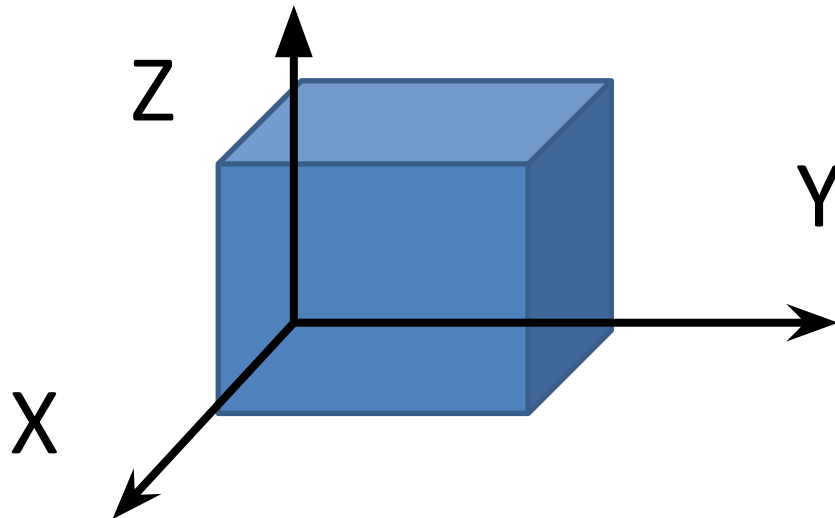
# Координаты атомов / узлов

простая	объёмно-центрированная	гранецентрированная
		

1 атом: 000

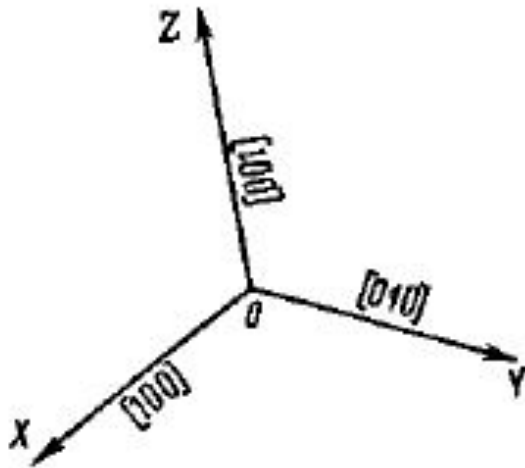
2 атома: 000,  $\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$

4 атома : 000,  
 $\frac{1}{2} \frac{1}{2} 0$ ,  $\frac{1}{2} 0 \frac{1}{2}$ ,  $0 \frac{1}{2} \frac{1}{2}$



# Индексы и символы

## Символ рядов (ребер)



Выбирают узел:

- 1) принадлежащий ряду
- 2) ближайший к началу координат.

Координаты этого узла - символ ряда.

Указывается в одинарных квадратных скобках [xyz].

Для связанных элементами симметрии рядов символы записывают в угловых скобках <xyz>.



# Индексы и символы

## Символы плоскостей (граней)

Плоскость задается тремя точками.

Находим точки, в которых плоскость пересекает оси координат:

- 1) Они должны принадлежать плоскости
- 2) Быть ближайшими к началу координат (но не совпадать с началом координат).

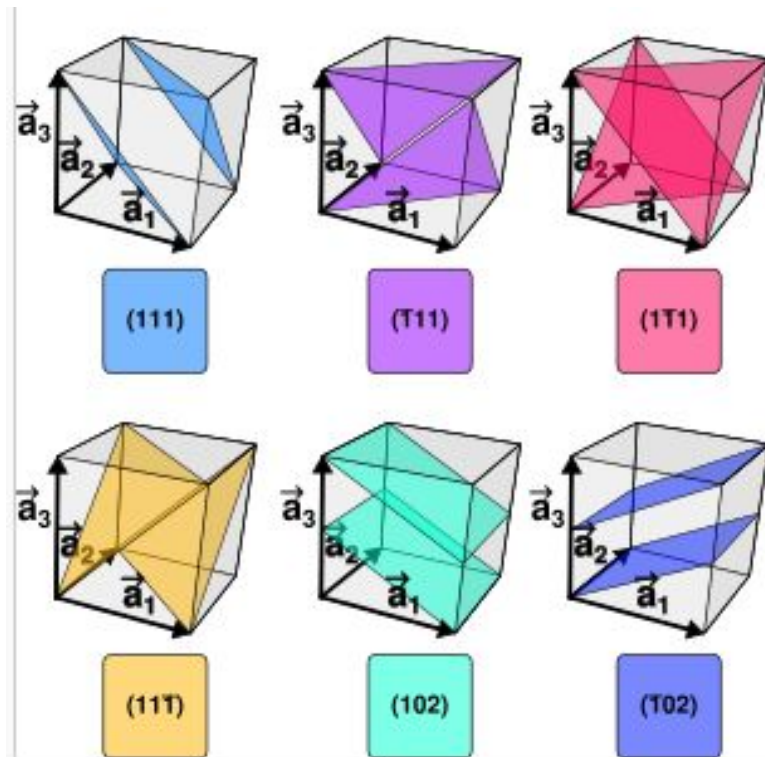
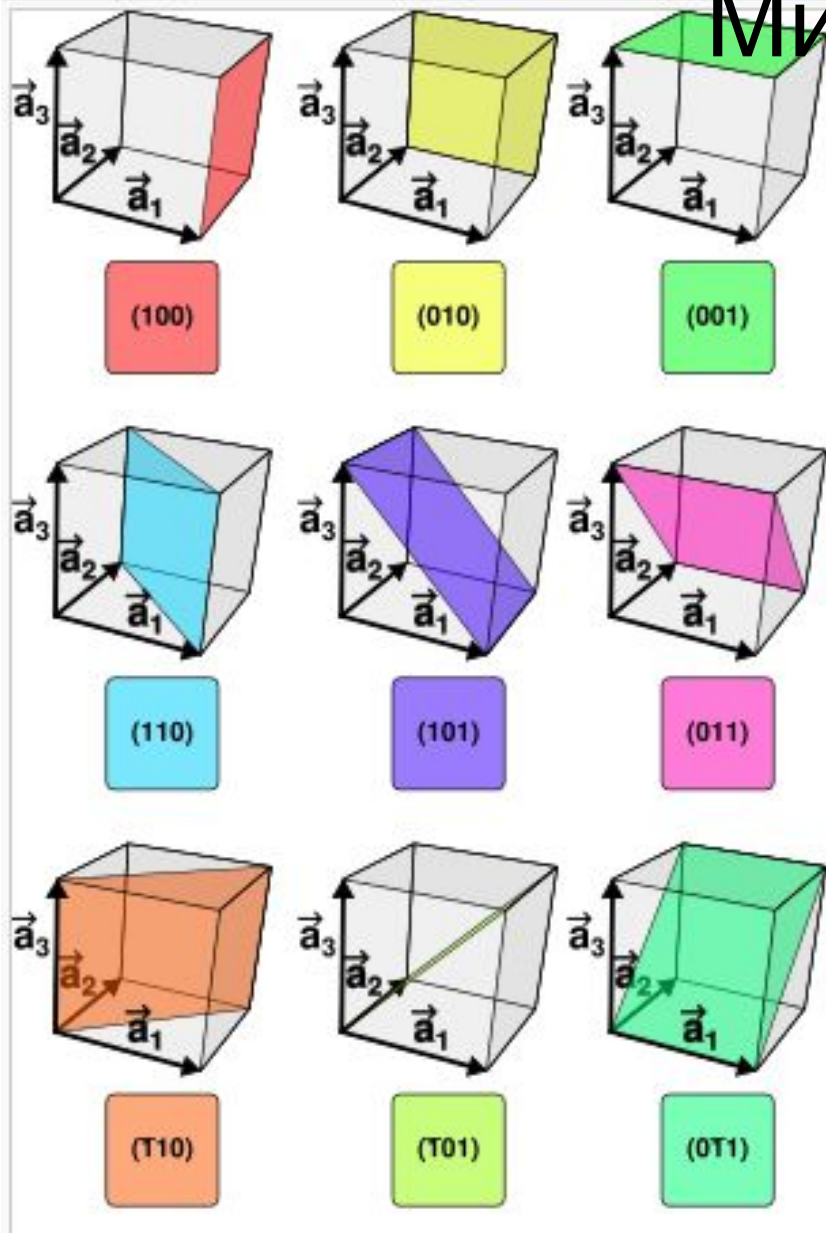
Записываем координаты пересечения плоскости осей X, Y, Z;

Записываем величины, обратные найденным (в круглых скобках). Это **индексы Миллера для плоскости (hkl)**.

# Координаты плоскости, индексы

## Миллера

1) Берем плоскость, ближайшую к началу координат, но не проходящую через него.



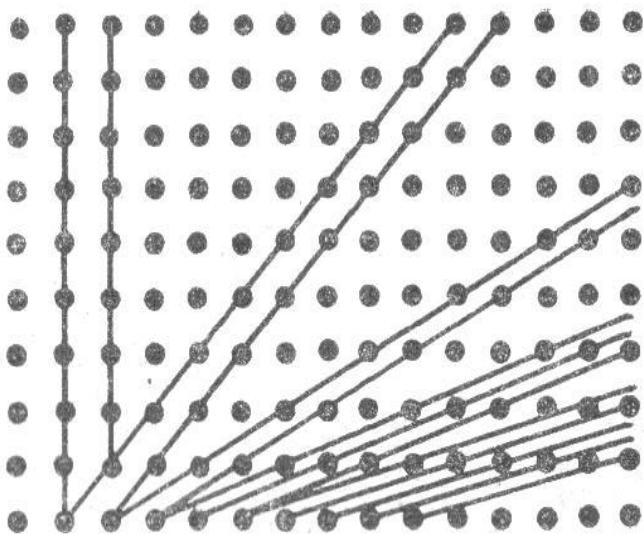
2) Запишем координаты, отсекаемые плоскостью на осях  $x$   $y$   $z$  координат:

3) Обратные величины отсекаемым координатам – индексы Миллера

$$\frac{1}{x} \quad \frac{1}{y} \quad \frac{1}{z} \quad \Rightarrow \quad (h \ k \ l) \quad 18$$

Трансляционный сдвиг в направлении, не совпадающем с направлением одномерного ряда, формирует **семейство рядов**.

Аналогично, в 3-мерном кристалле формируются **семейства плоскостей**. **Индексы Миллера для рядов или плоскостей одного семейства одинаковы.**



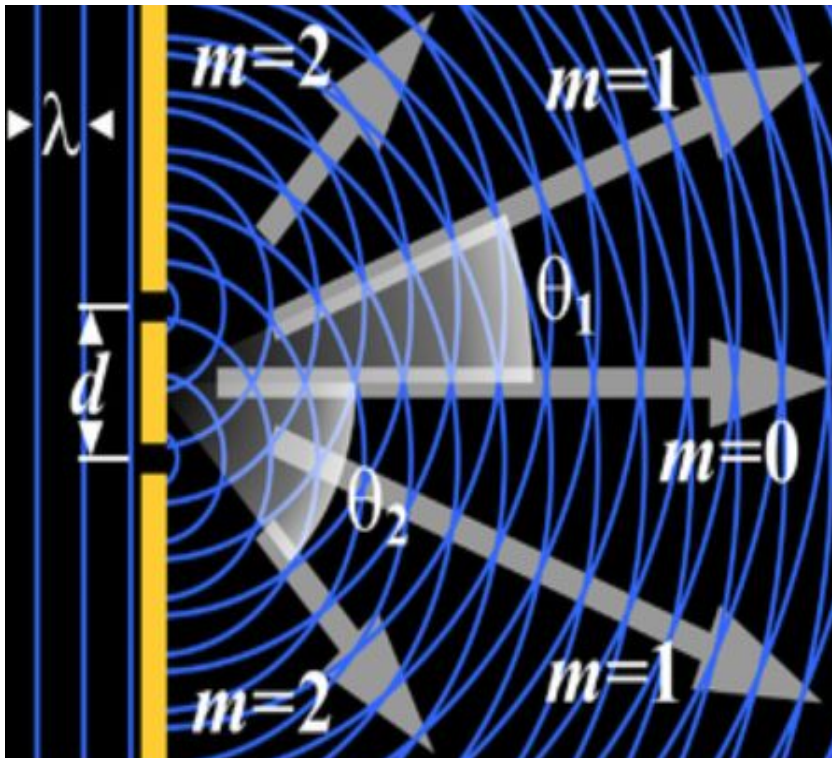
**Ретикулярная плотность** (греч. ретикула-= сетка) – двумерная плотность частиц в конкретной плоскости.

Чем меньше расстояние между узлами (чем выше ретикулярная плотность узлов) в ряду/плоскости, тем больше расстояние между рядами/плоскостями, тем меньше индексы Миллера для ряда/плоскости:  $d \uparrow \quad hkl \downarrow$

# Закон Браве

- Морфологическая значимость грани, то есть ее относительное развитие на кристалле, пропорциональна ее ретикулярной плотности. То есть, кристалл при росте покрывается гранями с наибольшей ретикулярной плотностью.
- Спайность кристалла (способность скалываться по определенным плоскостям под действием удара или давления), как правило, происходит по плоскостям с наибольшей ретикулярной плотностью.

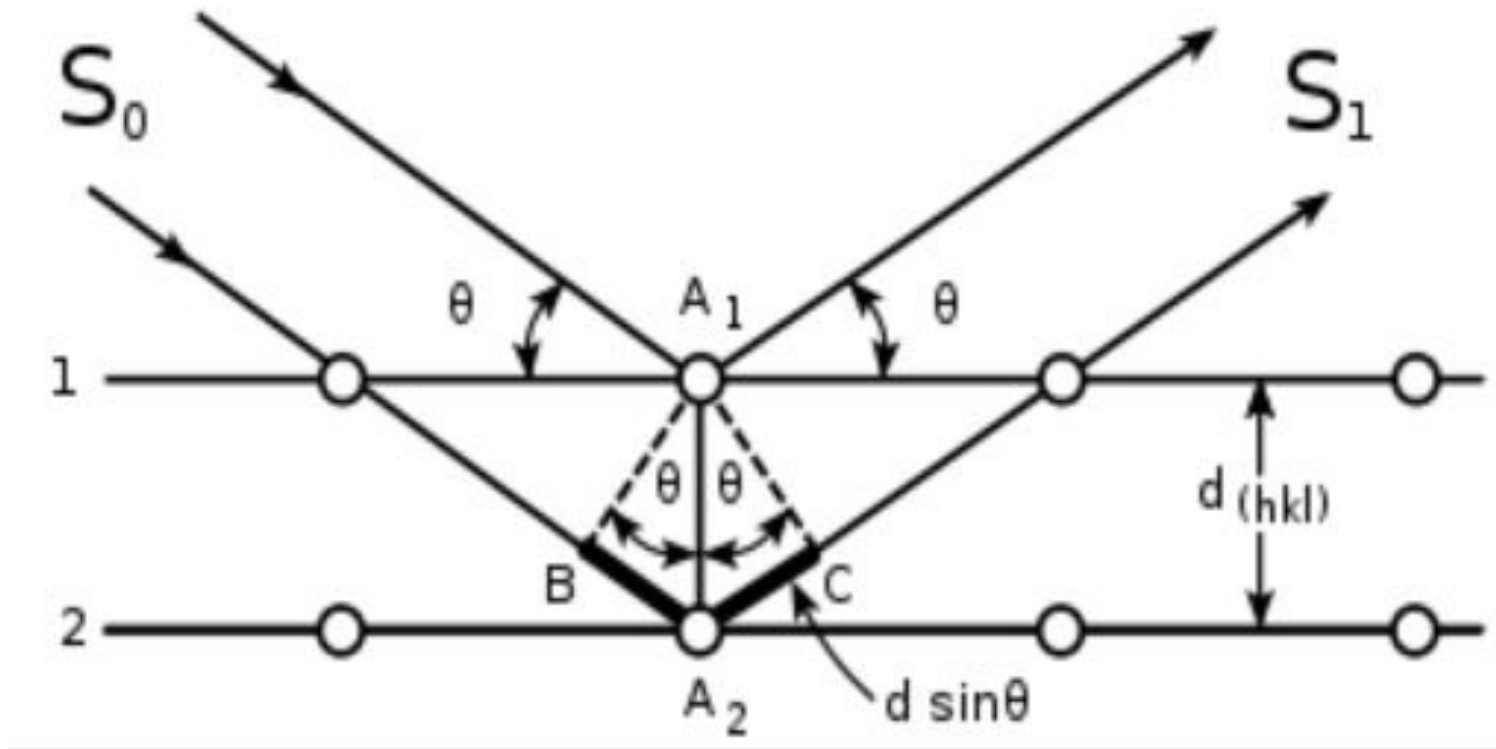
# Дифракция



**Дифракция** - огибание волной препятствия, отклонение от геометрической оптики. Необходимое условие – размер препятствия по порядку величины должен быть равен длине волны излучения.

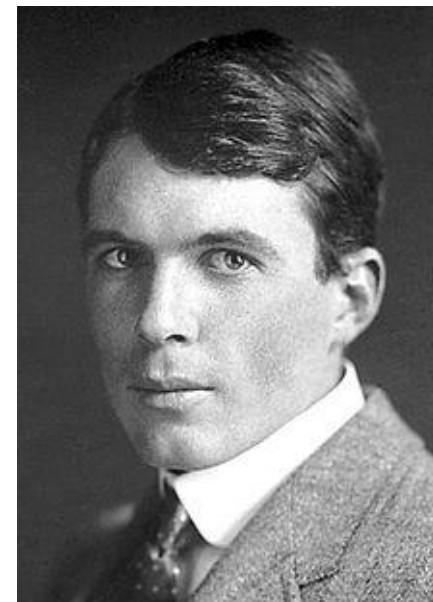
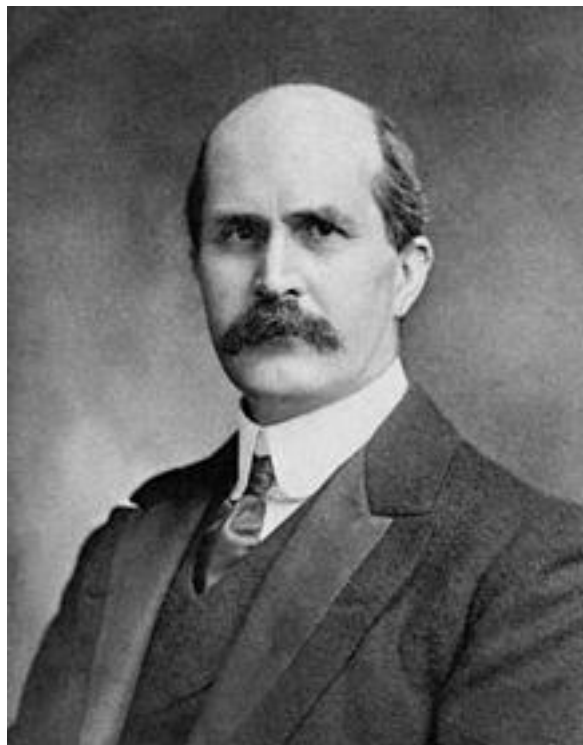
**Интерференция** – сложение интенсивностей волн. Условие – когерентность (совпадение длины волны и фазы волны),

# Уравнение Вульфа-Бреггов

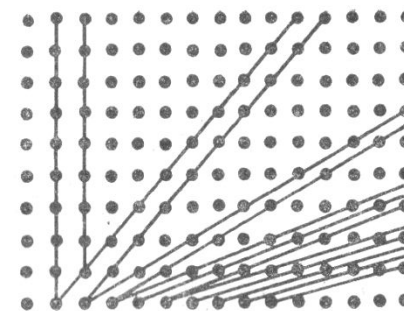


$$2d \sin \theta = n\lambda$$

Уравнение получило своё название в честь отца и сына Бреггов (Уильям Генри и Уильям Лоренс), которые открыли дифракцию рентгеновских лучей на кристаллах в 1913 году. В 1915 году они получили Нобелевскую премию по физике за это открытие.



$$2d \sin \theta = n\lambda$$



Квадратичные формы:  
кубической

$$d = \frac{a}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}}$$

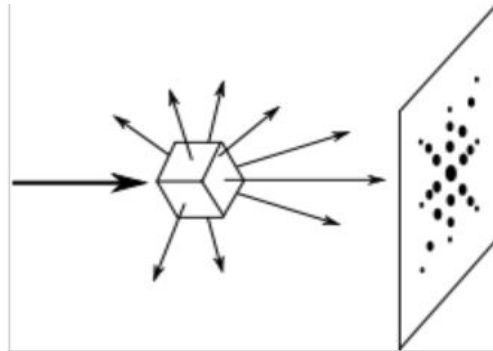
- для

**Монокристалл** – кристалл, удовлетворяющий условиям однородности и непрерывности по всем направлениям в своем объеме.

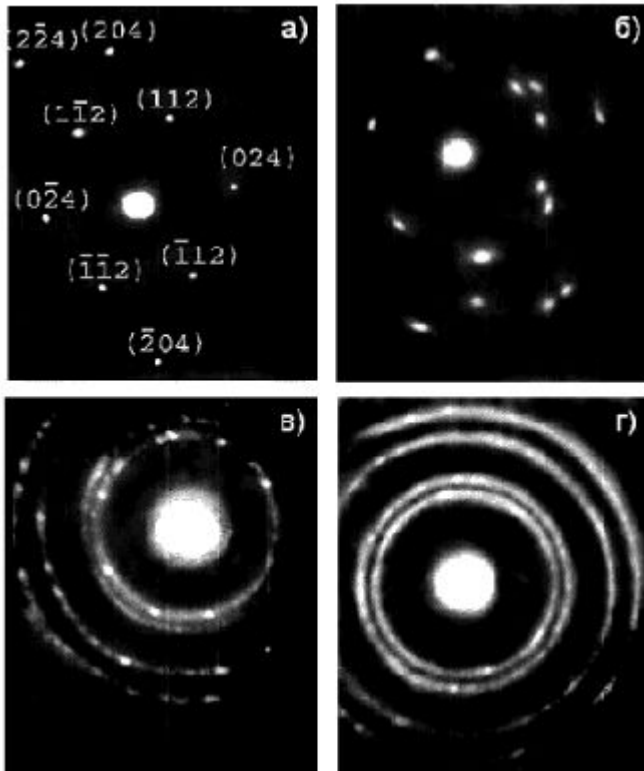
$$2d \sin \theta = n\lambda$$

Метод Лауэ (на просвет)

Метод Дебая для д/к



**Макс фон Лауэ**



**Поликристалл** - совокупность монокристалло в микронного размера, незакономерно разориентированных друг относительно друга.



**Петер Йозеф Вильгельм Дебай**

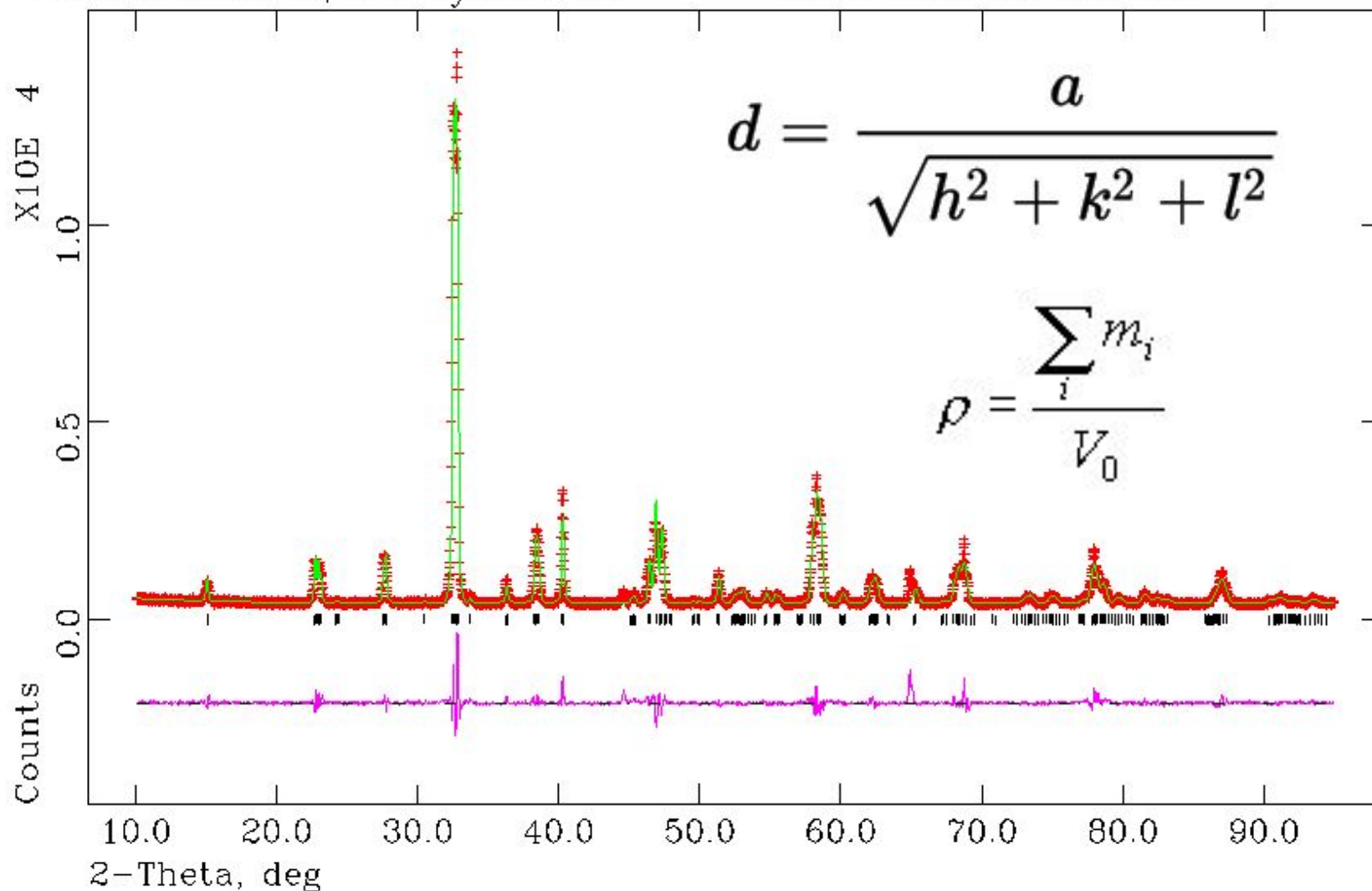


YBa2Cu3Ox

Lambda 1.5405 A, L-S cycle 429

Hist 1

Obsd. and Diff. Profiles



# Кристаллические и аморфные тела

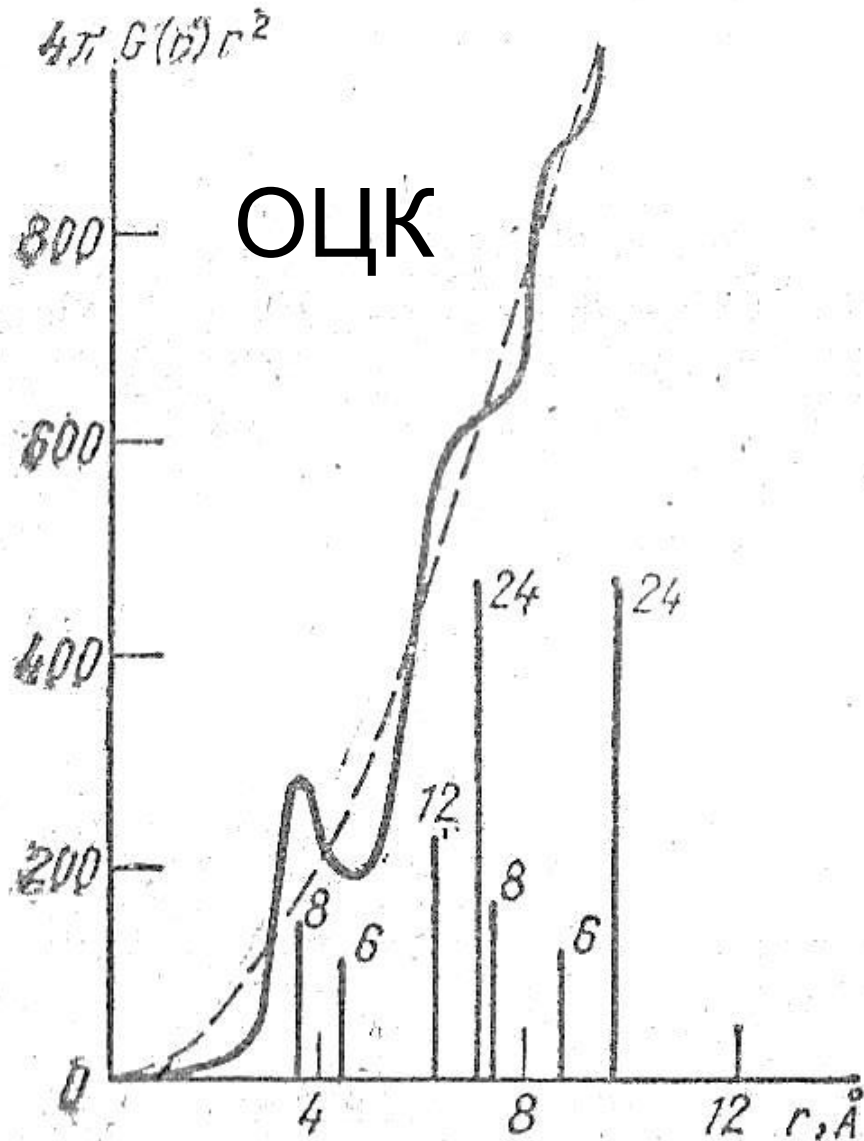


**Дальний порядок:** выбрав произвольную частицу, на заданном расстоянии от нее в заданном направлении) с вероятностью  $p = 1$  (т.е. достоверно) либо находим другую частицу (если попадаем в узел), либо не находим частицы (если попадаем в междоузлие).

**Ближний порядок** – то же, но  $\frac{1}{2} < p < 1$ .

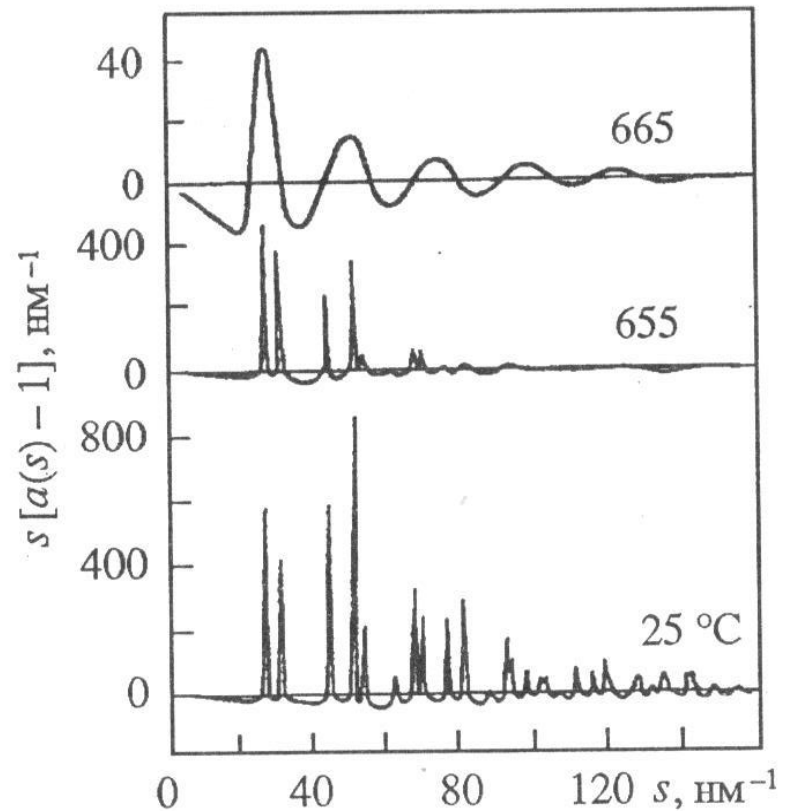
**Аморфные тела** – не формируют граней, изотропны, плавятся в интервале температур (а не в точке  $T_{пл}$ ), их вязкость – непрерывная функция температуры.

# Дифракция аморфных тел



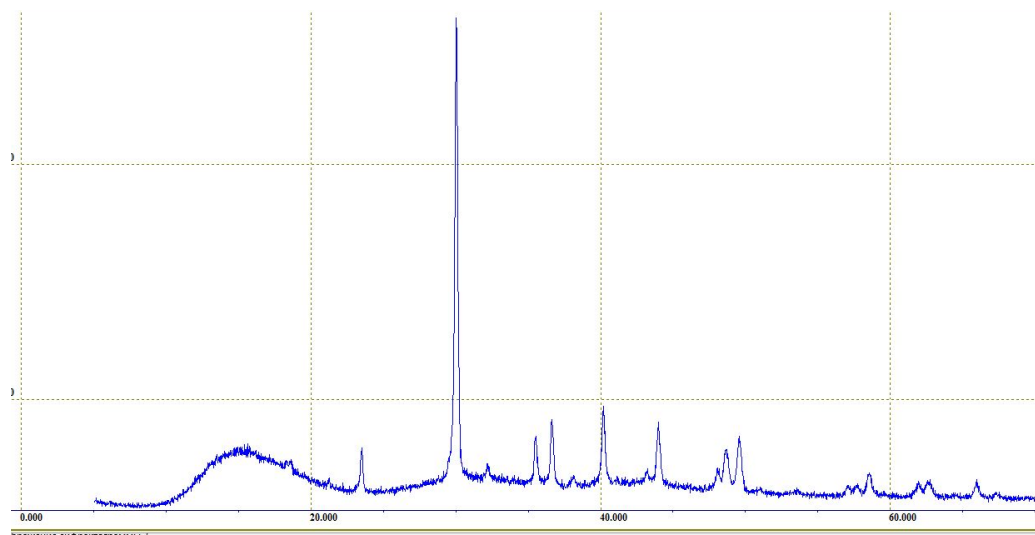
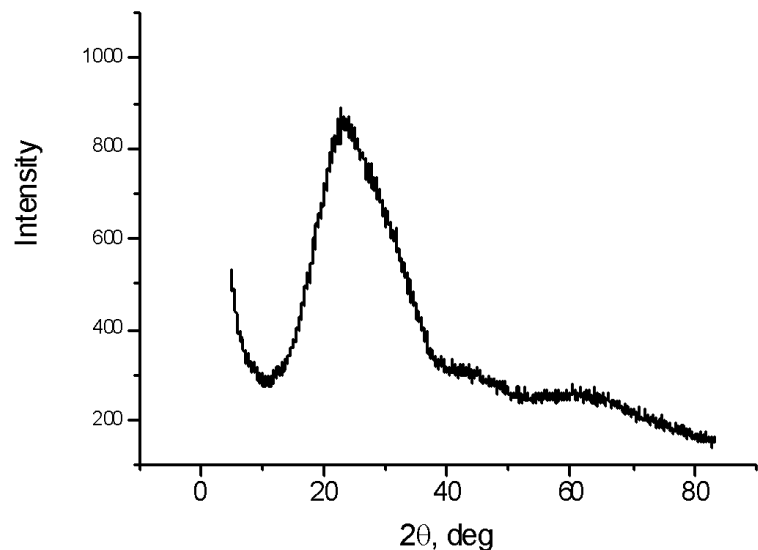
$$dN = 4\pi\rho_0 G(r) \times r^2 dr$$

$$G(r) = \rho(r) / \rho_0$$



# Параметры ближнего порядка

**Параметрами ближнего порядка** являются среднее координационное число, наиболее вероятный радиус координационной сферы и полуширина максимума.



Из трехмерно-периодического строения кристаллов следуют их основные макроскопические свойства: **однородность** , **анизотропность** и способность **самоограняться**.

**Однородность** - в любой точке кристалла его свойства, как скалярные (плотность, теплоемкость, состав и т.п.), так и векторные или тензорные в соответствующих направлениях (электропроводность, светопропускание и т.п.) одинаковы. Причина – одинаковое расположение атомов в элементарных ячейках.

**Анизотропность** ( от греч. анизос неравный, тропос свойство) векторные и тензорные свойства в различных направлениях в общем случае, различны - из-за различной симметрии элементарной ячейки вдоль различных направлений.

**Способность самоограняться** - принимать в процессе роста форму многогранника, или полиэдра (греч . поли - много, эдра - грань). Причина - анизотропность скоростей роста кристалла.

На этих трех макроскопических свойствах основано классическое определение кристалла: **кристалл** - это твердое однородное анизотропное тело, способное в определенных условиях самоограняться.

**Кристалл - это твердое тело, имеющее трехмерно-периодическое строение.**

# Семейства видов симметрии

№	Название	Суть	Обозначение
1	Примитивные	одна поворотная ось симметрии порядка $n$	$L_n$
2	Инверсионно-примитивные	одна инверсионная ось симметрии порядка $n$	$L_{in}$
3	Центральные	поворотная ось симметрии порядка $n$ и центр инверсии	$L_n + C$
4	Планальные	поворотная ось симметрии порядка $n$ и проходящая через нее плоскость симметрии	$L_n + //m$
5	Инверсионно-планальные	инверсионная ось симметрии порядка $n$ и проходящая через нее плоскость симметрии	$L_{in} + //m$
6	Аксиальные	поворотная ось симметрии порядка $n$ и перпендикулярная ей поворотная ось симметрии второго порядка	$L_n + \perp L_2$
7	Аксиально-центральные (План-аксиальные)	набор элементов симметрии аксиального семейства и центр инверсии	$L_n + \perp L_2 + C$

Синония	Параметры ЭЯ	Особенности симметрии	Габитус	Примеры
<b>Триклинная</b>	$a \neq b \neq c$ $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 90^\circ$	нет симметрии или только C	Разнообразный	Плагиоклаз, аксинит
<b>Моноклинная</b>	$a \neq b \neq c$ $\alpha = \gamma = 90^\circ, \beta \neq 90^\circ$	$L_2$ и/или m	Разнообразная, часто длинные призмы	Пироксены, амфиболы, ортоклазы
<b>Ромбическая</b> (Орторомбическая)	$a \neq b \neq c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	$3L_2$ (взаимно перпенд.)  и/или $3m$ (тоже взаимно перп.)	Призмы, вискеры	Оливин, андалузит, барит
<b>Тригональная</b> (Ромбоэдрическая)	$a = b = c$ $\alpha = \beta = \gamma < 120^\circ \neq 90^\circ$	$L_3$ или $L_{i3}$	Ромбоэдры, тригональные призмы	Кальцит, доломит, $\beta$ - кварц, турмалин
<b>Тетрагональная</b>	$a = b \neq c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	$L_4$ или $L_{i4}$	Короткие призмы	Циркон, касситерит
<b>Гексагональная</b>	$a = b \neq c$ $\alpha = \beta = 90^\circ,$ $\gamma = 120^\circ$	$L_6$ или $L_{i6}$	Гексагональные призмы и пирамиды	Апатит, берилл, $\alpha$ -кварц
<b>Кубическая</b>	$a = b = c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	$4L_3$	Изометрические кристаллы	Галит, магнетит, гранат