

# Теория информационных процессов и систем

Лекция 3

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ  
СИГНАЛОВ, СООБЩЕНИЙ И ПОМЕХ**

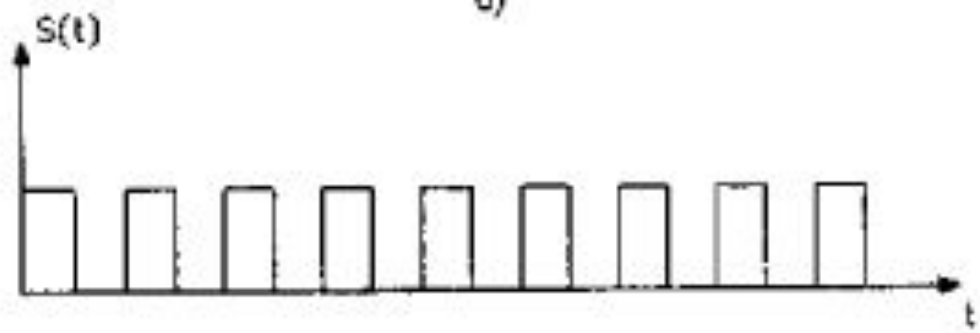
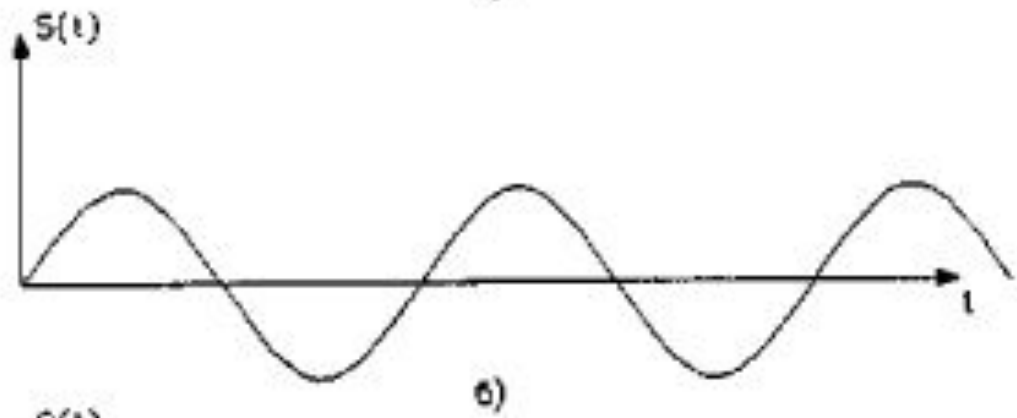
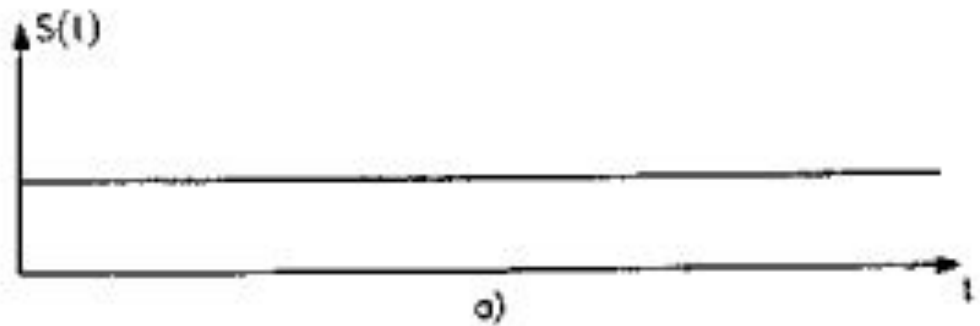
# Определение и классификация сигналов

- Передача и хранение информации, т.е. перенос информации в пространстве и времени, осуществляется сигналами.
- Сигналами называются физические процессы, параметры которых содержат информацию, т.е. сигналы являются материальными носителями информации. В исходном состоянии любой носитель информации представляет собой как бы чистую поверхность, подготовленную к нанесению необходимых данных —модуляции.
- Модуляция состоит в том, что изменяется один или несколько (сложная модуляция) параметров носителя в соответствии с передаваемой информацией. Эти параметры будем называть информационными.
- В информационных системах в качестве носителей используются электрические сигналы, т.е. ток или напряжение, значения которых меняются по закону, отображающему передаваемое сообщение. Сигналы можно классифицировать по ряду признаков. Как уже отмечено в предыдущей лекции, различают дискретные и непрерывные сигналы, которые, в свою очередь, могут быть детерминированными или случайными.

- Дискретный сигнал представляет собой дискретную последовательность определенных элементов, соответствующую элементам передаваемого сообщения. Непрерывный сигнал может принимать любые значения в заданном интервале времени.
- Сигнал называется детерминированным или регулярным, если его математическим представлением является заданная функция времени.
- С информационной точки зрения это означает, что под регулярным сигналом понимается такой сигнал, который соответствует известному сообщению. Такие сигналы не несут информации.
- Сигналы, несущие информацию, на приемном конце заранее будут неизвестными. Сигналы, и тем более помехи для получателя являются случайными (недетерминированными) Необходимо подчеркнуть относительность понятия недетерминированности. Сигнал для отправителя на передающем конце детерминирован, так как при заданном способе передачи он определяется известным сообщением. Для получателя тот же сигнал недетерминирован, так как передаваемое сообщение на приемном конце неизвестно

- . Реальные сигналы, передаваемые в информационных системах, как правило, обладают сочетанием свойств детерминированных и недетерминированных сигналов: некоторые параметры сигнала получателю известны заранее, а некоторые для него являются случайными.
- Между сигналами и помехами нет принципиальной разницы.
- Помеха—это тоже сигнал, но нежелательный для данной системы. В ряде случаев один и тот же сигнал для одной системы является полезным носителем информации, а для другой —помехой. Например, повторное использование частот в системах сотовой связи приводит к тому, что для одной соты сигнал является полезным, а для другой—помехой (со-канальные помехи).
- Случайным сигналом мы будем называть сигнал, математическим описанием которого является случайная функция времени.

- Для образования сигналов используются в основном три типа носителей



- Первый тип носителя  $s(t)$ —постоянное состояние (рис. а), например, постоянное напряжение имеет только один информационный параметр; это в данном случае— значение напряжения, причем модуляция сводится к такому изменению напряжения, чтобы оно в определенном представляло передаваемые данные. При этом может меняться и полярность напряжения.
- Второй тип носителя —гармоническое колебание (рис. б), например, переменное напряжение содержит три таких параметра: амплитуду, частоту и фазу.
- Третий тип носителя —последовательность импульсов (рис. в) предоставляет еще большие возможности. Здесь параметрами модуляции могут быть: амплитуда импульсов, фаза импульсов, частота импульсов, длительность импульсов или пауз, число импульсов и комбинация импульсов и пауз, определяющая код.

# Периодические сигналы

- Простейшим периодическим сигналом является гармоническое колебание (тока, напряжения, заряда, напряженности поля), определяемое законом:

$$s(t) = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \psi\right) = A \cos(\omega_1 t - \psi), \quad (2.1)$$

При  $-\infty < t < +\infty$

Здесь  $A, T, \omega_1, \psi$  — постоянные амплитуда, период, частота и фаза.

Реальные сигналы имеют начало и конец. В дальнейшем под гармоническим сигналом будет подразумеваться сигнал, определяемый функцией, совпадающей с выражением (2.1) в конечном интервале времени.

Гармоническое колебание, определяемое выражением (2.1), иногда удобно представлять в одной из следующих форм:

$$s(t) = A \operatorname{Re} \left[ e^{j(\omega_1 t - \psi)} \right] = \frac{I}{2} A e^{j(\omega_1 t - \psi)} + \frac{I}{2} A e^{-j(\omega_1 t - \psi)}. \quad (2.1)$$

- Первой из этих форм соответствует векторное представление, изображенное на рис. (2.2а), а второй форме—на рис. (2.2б).

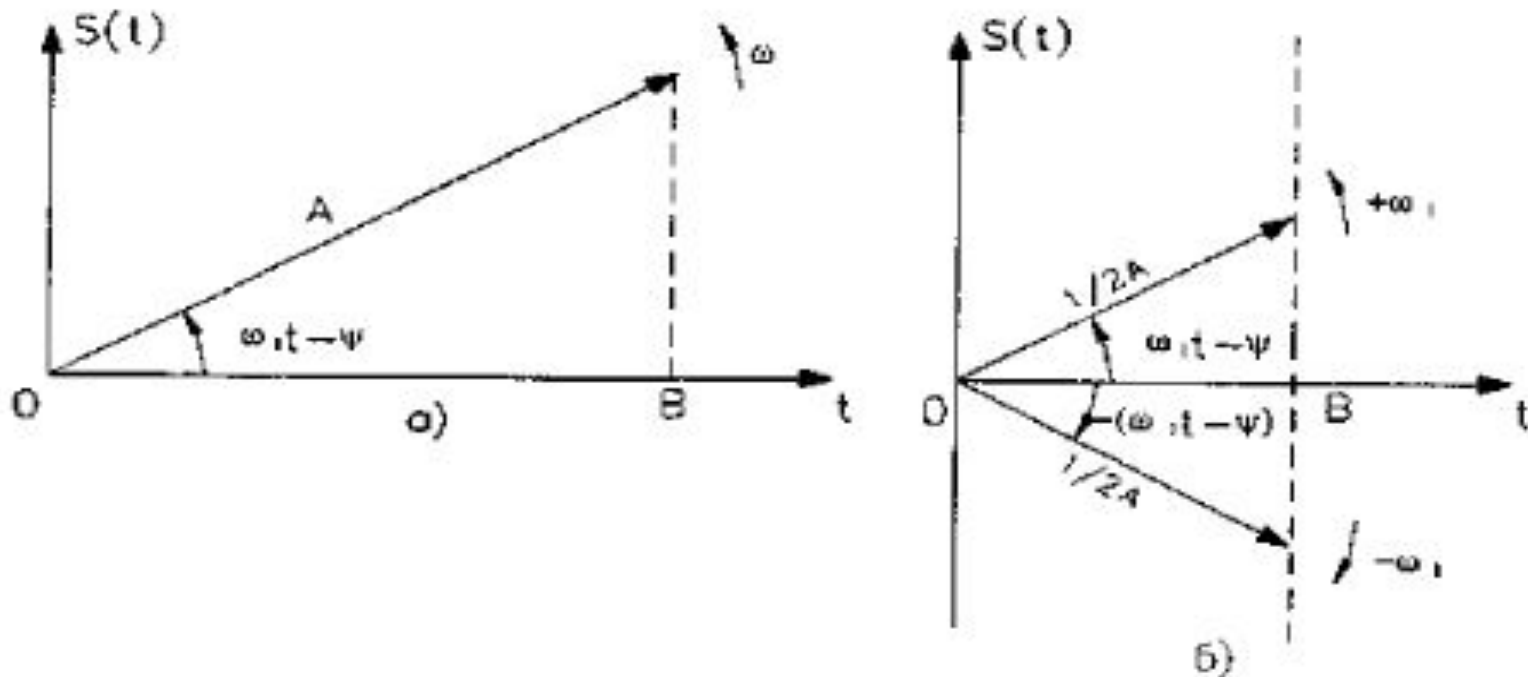


Рис. 2.2. Векторное представление гармонических колебаний



- В первом случае действительная функция  $s(t)$  получается как проекция ОВ вектора  $A$  на его горизонтальную ось, а во втором — как сумма проекций ОВ на ту же ось двух векторов с амплитудами  $1/2 A$ , вращающимися с угловой частотой  $\omega_t$  во взаимно противоположных направлениях.
- Гармонический сигнал находит широкое применение на практике, в частности, при регулировке устройств обработки информации и снятия их амплитудных и частотных характеристик.
- Любой сложный периодический сигнал может быть представлен в виде суммы элементарных гармонических сигналов, действующих при

$$-\infty < t < +\infty$$

где  $T$ —период повторения (рис. 2.3), причем выполняются следующие условия (условия Дирихле):

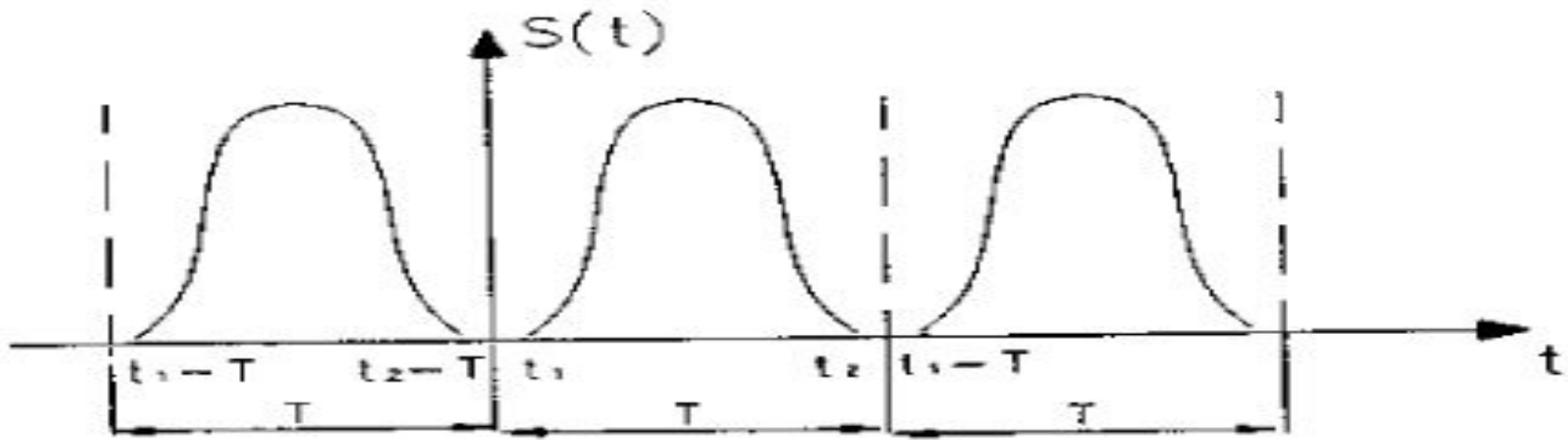
1) в любом конечном интервале функция  $s(t)$  должна быть непрерывна или должна иметь конечное число разрывов первого рода;

2) в пределах одного периода  $\frac{2\pi}{\omega_t}$  функция  $s(t)$  должна иметь конечное число максимумов и минимумов.

где  $T$ —период повторения (рис. 2.3), причем выполняются следующие условия (условия Дирихле):

1) в любом конечном интервале функция  $s(t)$  должна быть непрерывна или должна иметь конечное число разрывов первого рода;

2) в пределах одного периода функция  $s(t)$  должна иметь конечное число максимумов и минимумов.



Подобная функция может быть представлена рядом Фурье, который записывается в тригонометрической или комплексной формах:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t - \psi_n), \quad (2.3)$$

$$s(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (A_n e^{j(n\omega_1 t - \psi_n)}) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dot{A}_n e^{jn\omega_1 t}.$$

- Здесь  $a_0/2$  постоянная составляющая (действующее значение);  $a_n$  и  $b_n$  — амплитуды косинусоидальных и синусоидальных членов разложения  $s(t)$ .
- Эти величины определяются выражениями:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} s(t) dt, \quad (2.4)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} s(t) \cos n \omega_1 t dt, \quad (2.5)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} s(t) \sin n \omega_1 t dt. \quad (2.6)$$

- Амплитуда (модуль) и фаза (аргумент)  $n$ -й гармоники выражаются через  $a_n$  и  $b_n$  следующим образом:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad (2.7)$$

$$\psi_n = \operatorname{arctg} \frac{b_n}{a_n}. \quad (2.8)$$

Входящая в выражение (2.3) комплексная амплитуда  $A$  в свою очередь, связана с  $a_n$  и  $b_n$  следующими очевидными соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \dot{A}_n &= A_n e^{-j\psi_n} = a_n - jb_n, \\ \dot{A}_{-n} &= A_n e^{j\psi_n} = a_n + jb_n \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

- Комплексные амплитуды  $A_n$  и  $A_{-n}$  являются взаимно сопряженными комплексными величинами, поэтому:

$$\dot{A}_n \cdot \dot{A}_{-n} = (a_n - jb_n) \cdot (a_n + jb_n) = a_n^2 + b_n^2 = A_n^2. \quad (2.10)$$

В соответствии с выражениями (2.5) и (2.6) можно также написать:

$$\dot{A}_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) e^{-jn\omega_1 t} dt. \quad (2.11)$$

Совокупность коэффициентов называется спектром сигнала и полностью определяет этот сигнал.

Сопоставление формул (2.2) и (2.3) показывает, что фигурирующие в последней "отрицательные" частоты имеют формальный характер и связаны с применением комплексной формы для представления действительной функции времени

- Таким образом, при использовании удобной для анализа формулы (2.3) всегда можно освободиться от отрицательных частот путем перехода к тригонометрической форме.
- Следует отметить, что приведенным выше условиям Дирихле удовлетворяют все физически осуществимые сигналы. Поэтому при представлении периодических сигналов в виде рядов Фурье эти условия в практике не приходится специально оговаривать
- В тех случаях, когда сигнал представляет собой функцию, четную относительно  $t$ , в тригонометрической записи остаются только косинусоидальные члены, так как коэффициенты  $b_n$  в соответствии с формулой (2.6) обращаются в нуль. Для нечетной относительно  $t$  функции  $s(t)$ , наоборот, в нуль обращаются коэффициенты  $a_n$  [формула (2.5)], и ряд состоит только из синусоидальных членов.
- Структура частотного спектра периодического сигнала полностью определяется двумя характеристиками — амплитудной и фазовой, т.е. модулем и аргументом комплексной амплитуды [формулы (2.7) и (2.8)]. Наглядное представление о "ширине" спектра и относительной величине отдельных его составляющих дает графическое изображение спектра (рис. 2.4). Здесь по оси ординат отложены модули амплитуд, по оси абсцисс — частоты гармоник. Для исчерпывающей характеристики спектра подобное изображение должно быть дополнено заданием фаз отдельных гармоник.

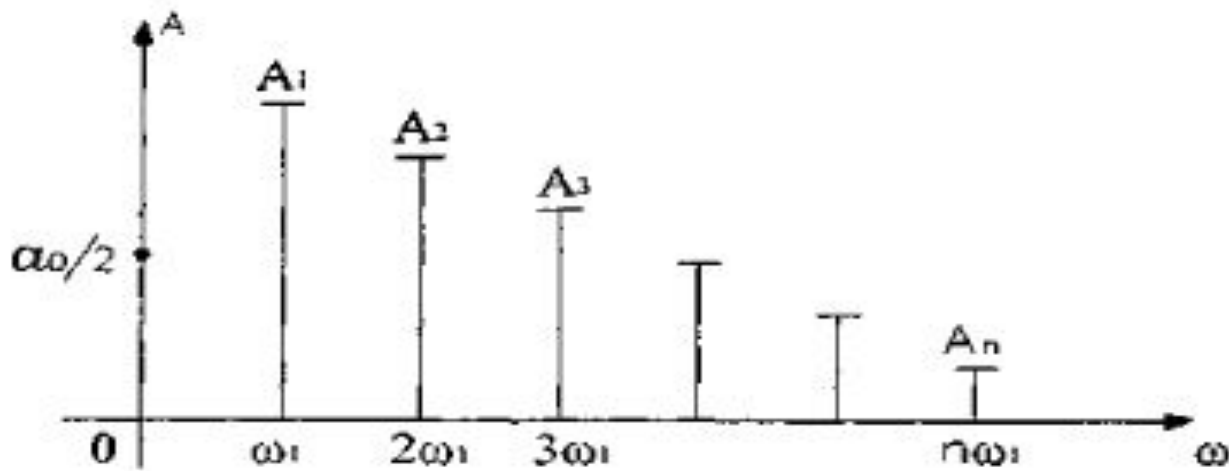


Рис.2.4. Спектр периодической функции

Спектр периодической функции состоит из отдельных "линий", соответствующих дискретным частотам:

$$0, \omega_1, 2\omega_1, \dots, n\omega_1$$

Отсюда и название — линейчатый, или дискретный, спектр.

Значение рядов Фурье в современной технике очень велико.

Основанный на формулах (2.2) и (2.3) гармонический анализ сложных периодических сигналов в сочетании с принципом наложения (суперпозиции) представляет собой эффективное средство для изучения влияния линейных систем на прохождение сигналов.



- Если на входе линейной системы, характеристики которой известны, существует сигнал  $e(t)$  (электродвижущая сила), то для нахождения выходного сигнала достаточно учесть амплитудные и фазовые изменения, претерпеваемые каждой из гармонических составляющих сигнала при прохождении через рассматриваемую систему. Условие линейности системы позволяет рассматривать прохождение каждой из гармоник сигнала независимо от всех остальных гармоник.
- Пусть коэффициент передачи системы (линейного четырехполюсника), представляющий собой отношение комплексной амплитуды напряжения на выходе к комплексной амплитуде на входе, задан в форме:

$$\dot{K}(\omega) = K(\omega)e^{j\varphi(\omega)} \quad (2.12)$$

то сигнал  $u(t)$  на выходе в соответствии с принципом суперпозиции может быть найден с помощью следующего выражения:

• Тогда для учета амплитудных и фазовых изменений комплексная амплитуда каждой из гармоник входного сигнала должна быть умножена на  $K(\omega)$ . Поэтому, если сигнал  $e(t)$  на входе линейной системы передачи записан в форме

$$e(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{E}_n \cdot e^{jn\omega_1 t} \quad (2.13)$$

то сигнал  $u(t)$  на выходе в соответствии с принципом суперпозиции может быть найден с помощью следующего выражения:

$$u(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{E}_n \cdot \dot{K}(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{U}_n e^{jn\omega_1 t} \quad (2.14)$$

- Здесь представляют собой соответственно комплексные амплитуды  $n$ -й гармоники сигнала на входе и выходе системы передачи.
- Таким образом, для получения решения задачи о прохождении сигнала через систему необходимо только умножить на комплексный коэффициент передачи.
- Следует иметь в виду, что такое решение имеет практическую ценность при условии быстрой сходимости рядов Фурье. Между тем наиболее распространенные сигналы этому условию не отвечают, и для удовлетворительного воспроизведения формы сигналов обычно необходимо суммировать большое число гармоник.

# Спектры некоторых периодических сигналов

- Рассмотрим спектры некоторых часто встречающихся сигналов.
- 1. Периодическая последовательность прямоугольных импульсов

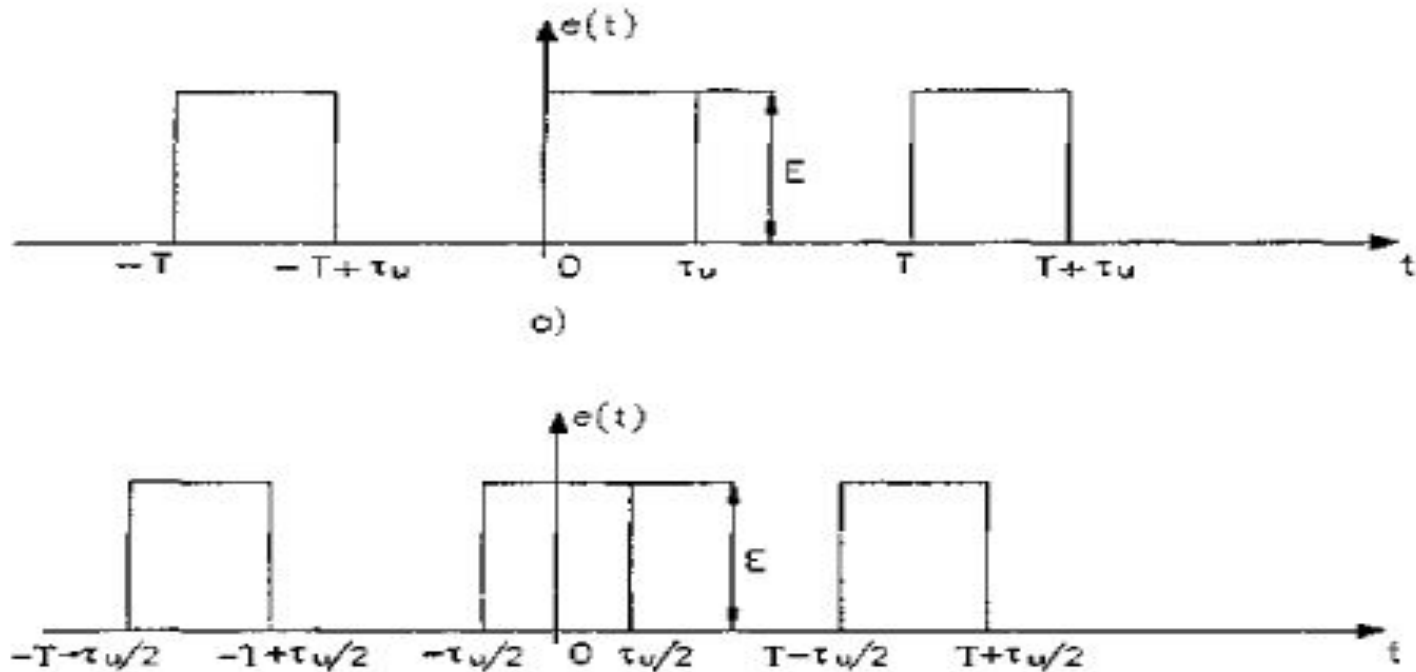


Рис. 2.5. Периодическая последовательность импульсов

- Для периодической последовательности импульсов (рис. 2.5а) с амплитудой  $E$  и длительностью  $\tau_u$ , применяя формулы (2.4), (2.5) и (2.6), находим среднее значение ("постоянную составляющую"):
 
$$E_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^{\tau_u} E dt = \frac{\tau_u}{T} E; \quad (2.15)$$

амплитуду косинусоидальной составляющей  $n$ -гармоники:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^{\tau_u} E \cos n\omega_1 t dt = \frac{2}{T} \cdot \frac{E}{n\omega_1} \left[ \sin n\omega_1 t \right]_0^{\tau_u} = \frac{E}{\pi n} \sin n\omega_1 \tau_u; \quad (2.16)$$

- амплитуду синусоидальной составляющей  $i$ -й гармоники

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^{\tau_u} E \sin n \omega_1 t dt = -\frac{2}{T} \cdot \frac{E}{n \omega_1} \left[ \cos n \omega_1 t \right]_0^{\tau_u} = \frac{E}{\pi n} (1 - \cos n \omega_1 \tau_u). \quad (2.17)$$

С помощью формул (2.7) и (2.8) находим амплитуду и фазу  $i$ -гармоники

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{E}{\pi n} \sqrt{(\sin n \omega_1 \tau_u)^2 + (1 - \cos n \omega_1 \tau_u)^2} = \frac{E}{\pi n} \sqrt{2(1 - \cos n \omega_1 \tau_u)} = \\ &= \frac{2E}{\pi n} \left| \sin \frac{n \omega_1 \tau_u}{2} \right|; \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\psi_n = \operatorname{arctg} \frac{1 - \cos n \omega_1 \tau_u}{\sin n \omega_1 \tau_u} = \frac{n \omega_1 \tau_u}{2}. \quad (2.19)$$

- Подставляя найденные коэффициенты в формулу (2.2), получаем:

$$e(t) = E \left[ \frac{\tau_u}{T} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n \omega_1 \tau_u}{2}}{n} \cdot \cos(n \omega_1 t - \psi_n) \right]. \quad (2.20)$$

При другом выборе начала отсчета времени (рис. 2.56) функция  $e(t)$  является четной относительно  $t$ , и для нее имеем:

$$\left. \begin{aligned} a_n = A_n &= \frac{E}{\pi n} [\sin n \omega_1 t]_{-\frac{\tau_u}{2}}^{\frac{\tau_u}{2}} = \frac{2E}{\pi n} \sin \frac{n \omega_1 \tau_u}{2}, \\ b_n &= \frac{E}{\pi n} [\cos n \omega_1 t]_{-\frac{\tau_u}{2}}^{\frac{\tau_u}{2}} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

- Поэтому тригонометрический ряд имеет вид:

$$e(t) = E \left[ \frac{\tau_u}{T} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\omega_1 \tau_u}{2}}{n} \cos n\omega_1 t \right] \quad (2.22)$$

В системах передачи информации очень часто используются последовательности импульсов, которые характеризуются очень малым отношением длительности импульса к периоду повторения, -т.е.

$$\frac{\tau_u}{2} \ll 1$$

(рис. 2.6). Величина, обратная этому отношению

$$N = \frac{T}{\tau_u} \gg 1$$

называется скважностью импульсной последовательности



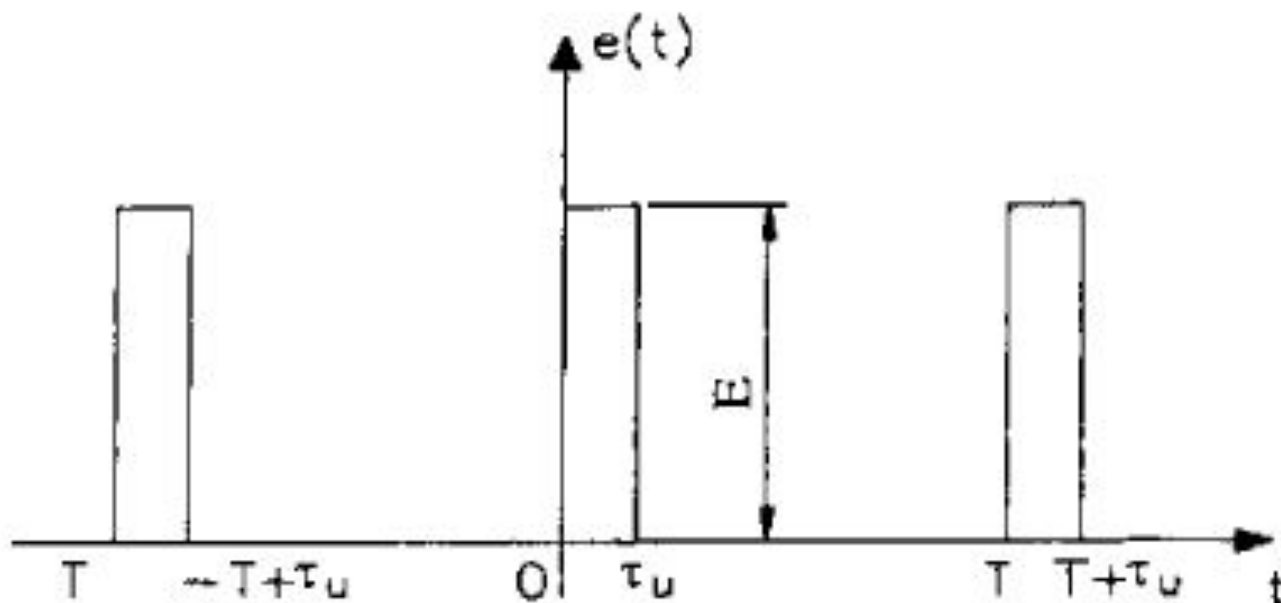


Рис. 2.6. Последовательность импульсов с большой скважностью

Большая по сравнению с длительностью импульса величина периода повторения приводит к необходимости учитывать очень большое число гармоник. Спектр в этом случае имеет вид, показанный на рис. 2.7

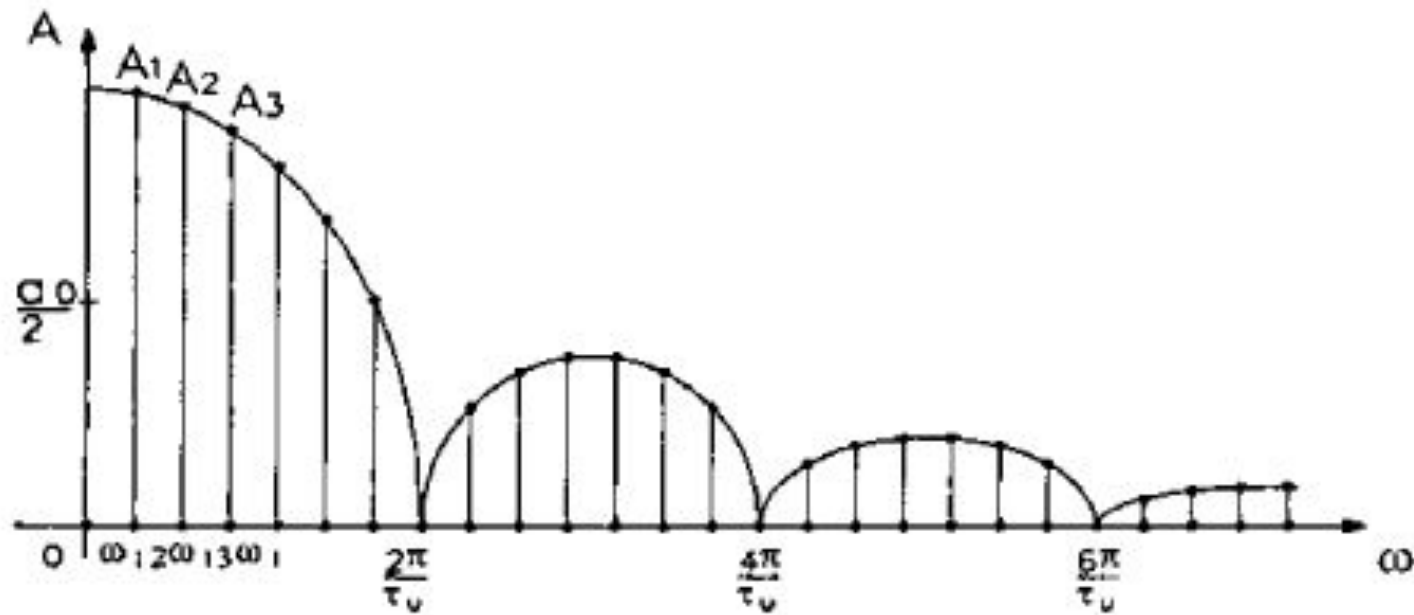


Рис. 2.7. Спектр импульсной последовательности

Расстояние между спектральными линиями очень мало, а амплитуды соседних гармоник близки по величине. Это наглядно видно из формулы (2.18), которую в данном случае удобно записать в несколько видоизмененном виде:

$$A_n = \frac{2E}{\pi n} \sin\left(n\pi \cdot \frac{\tau_u}{T}\right). \quad (2.23)$$

Ввиду малой величины отношения аргумент Тут синуса с ростом  $n$  изменяется медленно. При малых значениях  $n$  приблизительно можно считать:

$$\sin\left(n\pi \cdot \frac{\tau_u}{T}\right) = n\pi \frac{\tau_u}{T},$$

а амплитуды гармоник

$$A_n \approx \frac{2E}{\pi n} \cdot \frac{n\pi\tau_u}{T} = E \frac{2\tau_u}{T}.$$

Заметим, что при постоянная составляющая, равная  $E \frac{2\tau_u}{T}$ , вдвое меньше амплитуды первой гармоники и во много раз меньше амплитуды импульса

## 2. Последовательность пилообразных импульсов

- Подобные функции часто встречаются на практике в устройствах для развертки изображения на экране кинескопа

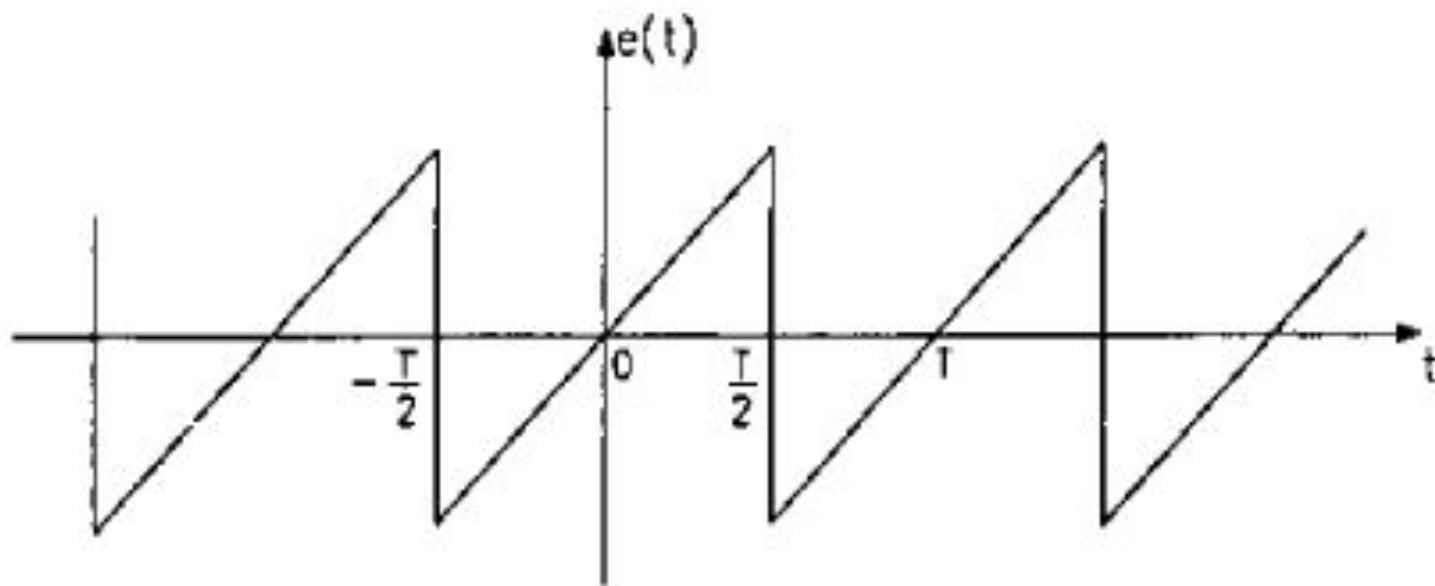


Рис. 2.8. Периодическое колебание пилообразной формы

- Так как эта функция является нечетной, ряд Фурье для нее содержит только синусоидальные члены. С помощью формул (2.5) — (2.7) нетрудно определить коэффициенты ряда Фурье. Опуская эти выкладки, напомним окончательное выражение для ряда:

$$e(t) = E \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left( \cos \omega_1 t + \frac{1}{3^2} \cos 3\omega_1 t + \frac{1}{5^2} \cos 5\omega_1 t + \dots \right) \right].$$

Как видим, амплитуды гармоник убывают по закону  $1/n$ , где  $n=1,2,3,\dots$

На рис. 2.9 показан график суммы первых пяти гармоник.

- На рис. 2.9 показан график суммы первых пяти гармоник.

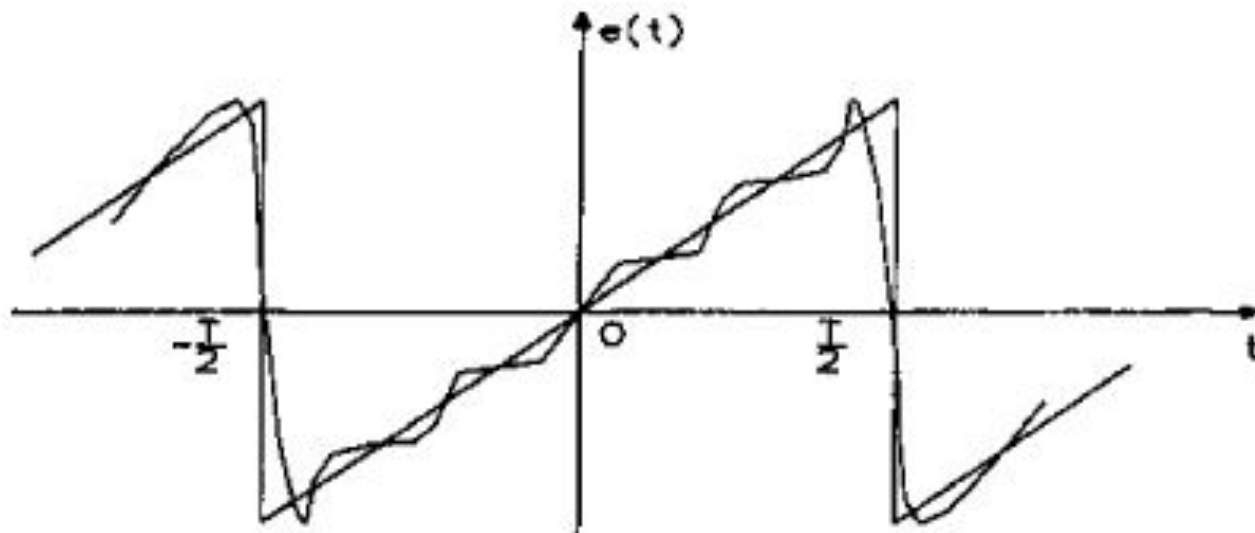


Рис.2.9. Сумма первых пяти гармоник ряда Фурье

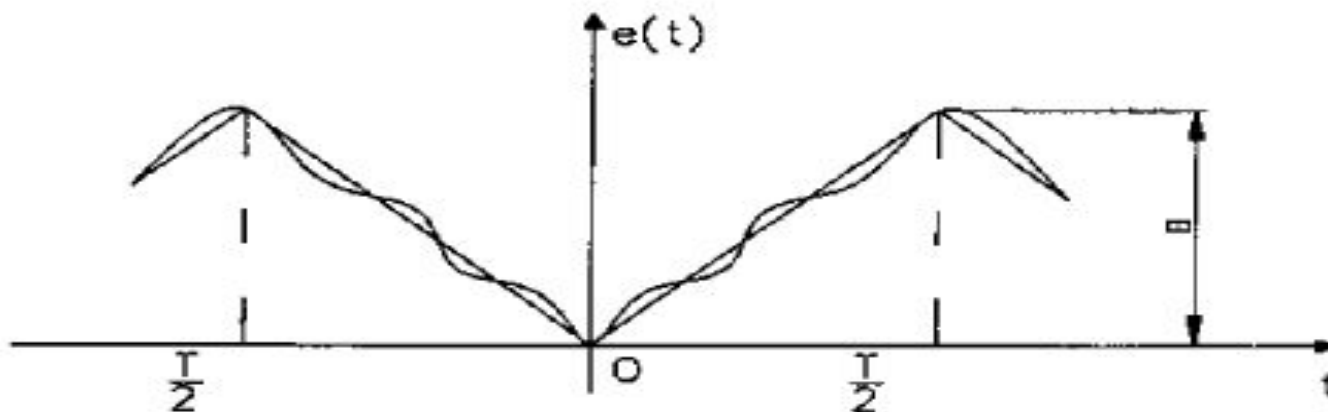
# Последовательность треугольных импульсов

- Ряд Фурье для этой функции имеет следующий вид:

$$e(t) = 2E \left( \sin \omega_1 t - \frac{1}{2} \sin 2\omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_1 t - \frac{1}{4} \sin 4\omega_1 t + \dots \right).$$

Сумма первых трех членов этого ряда изображена на рис. 2.10.

Более быстрое убывание амплитуд гармоник объясняется отсутствием разрывов (скачков) в функции.



Сумма трех первых гармоник периодической функции

# Распределение мощности в спектре периодического сигнала

- Пусть сигнал  $s(t)$  представляет собой сложную периодическую функцию времени с периодом  $T$ . Средней за период мощностью будем называть величину:

$$\overline{s^2(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt, \quad (2.27)$$

где черта над функцией обозначает операцию усреднения по времени.

Разложим сигнал  $s(t)$  в ряд Фурье:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t) \quad (2.28)$$

и подставим этот ряд под интеграл в выражении (2.27).



преобразований выражение (2.27) принимает следующий простой вид:

$$\overline{s^2(t)} = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = S_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} S_n^2, \quad (2.29)$$

Где  $S_0 = \frac{a_0}{2}$  — постоянная составляющая;  $S_n$  — амплитуда  $n$ -й гармоники сигнала.

При использовании комплексного ряда Фурье этот результат в соответствии с формулой (2.10) может быть представлен в форме:

$$\overline{s^2(t)} = \frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n \cdot S_{-n} = \frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n^2, \quad (2.30)$$

- Если представляет собой электрический ток, то при прохождении через омическое сопротивление выделяется мощность (средняя за период  $T$ ):

$$P = r \overline{i^2(t)} = r \left[ I_0^2 + \frac{I_1^2}{2} + \frac{I_2^2}{2} + \dots \right] \quad (2.31)$$

Как видим, полная мощность является суммой средних мощностей, выделяемых по отдельности постоянной составляющей и гармониками (с амплитудами и т. д.). Важно отметить, что эта мощность не зависит от фазировки отдельных гармоник. Это означает, что изменение формы сигнала, получающееся при изменении фазовых соотношений между отдельными гармониками внутри спектра, не оказывает влияния на величину средней мощности сигнала.

- Итак, можно считать, что в энергетическом отношении отдельные спектральные составляющие сложного периодического сигнала аддитивны, т.е. суммарную среднюю мощность сигнала можно определить как сумму мощностей отдельных компонент спектра сигнала
- По виду функции, представляющей собой огибающую величину, можно судить о распределении мощности в спектре периодического сигнала.
- Это позволяет выбирать полосу пропускания системы передачи информации, обеспечивающую достаточно полное использование мощности сигнала.
- Подробнее этот вопрос рассматривается ниже (применительно к непериодическим сигналам).

# Непериодические сигналы

- В реальных системах передачи всегда действуют непериодические сигналы, так как все сигналы имеют конечную длительность.
- Пусть задан сигнал в виде функции времени, удовлетворяющей условиям Дирихле (п. 2.2) во всяком конечном интервале и, кроме того, абсолютно интегрируемой.
- Последнее условие означает, что интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt,$$

где  $|s(t)|$ —абсолютное значение функции  $s(t)$ , должен сходиться.

- Для удобства рассуждений примем пока, что сигнал  $s(t)$  действует в конечном интервале  $t_1 < t < t_2$ .
- Из дальнейшего будет видно, что это допущение не ограничивает общности рассмотрения. Для проведения гармонического анализа непериодической функции поступим следующим образом. Превратим эту функцию в периодическую путем повторения ее с произвольным периодом  $T > t_2 - t_1$ . Тогда для этой новой функции применимо разложение в ряд Фурье, причем входящие в выражение (2.2) коэффициенты  $a_0/2$ ,  $a_n$  и  $b_n$  соответственно с формулами (2.4) — (2.6) будут тем меньше, чем больше интервал  $T$ , выбранный в качестве периода. Устремляя  $T$  к бесконечности, в пределе получим бесконечно малые амплитуды гармонических составляющих, сумма которых изображает исходную непериодическую функцию  $s(t)$ , заданную в интервале  $t_1 < t < t_2$ .

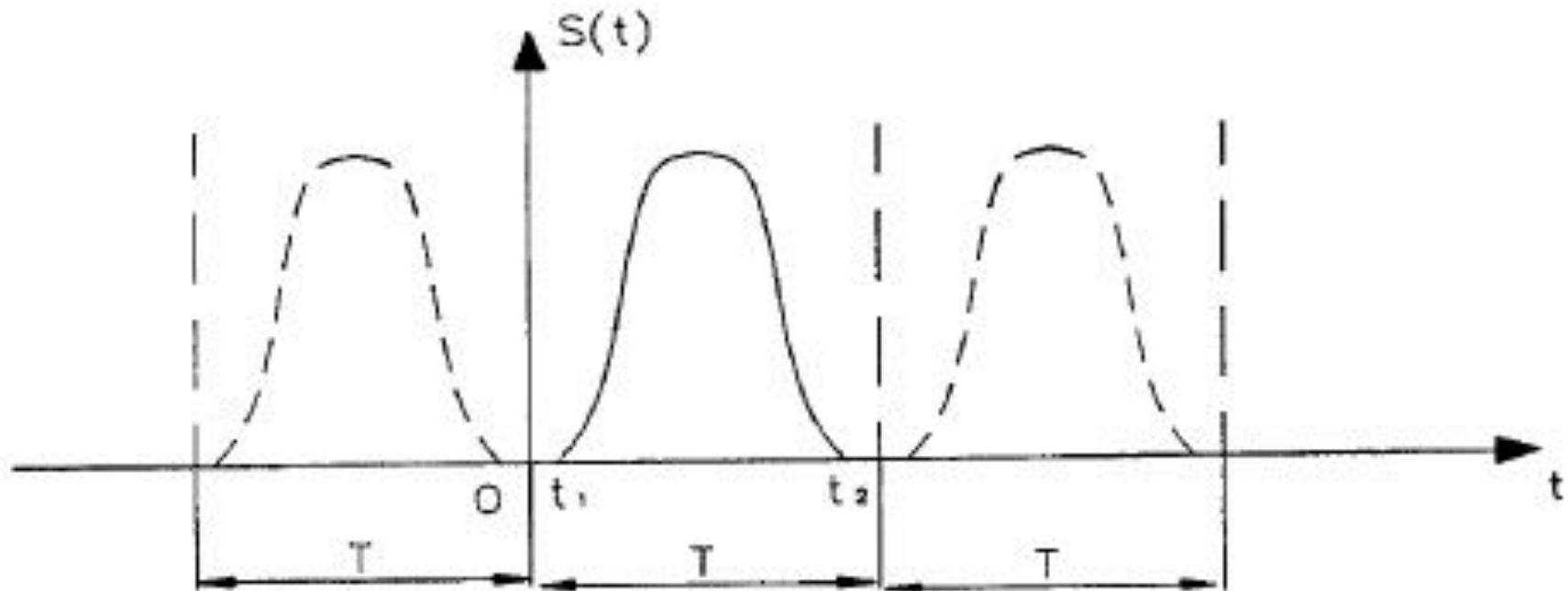


Рис. 2.11. Непериодическая функция

Количество гармонических составляющих, входящих в ряд Фурье, будет при этом бесконечно большим, так как при  $T \rightarrow \infty$  основная частота функции  $\omega_1 = (2\pi/T) \rightarrow 0$ .  
 Иными словами, расстояние между спектральными линиями (рис. 2.4), равное основной частоте  $\omega$ , становится бесконечно малым, а спектр — сплошным.

- Отсюда следует, что при гармоническом анализе непериодической функции получается сплошной спектр, состоящий из бесконечно большого количества гармоник с бесконечно малыми амплитудами.
- Математически это можно выразить следующим образом.
- Подставив формулы (2.5) и (2.6) в формулу (2.9), получаем:

$$\begin{aligned} \dot{A}_n = a_n - jb_n &= \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} s(t) [\cos n\omega_1 t - j \sin n\omega_1 t] dt = \\ &= \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} s(t) e^{-jn\omega_1 t} dt. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Теперь воспользуемся комплексной формой ряда Фурье [см. формулу (2.3)] и подставим вместо  $\dot{A}_n$  выражение (2.32):

$$\begin{aligned}
 s(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \left[ \int_{t_1}^{t_2} s(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \right] e^{jn\omega_1 t} = \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_1 \left[ \int_{t_1}^{t_2} s(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \right] e^{jn\omega_1 t}.
 \end{aligned}
 \tag{2.33}$$

Здесь учтено, что  $T = \frac{2\pi}{\omega_1}$ .

Если теперь устремить  $T$  к бесконечности, то в пределе получим исходную непериодическую функцию  $s(t)$ , заданную в интервале  $t_1 < t_2 < t_3$ .

При  $T \rightarrow \infty$  частота  $\omega_1$  превращается в  $\omega$ ,  $n\omega_1$  — в текущую частоту  $\omega$ , а операция суммирования — в операцию интегрирования.



- Таким образом, получаем двойной интеграл Фурье:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} \left[ \int_{t_1}^{t_2} s(t) e^{-j\omega t} dt \right] d\omega. \quad (2.34)$$

Внутренний интеграл, являющийся функцией  $\omega$ , обозначим:

$$\dot{S}(\omega) = \int_{t_1}^{t_2} s(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (2.35)$$

$\dot{S}(\omega)$  называется спектральной плотностью, или спектральной характеристикой функции  $s(t)$ .

- В общем виде, когда не уточнены пределы  $t_1$  и  $t_2$ , спектральную плотность представляют выражением:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (2.36)$$

а после подстановки (2.36) в выражение (2.34) получаем:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.37)$$

Пара выражений (2.36) — (2.37) называется прямым и обратным преобразованиями Фурье.

Выражение (2.37) представляет непериодическую функцию в виде суммы (интеграла) гармонических колебаний с бесконечно малыми амплитудами.

Из сравнения выражения (2.37) с рядом Фурье (2.3) видно, что амплитуды этих составляющих равны

$$\frac{1}{\pi} \dot{S}(\omega) d\omega.$$

Сравнение (2.36) с выражением (2.11) для комплексной амплитуды соответствующей гармонике периодической функции позволяет в наглядной форме пояснить смысл спектральной плотности

$$\dot{S}(\omega).$$

Именно, выделив какую-либо дискретную частоту  $\omega_n = n\omega_1$ , соответствующую в случае периодической функции  $n$ -й гармонике, получим для амплитуды этой гармонике выражение:

$$\dot{A}_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} s(t) e^{-j\omega_n t} dt.$$

- В случае же непериодической функции, совпадающей с  $s(t)$  в интервале  $t_1 < t < t_2$ , получим для спектральной плотности, соответствующей той же частоте  $\omega = \omega_n$ , следующее выражение:

$$S(\omega_n) = \int_{t_1}^{t_2} s(t) e^{-j\omega_n t} dt.$$

Отсюда видно, что  $\dot{S}(\omega_n) = \frac{T}{2} \dot{A}_n$ , или, учитывая, что  $T = \frac{1}{f_1}$ .

$$2\dot{S}(\omega_n) = T \dot{A}_n = \frac{\dot{A}_n}{f_1}. \quad (2.38)$$

Таким образом,  $2\dot{S}(\omega_n)$  получается путем деления амплитуды  $n$ -й гармоники на полосу частот  $\omega_1$ , отделяющую соседние линии спектра (рис. 2.4), т.е.  $S(\omega)$  имеет смысл плотности *амплитуда амплитуд* и обладает размерностью [амплит./герц]

- Из выражения (2.38) вытекает следующее важное положение: огибающая сплошного спектра (модуль спектральной плотности) непериодической функции и огибающая линейчатого спектра периодической функции (полученной из непериодической путем продолжения ее с периодом  $T$ ) совпадают по форме и отличаются только масштабом.
- Итак:

$$\dot{S}(\omega_n) = \frac{T}{2} \dot{A}_n = \frac{\pi}{\omega_1} \dot{A}_n . \quad (2.39)$$

Отметим, что при  $\omega = 0$ , когда "постоянная составляющая"  $A_0 = a_0/2$  определяется выражением (2.4), можно написать:

$$\dot{S}(0) = T A_0 = \frac{2\pi}{\omega_1} A_0 . \quad (2.39a)$$

- Спектральная плотность  $S(\omega)$  обладает всеми основными свойствами комплексной амплитуды  $A_n$ .
- По аналогии в выражение (2.9) можно написать следующее соотношение:

$$\dot{S}(\omega) = A(\omega) - jB(\omega) = S(\omega)e^{-j\psi(\omega)}, \quad (2.40)$$

Где  $A(\omega)$  и  $B(\omega)$  — соответственно действительная и мнимая части спектральной плотности;

$S(\omega)$  и  $\psi(\omega)$  — амплитудно-частотная (АЧХ) и фазочастотная (ФЧХ) характеристики спектральной плотности.

Непосредственно из формулы (2.36) вытекают следующие выражения для  $A(\omega)$  и  $B(\omega)$ , аналогичные формулам (2.5) и (2.6):

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos \omega t dt, \quad (2.41)$$

$$B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sin \omega t dt. \quad (2.42)$$

Очевидно также, что модуль и фаза спектральной плотности определяются выражениями:

$$S(\omega) = \sqrt{[A(\omega)]^2 + [B(\omega)]^2}, \quad (2.43)$$

$$\psi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{B(\omega)}{A(\omega)}. \quad (2.44)$$

Как и в случае ряда Фурье, модуль спектральной плотности есть функция четная, а фаза — нечетная относительно частоты  $\omega$ .

- На основании формулы (2.40) нетрудно привести интегральное преобразование к тригонометрической форме.

- Имеем:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) e^{j(\omega t - \psi)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cos(\omega t - \psi) d\omega + \\ + j \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \sin(\omega t - \psi) d\omega.$$

Из упомянутых выше свойств модуля и фазы следует, что подынтегральная функция в первом интеграле является четной, а во втором интеграле — нечетной относительно  $\omega$ . Следовательно, второй интеграл равен нулю, и окончательно:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cos(\omega t - \psi) d\omega = \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) \cos(\omega t - \psi) d\omega.$$



- Как видим, при переходе от комплексной формы (2.37) к тригонометрической (2.45) отпадет необходимость интегрирования в области отрицательных значений  $\omega$ . Обычно этот переход целесообразен в конце анализа; все промежуточные выкладки при применении интеграла Фурье удобнее и проще производить на основе комплексной формы (2.37).
- Интегральные преобразования (2.36) —(2.37) очень удобны для исследования прохождения непериодических сигналов через линейные системы передачи. По аналогии с выражениями (2.13) —(2.14) можно написать следующие очевидные соотношения для сигнала  $e(t)$  на входе и сигнала  $u(t)$  на выходе линейной системы передачи:

$$e(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{E}(\omega) e^{j\omega t} d\omega,$$

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{E}(\omega) K(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}(\omega) e^{j\omega t} d\omega,$$

Где  $\dot{E}(\omega) = E(\omega)e^{-j\omega t}$  — спектральная плотность напряжения на входе, а  $\dot{U}(\omega) = \dot{E}(\omega)K(\omega) = E(\omega)K(\omega)e^{-j(\psi-\varphi)}$  — на выходе системы, коэффициент передачи которой есть

Прикладное значение интегральных преобразований (2.36)—(2.37), позволяющих осуществить гармонический анализ непериодических сигналов, еще более велико, чем значение рядов Фурье, так как в практике непериодические сигналы встречаются чаще, чем периодические.

Большим облегчением при использовании интеграла Фурье является возможность получения выражения для выходного сигнала в замкнутой форме, а не в виде медленно сходящегося ряда.

# Свойства преобразования Фурье

- Между сигналом и его спектром существует однозначное соответствие. Для практических приложений важно установить связь между преобразованием сигнала и соответствующим этому преобразованию изменением спектра. Из многочисленных возможных преобразований сигнала рассмотрим наиболее важные и часто встречающиеся.
- 1. Сдвиг сигналов во времени
- Пусть сигнал  $s_1(t)$  произвольной формы существует на интервале времени от  $t_1$  до  $t_2$  и обладает спектральной плотностью  $S_1(\omega)$ . При задержке этого сигнала на время (при  $t_0$  сохранении его формы) получим новую функцию времени:

$$s_2(t) = s_1(t - t_0)$$

- существующую на интервале от  $t_1 + t_0$  до  $t_2 + t_0$  Спектральная плотность сигнала  $s_2(t)$  в соответствии с (2.36):

$$\dot{S}(\omega) = \int_{t_1+t_0}^{t_2+t_0} s_2(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{t_1+t_0}^{t_2+t_0} S_1(t-t_0) e^{-j\omega t} dt.$$

Вводя новую переменную интегрирования  $\tau = t - t_0$ , получаем:

$$\dot{S}(\omega) = e^{-j\omega t_0} \int_{t_1}^{t_2} S_1(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau = e^{-j\omega t_0} \dot{S}_1(\omega). \quad (4.48)$$

- Из этого соотношения видно, что сдвиг во времени функции  $s(t)$  на  $\pm t_0$  приводит к изменению фазовой характеристики спектра  $S(\omega)$  на величину  $\pm \omega t_0$ . Очевидно и обратное положение: если всем составляющим спектра функции  $s(t)$  дать фазовый сдвиг  $\phi = \pm \omega t_0$  линейно связанный с частотой  $\pm \omega t_0$ , то функция сдвигается на время  $\pm t_0$ . Амплитудно-частотная характеристика спектра (т.е. модуль спектральной плотности) от положения сигнала на оси времени не зависит