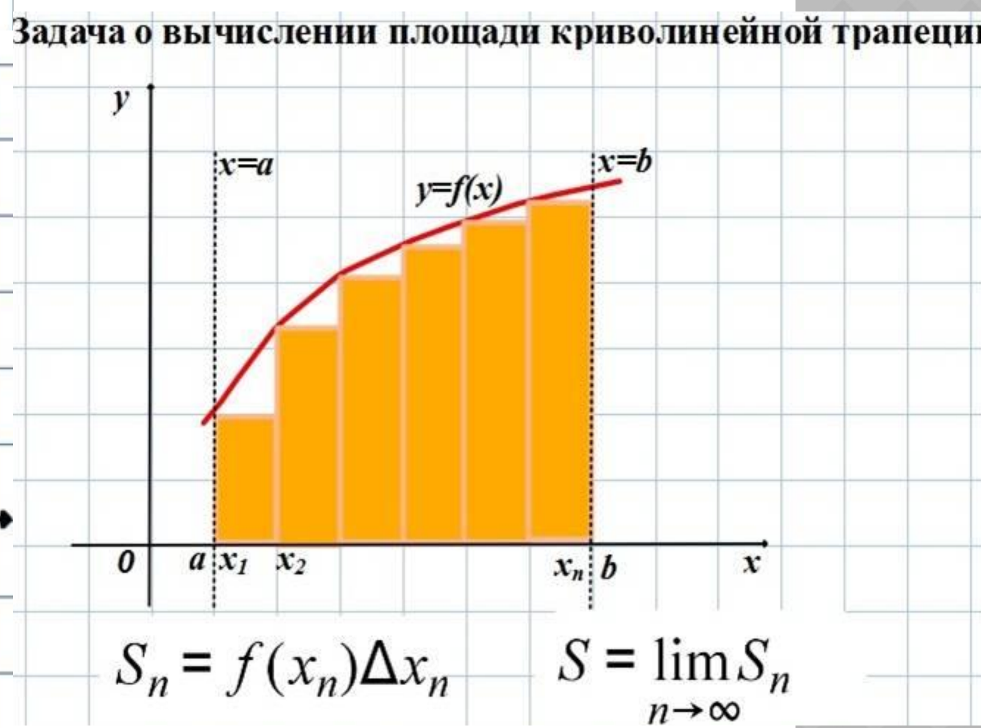
ТВЕРСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ

ТЕМА 8. ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ПОНЯТИЮ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА



Решение различных задач привело к одной и той же математической модели:

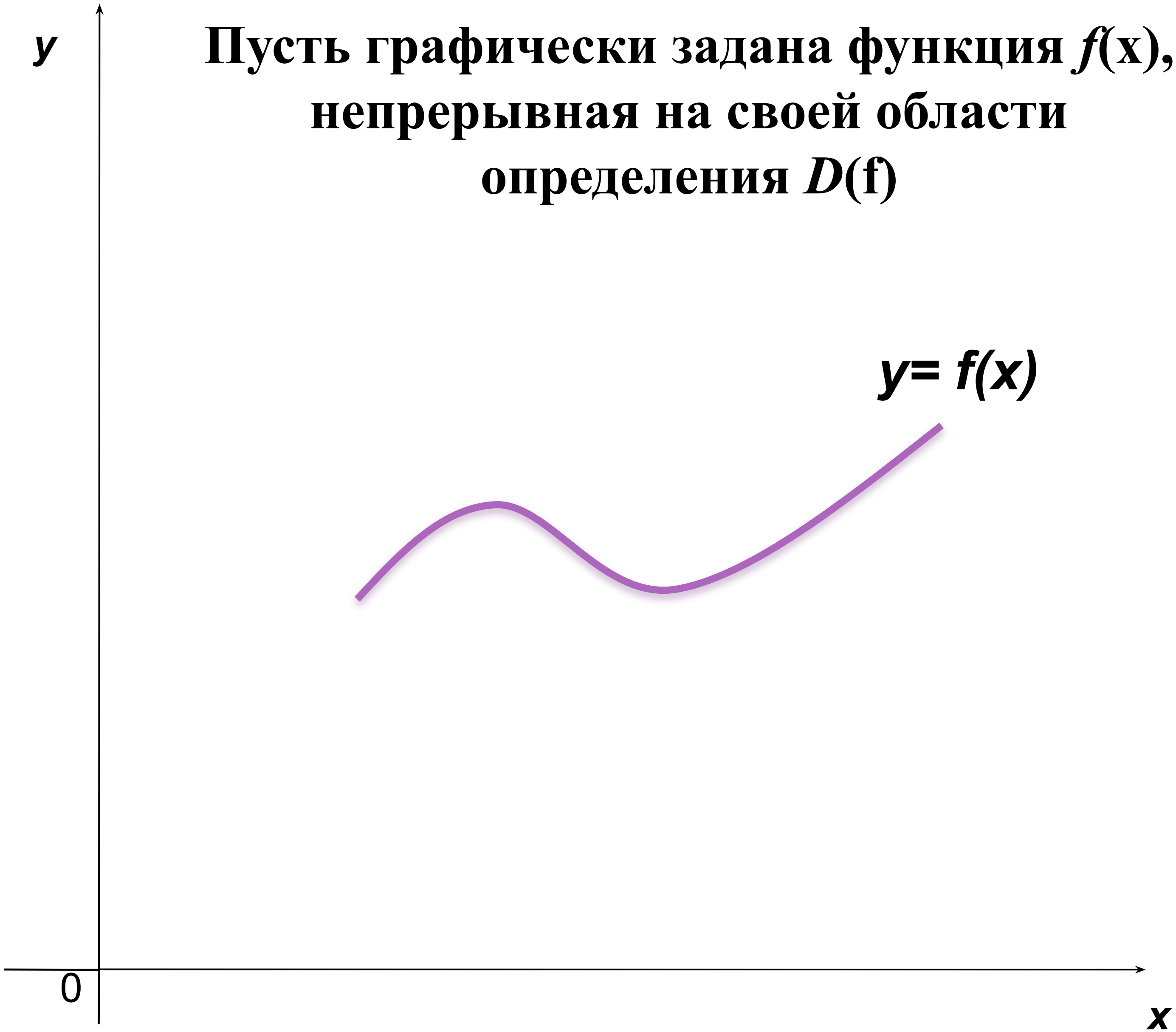
Для функции y=f(x) на отрезке [a;b]:

1.Разбить отрезок [a;b] на n равных частей

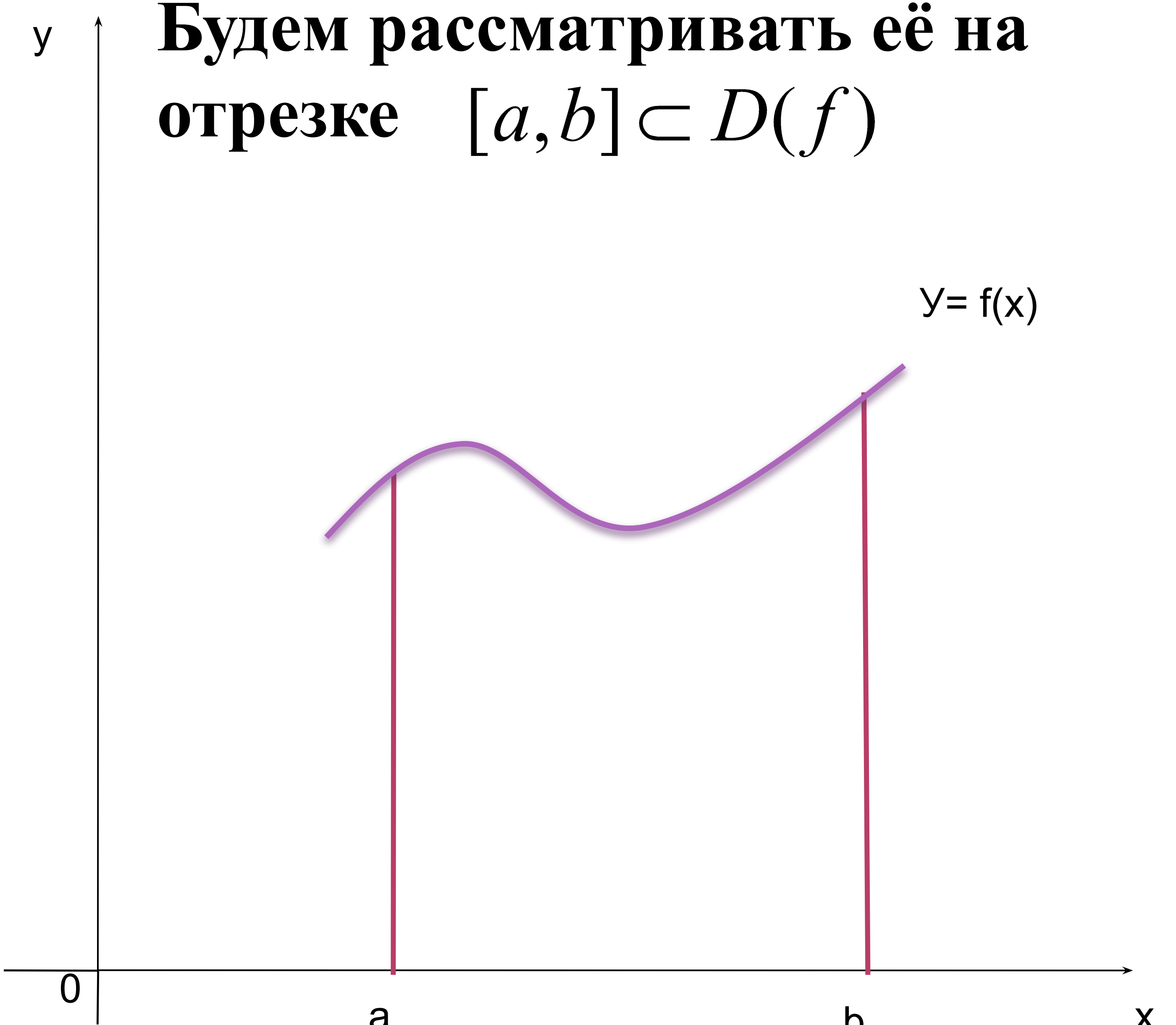
2.Составить сумму $S_n = f(x_0)\cdot\Delta x_0 + \ldots + f(x_n)\cdot\Delta x_n$

3.Вычислить предел этой суммы при $n \to \infty$

Пусть графически задана функция *f*(x), непрерывная на своей области определения *D*(f)

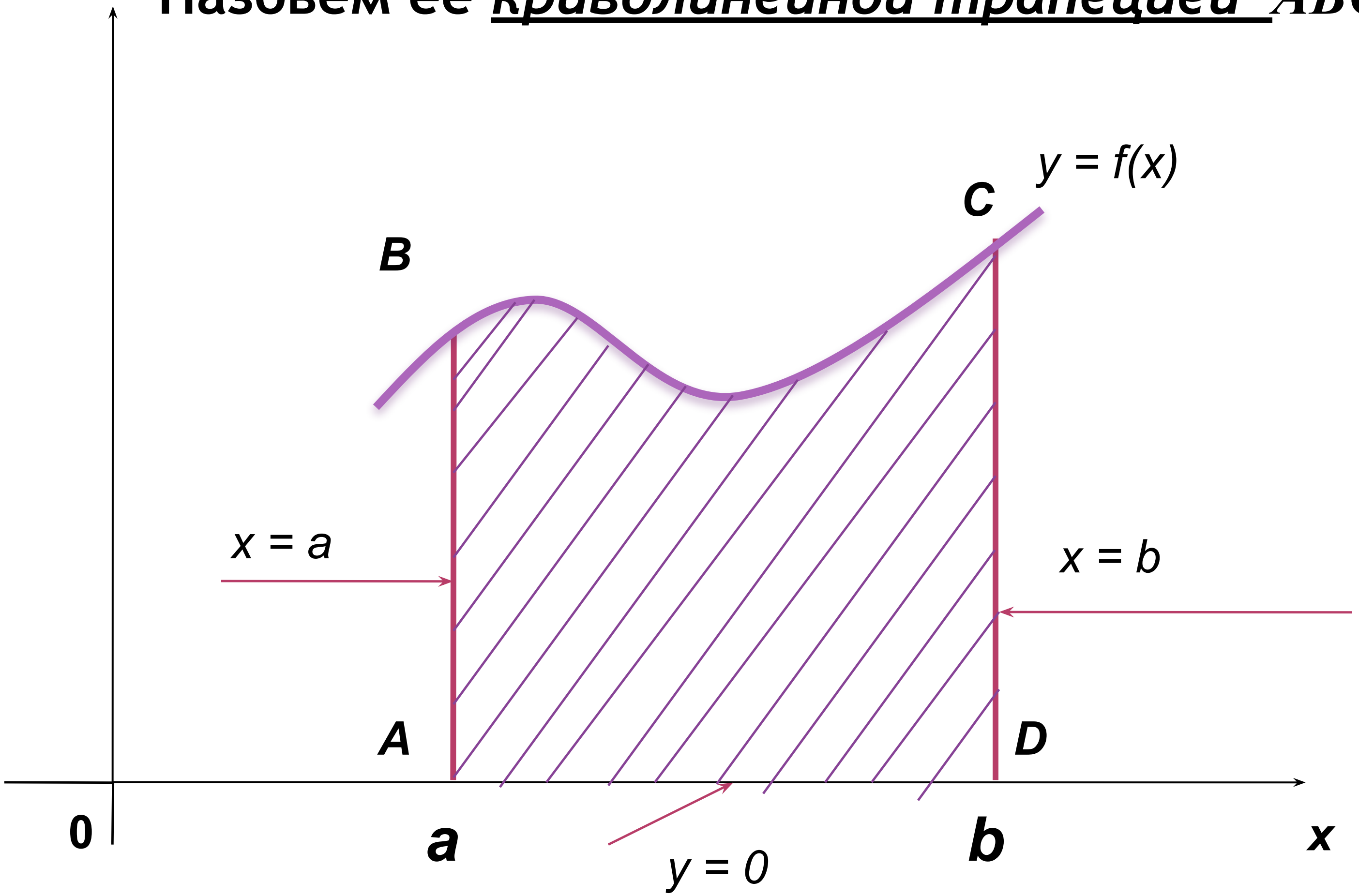


Будем рассматривать её на отрезке $[a,b] \subset D(f)$



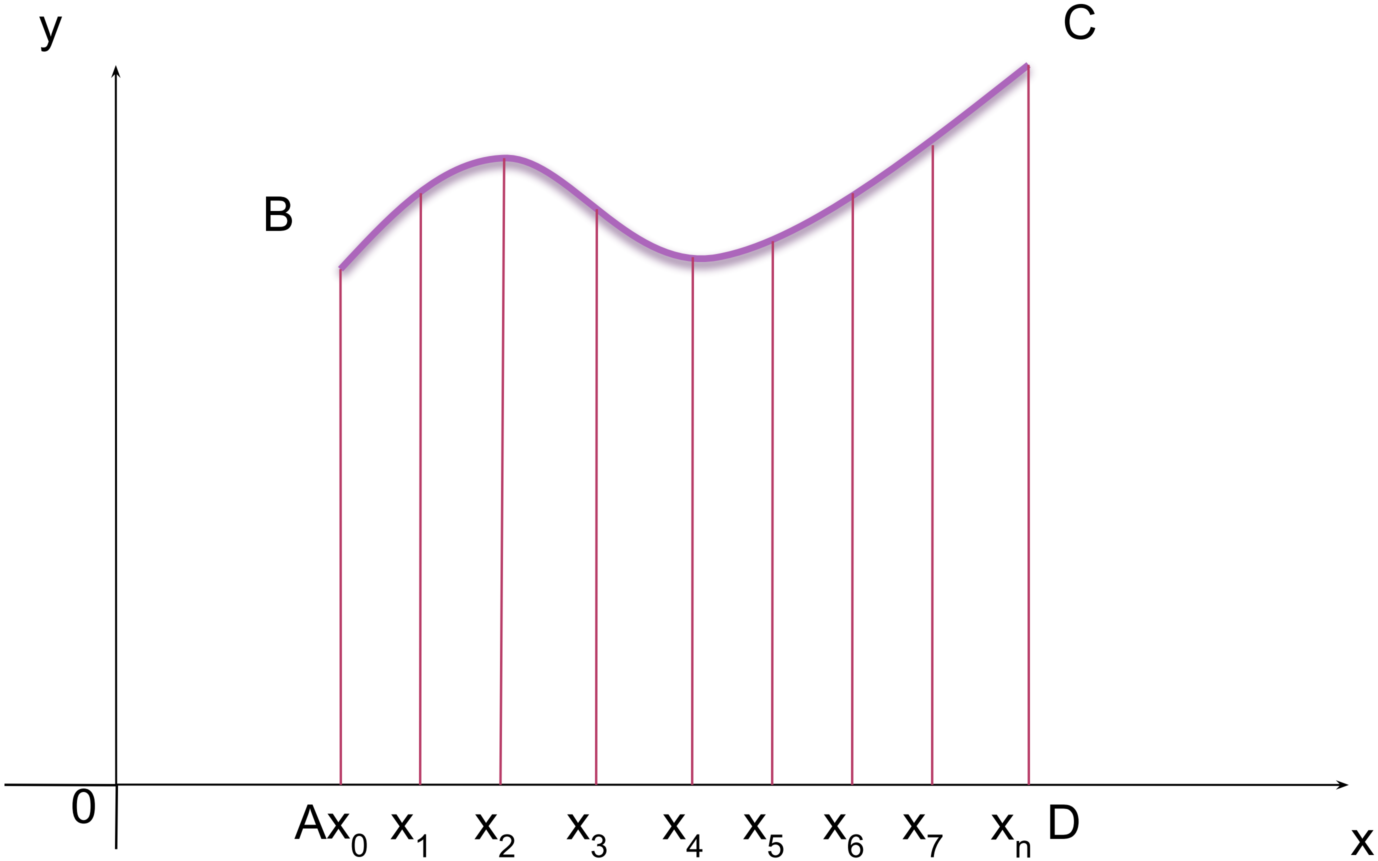
Построим фигуру, ограниченную графиком функции $y = f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и $y = 0$.

Назовём её *<u>криволинейной трапецией</u>* $ABCD$:



Поставим задачу нахождения её площади S

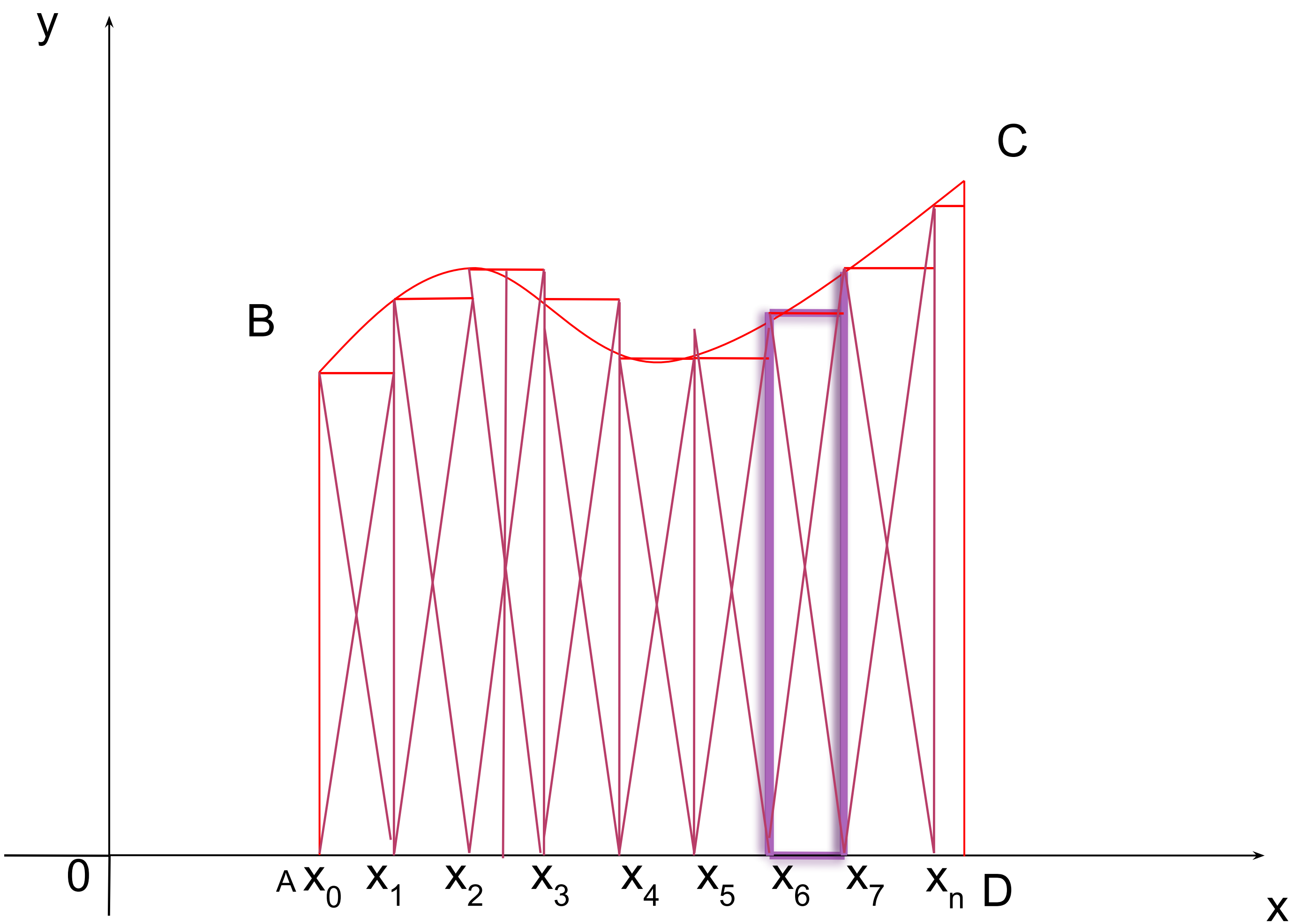
Разделим основание [AD] трапеции ABCD точками $x_0=a;x_1;x_2;\dots;\ x_n= b$ ($x_0= a<x_1<x_2<\dots<x_i<x_{i+1}<x_n=b$) произвольным образом



Через точки деления проведём прямые $y = a$, $y=x_1$, $y = x_2$, … $y = x_i$, $y= x_{i+1}$,…, $y= b$. Этими прямыми трапеция ABCD разбивается на полосы.

Каждой полосе поставим в соответствие прямоугольник, одна сторона которого есть отрезок $[x_i;x_{i+1}]$, а смежная сторона - это отрезок $f(x_i)$ $(i=0\ldots n-1)$

Криволинейная трапеция заменится некоторой ступенчатой фигурой, составленной из отдельных прямоугольников



Основание i-го прямоугольника равно разности $x_{i+1}-x_i$, **которую мы будем обозначать через** Δx_i Высота i-го прямоугольника равна $f(x_i)$

Площадь *i*-го прямоугольника равна:

$$S_i = f(x_i)x_i$$

Сложив площади всех прямоугольников, получаем приближенное значение площади *S* криволинейной трапеции:

$$S \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)x_i$$

Точное значение площади S получается как предел суммы площадей всех прямоугольников

$$S = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

Для обозначения предельных сумм вида $f(x_i)$ x_i немецкий учёный ***В.Лейбниц*** ввёл символ $\int_a^b f(x)dx$ - интеграл функции $f(x)$ от a до b

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

Если предел функции $f(x)$ существует, то $f(x)$ называется интегрируемой на отрезке [a, b]. Числа *a* и *b* называются *нижним* и *верхним* *пределом интегрирования*. При постоянных пределах интегрирования определённый интеграл представляет собой *определённое число*.

$f(x)$ - ***подынтегральная функция;***

$f(x)dx$ - ***подынтегральное выражение;***

a - ***нижний предел интегрирования;***

b - ***верхний предел интегрирования.***

Теорема. Определенный интеграл не зависит от выбора первообразной для интегрирования функции.

Теорема. Для всякой, непрерывной на отрезке $[a;b]$ функции, существует соответствующий определенный интеграл.

Доказательство основано на теореме Коши, т.е. существует определенный интеграл, значит, существует разность значений первообразной.

Свойства определенного интеграла

Пусть на отрезке $(a;b)$ существует определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \text{ где } F'(x) = f(x)$$

$$1. \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

$$2. \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$3. \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

4. Константу как множитель можно выносить за знак определенного интеграла.

5. Определенный интеграл от суммы конечного числа непрерывных функций равен сумме определенных интегралов от этих функций.

6. Если подынтегральная функция $f(x)$ неотрицательна, то и определенный интеграл от нее неотрицателен.

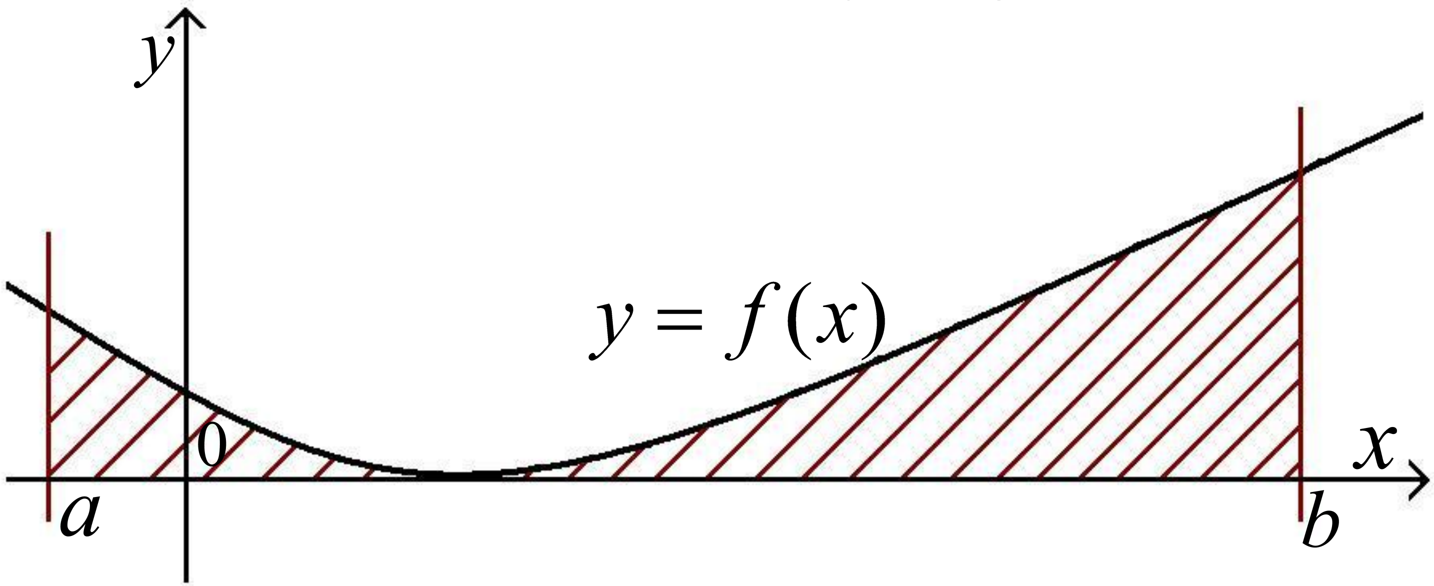
7. <u>Теорема о среднем</u>

Если $f(x)$ - непрерывная функция, то определенный интеграл равен:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\cdot f(c),\ c \in (a;b)$$

Геометрический смысл определенного интеграла

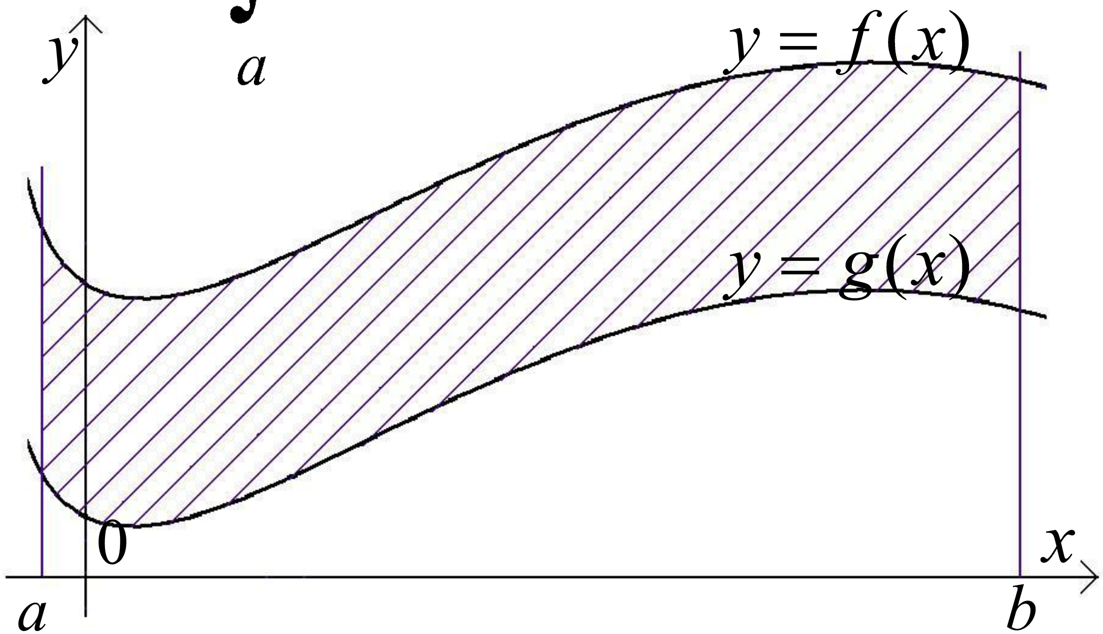
<u>Теорема.</u> Определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ от непрерывной неотрицательной $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ численно равен площади прямолинейной трапеции, ограниченной осью *OX*, прямыми $x = a$, $x = b$ и графиком функции $y = f(x)$.



Следствие.

Если линейная трапеция ограничена графиком функции $y = f(x)$, $y = g(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$,
$f(x) \geq g(x)$ для $x \in (a;b)$, площадь вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$



Связь и отличие определенных и неопределенных интегралов

<u>Связь:</u>

Как в неопределенном, так и в определенном интеграле нужно находить первообразную для функции $f(x)$.

Отличие:

Неопределенный интеграл – общее выражение для всех первообразных, определенный интеграл – это число.

ТЕОРЕМА О СУЩЕСТВОВАНИИ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Теорема.

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})\Delta x_i$ существует и конечен, т.е. существует и конечен $\int\limits_a^b f(x)dx$.

СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$;

2. $\int_a^b dx = b - a$;

3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;

4. $\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$;

СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

5. $\int\limits_a^b Kf(x)dx = K\int\limits_a^b f(x)dx$;

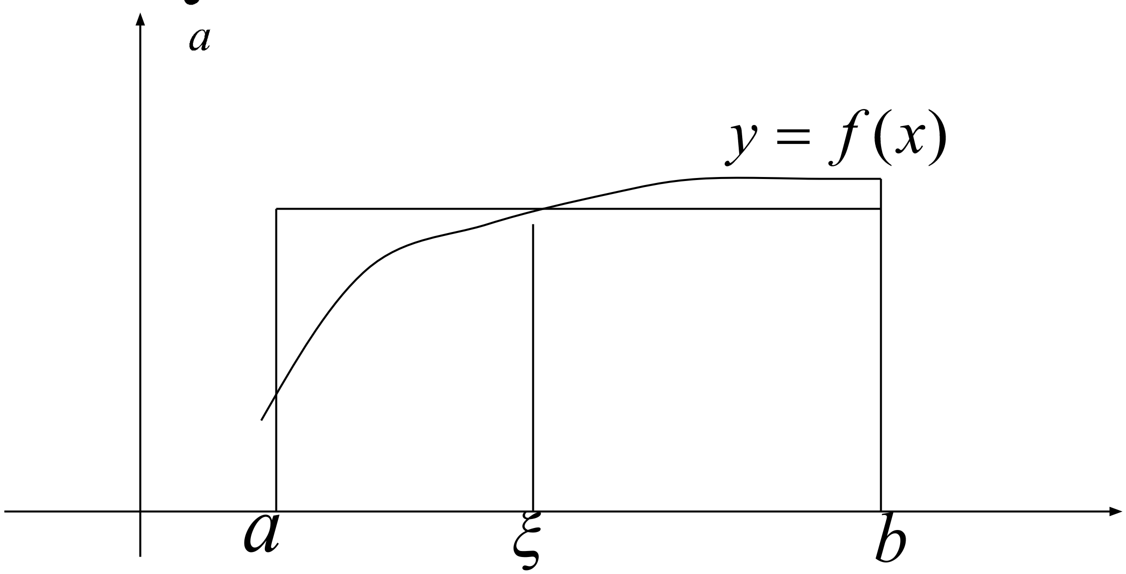
6. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$;

7. $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$, если $f(x) \geq 0$.

ТЕОРЕМА О СРЕДНЕМ

Если функция непрерывна на $[a,b]$, то существует такая точка $\xi \in [a,b]$, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$



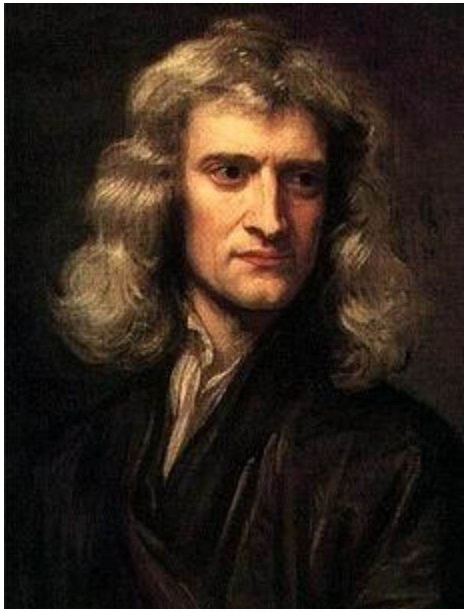
ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Теорема.
Пусть $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$.

Тогда $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Эту формулу называют формулой Ньютона-Лейбница, из которой следует, что для вычисления определенного интеграла необходимо найти первообразную подынтегральной функции.

ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕЙБНИЦА



Исаак Ньютон
1642-1727

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

где F(x) – первообразная для функции f(x)

Или

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$$

Готфрид Лейбниц
1646-1716

Формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА

Формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

ПРИМЕР

Вычислить $\int_0^3 e^{-\frac{x}{3}}dx$.

$$\int_0^3 e^{-\frac{x}{3}}dx = \int_0^3 e^{-\frac{1}{3}\cdot x}dx = -3e^{-\frac{1}{3}\cdot x}\Bigg|_0^3 = -3\left(e^{-\frac{1}{3}\cdot 3} - e^{-\frac{1}{3}\cdot 0}\right) =$$

$$= -3\left(e^{-1} - 1\right) = -3\left(\frac{1}{e} - 1\right) = -3\,\frac{1-e}{e}$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА

Теорема (Замена переменной в определенном интеграле).

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, а функция $x = \varphi(t)$ непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(t)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$, причем $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$.

Теорема. Дано: $\int_a^b f(x)dx,\ f(x) \in (a;b).$

Введем новую переменную,

связанную с x формулой $x = \varphi(t)$,

$\varphi(t)$ непрерывна на отрезке $(\alpha;\beta)$,

при этом $\varphi(\alpha) = a,$

$\varphi(\beta) = b \quad Тогда:$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt}$$

тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t) \cdot dt \\ \begin{array}{c|c|c} x & a & b \\ \hline t & \alpha & \beta \end{array} \end{array} \right| =$$

$$= \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(t)\Big|_\alpha^\beta = F(\beta) - F(\alpha)$$

ПРИМЕР

$$\int_0^3 \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x+1} = t \\ x+1 = t^2 \\ x = t^2 - 1,\ dx = 2t\,dt \\ x = 0,\ t = 1 \\ x = 3,\ t = 2 \end{array} \right| = \int_1^2 \frac{t^2 - 1}{t} 2t\,dt =$$

$$= \int_1^2 2\left(t^2 - 1\right)dt = 2\int_1^2 \left(t^2 - 1\right)dt = 2\left(\frac{t^3}{3} - t\right)\Bigg|_1^2 = 2\left[\left(\frac{8}{3} - 2\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right)\right] =$$

$$= 2\left(\frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} + 1\right) = 2\left(\frac{7}{3} - 1\right) = 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

Теорема (Интегрирование по частям в определенном интеграле).

Если функции $u = u(x)$, $v = v(x)$ и их производные $u'(x)$ и $v'(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, то

$$\int_a^b u\,dv = u \cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v\,du .$$

ПРИМЕР

$$\int_1^e \ln x dx = \begin{vmatrix} u = \ln x, du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx, v = x \end{vmatrix} = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x \frac{dx}{x} =$$

$$= x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e dx = e \ln e - \ln 1 - x \Big|_1^e = e - e + 1 = 1$$

НЕСОБСТВЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Замечание.

$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ не является определенным интегралом.

Считается по определению, что

$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$. Если этот предел

конечен, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, называемый

несобственным, сходится.

Если же этот предел не является конечным, то интеграл расходится.

ПРИМЕР

. Вычислить несобственный интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{x^2+4}$$

(или установить его расходимость)

- $$\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{d(x^2+4)}{x^2+4} = \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty} \ln(x^2+4)\Big|_0^b =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}(\ln(b^2+4) - \ln 4) = \infty$$

Этот несобственный интеграл расходится.

ПРИМЕР

Несобственный интеграл

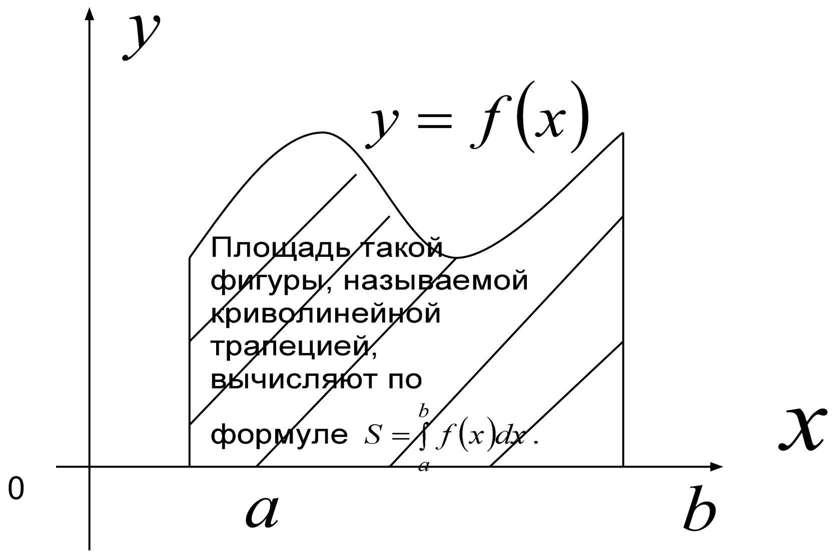
$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4} =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{2} arctg \frac{b}{2} = \frac{1}{2} arctg(+\infty) = \frac{\pi}{2\cdot 2} = \frac{\pi}{4}$$

Геометрические приложения определенного интеграла

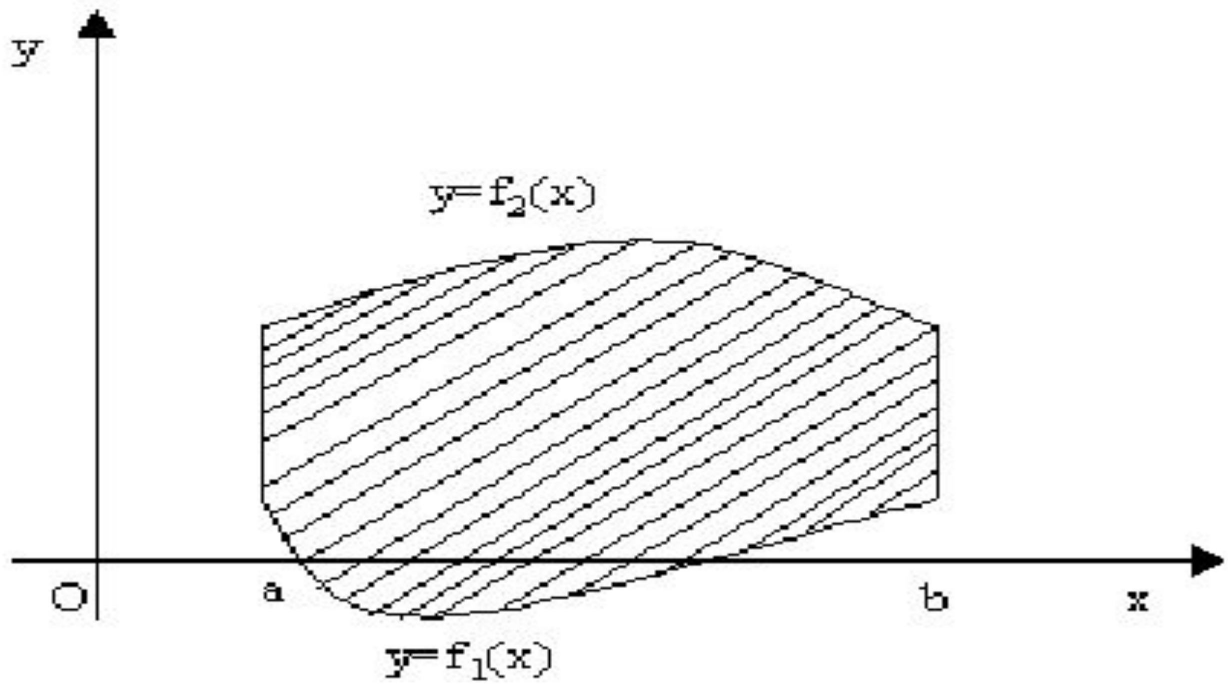
1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ

Площадь фигуры в декартовых координатах:



ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ

Площадь фигуры, ограниченной графиками непрерывных функций $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $f_1(x) \le f_2(x)$ и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$ определяется по формуле $S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx$



Вычисление площадей

В случае ***параметрического задания кривой***, площадь фигуры, ограниченной прямыми $x = a, x = b$, осью *Ox* и кривой $x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$ вычисляют по формуле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\varphi'(t)dt,$$

где пределы интегрирования определяют из уравнений

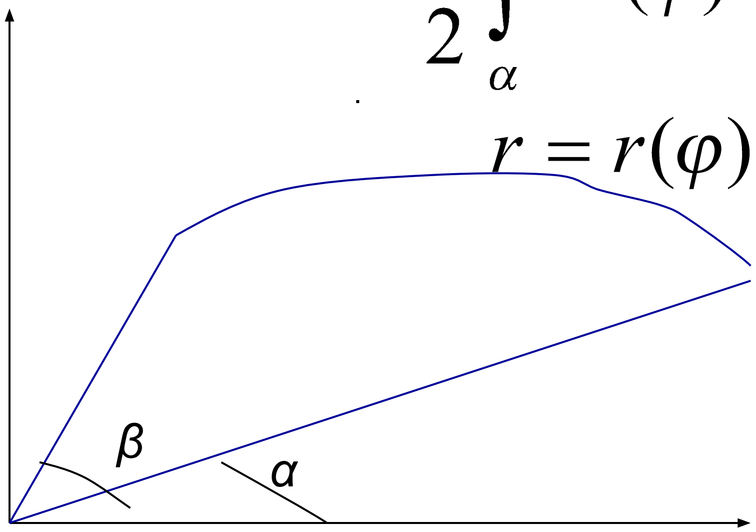
$$a = \varphi(t_1), b = \varphi(t_2).$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ

Площадь полярного сектора вычисляют по формуле

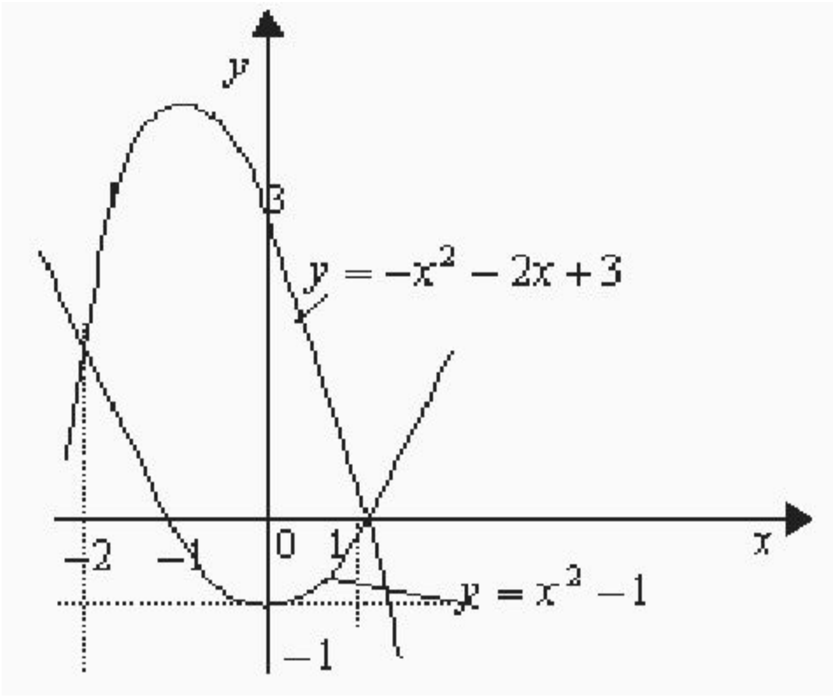
$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi$$

$$r = r(\varphi)$$



ПРИМЕРЫ

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -x^2 - 2x + 3$ и $y = x^2 - 1$



Продолжение

Получим

$$S=\int_{-2}^{1}\left[\left(-x^2-2x+3\right)-\left(x^2-1\right)\right]dx=\int_{-2}^{1}\left(-2x^2-2x+4\right)dx=$$

$$=-2\int_{-2}^{1}\left(x^2+x-2\right)dx=-2\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right)\Bigg|_{-2}^{1}=$$

$$=-2\left[\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)-\left(-\frac{8}{3}+\frac{4}{2}+4\right)\right]=-2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2+\frac{8}{3}-6\right)=$$

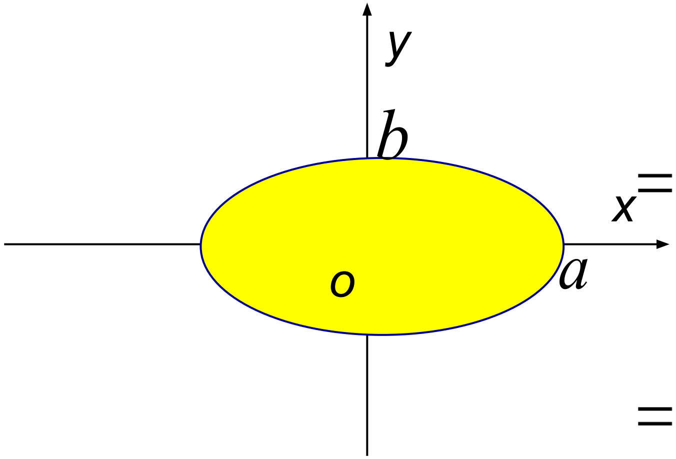
$$=-2\left(3-8+\frac{1}{2}\right)=-2\left(-\frac{9}{2}\right)=9$$

ПРИМЕРЫ

Найти площадь эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Параметрические уравнения эллипса

$$x = a\cos t,\ y = b\sin t.$$

$$S = 4\int_{\pi/2}^{0} b\sin t(-a\sin t)dt =$$



$$= 4ab\int_{0}^{\pi/2}\sin^2 t dt = 4ab\int_{0}^{\pi/2}\frac{1-\cos 2t}{2}dt =$$

$$= \frac{1}{2}4ab(t-\frac{1}{2}\sin 2t)_0^{\pi/2} = 2ab\frac{\pi}{2} = \pi ab.$$

ПРИМЕР

Площадь фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$

и лежащей вне круга радиуса $r = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$:

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} a^2 \cos 2\varphi d\varphi - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} \frac{a^2}{2} d\varphi = \left(\frac{1}{4}a^2 \sin 2\varphi - \frac{1}{4}a^2\varphi\right)\Big|_0^{\pi/6} =$$

$$= \frac{1}{4}a^2\left(\sin\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{a^2}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{a^2}{8}\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$S = \frac{a^2}{2}\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЛИНЫ ДУГИ

Если кривая задана параметрическими уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, то длина ее дуги

$$l=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt,$$

где t_1, t_2 – значения параметра, соответствующие концам дуги .

ДЛИНА ДУГИ В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

Если кривая задана уравнением $y = f(x)$, то $l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$, где *a*, *b*–абсциссы начала и конца дуги $(a < b)$.

Если кривая задана уравнением $x = g(y)$, то $l = \int_c^d \sqrt{1 + (g'(y))^2}\,dy$, где $(c < d)$ *c*, *d*–ординаты начала и конца дуги

ДЛИНА ДУГИ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

Если кривая задана уравнением в полярных координатах $\rho = \rho(\varphi)$, то

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2}\, d\varphi ,$$

где α, β значения полярного угла, соответствующие концам дуги .

ПРИМЕРЫ

Вычислить длину дуги кривой $y=\sqrt{x^3}$

от точки $O(0,0)$ до $B(4,8)$:

$$y'=\left(x^{\frac{3}{2}}\right)'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$, тогда

$$l=\int_0^4\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\frac{4}{9}\int_0^4\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,d\left(1+\frac{9}{4}x\right)=$$

$$=\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^4=\frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЕМА ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ.

Объем тела, образованного вращением вокруг оси *Ox* криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, отрезком оси абсцисс $a \le x \le b$ и прямыми $x = a, x = b$, вычисляется по формуле

$$V_x = \pi \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx$$

.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЕМА ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

Объем тела, образованного вращением вокруг оси *Oy* фигуры, ограниченной кривой $x = g(y)$, отрезком оси ординат $c \le y \le d$ и прямыми $y = c, y = d$, вычисляется по формуле

$$V_y = \pi \int_c^d (g(y))^2 \, dy.$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЕМА ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

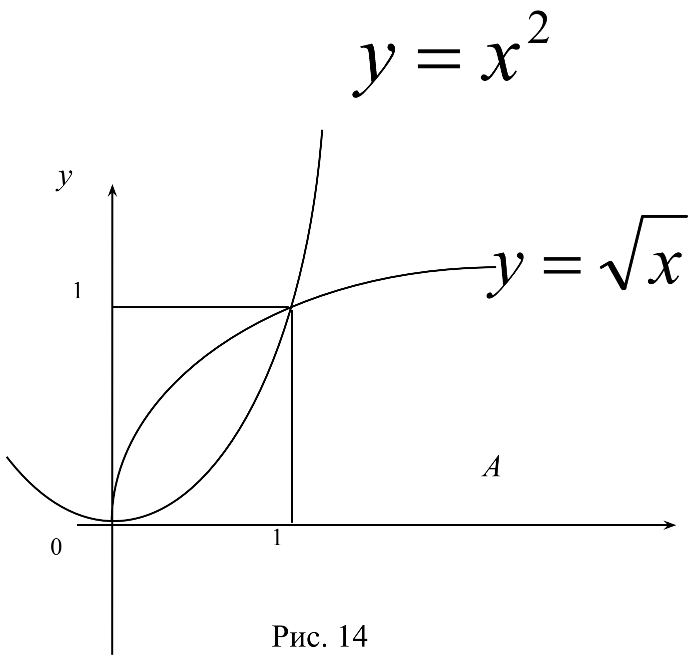


Рис. 14

Искомый объем можно найти как разность объемов, полученных вращением вокруг оси *Ox* криволинейных трапеций, ограниченных линиями $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$

РЕШЕНИЕ

Тогда $$V_x = \pi \int_0^1 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx - \pi \int_0^1 \left(x^2\right)^2 dx =$$

$$= \pi \int_0^1 x dx - \pi \int_0^1 x^4 dx = \pi \cdot \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 - \pi \cdot \frac{x^5}{5}\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = \frac{3\pi}{10}$$