$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Определители и их свойства

Решение линейных уравнений с помощью правила Крамера.

Обратные матрицы.

Решение систем уравнений с помощью обратных матриц

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Понятие определителя

Понятие определителя (или детерминанта) квадратной матрицы A порядка n , которое обозначается через $\det A$ или $|A|$, введем индуктивным методом.

При $n = 1$ $A = (a_{11})$

$$n = 2 \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Перейдем к индуктивному шагу: предположим, что нами уже введено понятие определителя порядка $n-1$, соответствующего произвольной квадратной матрице $(n-1)-$ го порядка.

Понятие минора элемента

Определение. *Минором* некоторого элемента a_{ij} матрицы A порядка n называется определитель $(n-1)$– порядка, соответствующий матрице, которая получается из исходной матрицы A в результате вычеркивания той строки и того столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}, т.е. i – строки и j – го столбца.

Минор элемента a_{ij} обозначается M_{ij}.

Определение определителя

- **Определение.** Определителем n -го порядка, соответствующим матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется число, равное

$$a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \ldots + (-1)^{n+1} a_{1n}M_{1n} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j}M_{1j}$$

и обозначаемое $\det A$, либо $|A|$

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ
ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ КВАДРАТНОЙ МАТРИЦЫ

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j}.$$

Эта формула называется *разложением определителя* n *—го порядка по первой строке.*

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ КВАДРАТНОЙ МАТРИЦЫ

- $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ \cdots + (-1)^{1+j} \cdot a_{1j} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2\,j-1} & a_{2\,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots +$$

$$+ (-1)^{1+n} \cdot a_{1n} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2\,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,n-1} \end{vmatrix} \qquad (3)$$

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ
ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ КВАДРАТНОЙ МАТРИЦЫ

Теорема 1. Каков бы ни был номер строки $i \quad (i = 1, 2, \ldots n)$ для определителя матрицы справедлива формула

$$|A| = (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} M_{i2} \ldots + (-1)^{i+n} a_{in} M_{in} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}.$$

Эта формула называется *разложением определителя* n *— го порядка по* i*й* *строке.*

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ
ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ КВАДРАТНОЙ МАТРИЦЫ

Теорема 2. Каков бы ни был номер столбца $j \quad (j = 1, 2, \ldots n)$ для определителя матрицы справедлива формула

$$|A| = (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j} + (-1)^{2+j} a_{2j} M_{2j} \ldots + (-1)^{n+j} a_{nj} M_{nj} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}.$$

Эта формула называется *разложением определителя* n *— го порядка по* j*-му* *столбцу.*

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ КВАДРАТНОЙ МАТРИЦЫ

Определитель может быть вычислен разложением по элементам его л ю б о й строки или столбца.

Замечание. Для определителя используют те же термины (элементы, строки, столбцы, главная и побочная диагонали), что и для соответствующей квадратной матрицы, чей определитель вычисляется.

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ
ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ КВАДРАТНОЙ МАТРИЦЫ

- В качестве примера рассмотрим определитель третьего порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad (2)$$

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ

Свойства определителя:

- 1. Определитель не меняется при замене в нем всех строк соответствующими (по номеру) столбцами;
- 2. Определитель равен нулю, если содержит нулевую строку или нулевой столбец;
- 3. Определитель равен нулю, если содержит две одинаковые строки или два одинаковых столбца;

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ

Свойства определителя:

- 4.О*пределитель треугольной матрицы*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

равен произведению элементов главной диагонали;

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ

Свойства определителя:

- **5.** Определитель изменит знак на противоположный, если в нем поменять местами любые две строки или столбца (то есть применено элементарное преобразование первого типа);
- **6.** Если строку (столбец) определителя умножить на некоторое число (то есть применено элементарное преобразование третьего типа), то определитель умножится на это число.

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ
Свойства определителя:

- 7. Определитель не изменится, если в нем заменить строку суммой этой строки и некоторой другой, вспомогательной, предварительно умноженной на какое-либо число (то есть применено элементарное преобразование второго типа);

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ

Свойства определителя:

- **8.** Определитель произведения квадратных матриц равен произведению определителей сомножителей. т. е.

$$|AB| = |A||B|.$$

- **Определение.** Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} матрицы A порядка n называется число, равное $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}, (i = 1, 2, \ldots n, \quad j = 1, 2, \ldots n).$
- Используя алгебраическое дополнение, имеем

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}.$$

Обратная матрица

- Пусть A – квадратная матрица n –го, E – единичная матрица того же порядка.

Определение. Матрица B называется *обратной для квадратной матрицы* , если $AB = BA = E.$

Замечание. Обратная матрица B такого же порядка, что и матрица A .

Обратная матрица для матрицы A обозначается A^{-1}.

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Обратная матрица

Определение. Матрица называется ***невырожденной,*** если определитель этой матрицы отличен от нуля:

$$|A| \neq 0,$$

в противном случае матрица называется ***вырожденной.***

Теорема. Если матрица A имеет обратную, то эта матрица является невырожденной: $|A| \neq 0.$

$$\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}$$

Обратная матрица

- **Теорема.** Всякая невырожденная матрица имеет обратную, причем

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнения элемента a_{ij} матрицы A.

Обратная матрица

- Обратную матрицу можно вычислить по следующей формуле

$$A^{-1} = \left|\frac{A_{ij}^{T}}{|A|}\right|,$$

где A_{ij}^{T} – алгебраическое дополнения элемента a_{ij} в определителе A^{T}, транспонированной к матрице A.

Примеры

- **Пример 1.** Найти матрицу, обратную данной:

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}$$

- **Решение.** Найдем определитель матрицы.

$$|A|=\begin{vmatrix}3 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 4\end{vmatrix}=\left(-1\right)^{1+2}(-1)\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 4\end{vmatrix}=5$$

Примеры

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Найдем алгебраические дополнения матрицы A^T .

$$A_{11} = (-1)^{1+1}(4+1) = 5; \quad A_{12} = (-1)^{1+2}(-4+0) = 4;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}(-1+0) = -1; \quad A_{21} = (-1)^{2+1}(-8-2) = 10;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}(12-0) = 12; \quad A_{23} = (-1)^{2+3}(3+0) = -3;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}(2-2) = 0; \quad A_{32} = (-1)^{3+2}(-3+2) = 1;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}(3-2) = 1.$$

Примеры

- Составляем обратную матрицу

$$A_{11}=5;\quad A_{12}=4;\quad A_{13}=-1;\quad A_{21}=10;$$
$$A_{22}=12;\quad A_{23}=-3;\quad A_{31}=0;\quad A_{32}=1;$$
$$A_{33}=1.$$

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5 & 4 & -1\\ 10 & 12 & -3\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix};\, A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 4/5 & -1/5\\ 2 & 12/5 & -3/5\\ 0 & 1/5 & 1/5\end{pmatrix}.$$

Примеры

- Проведем проверку, умножив A на A^{-1}.

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}\qquad A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 4/5 & -1/5\\ 2 & 12/5 & -3/5\\ 0 & 1/5 & 1/5\end{pmatrix}.$$

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

Решение матричных уравнений

- **Теорема.** Если $|A| \neq 0$ и $A, B -$ матрицы порядка, n то решение матричных уравнений

$$A \cdot X = B \quad и \quad X \cdot A = B,$$

где $X -$ квадратная матрица порядка n , находится по соответствующей из формул:

$$X = A^{-1} \cdot B \quad и \quad X = B \cdot A^{-1}.$$

Решение матричных уравнений

- **Теорема.** Если $|A| \neq 0$ и $|C| \neq 0$,где $A, B, C -$ матрицы размерностью $n \times n, n \times m, m \times m$ соответственно ,то решение матричного уравнения

$$A \cdot X \cdot C = B,$$

где $X -$ матрица размерности $n \times m,$ находится по формуле:

$$X = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}.$$

Примеры

- **Пример.** Решить матричное уравнение

$$A \cdot X = B, \quad где \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

- **Решение.** Найдем A^{-1} .

$$|A| = 4 - 6 = -2; \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B, \qquad A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1. СИСТЕМЫ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

- **О п р е д е л е н и е 1.** *Системой линейных алгебраических уравнений*, состоящей из двух уравнений с двумя неизвестными *x* и *y*, называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2, \end{cases} \qquad (1)$$

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1. СИСТЕМЫ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

- где – $a_{ij}, b_i \quad (i, j = 1, 2)$ некоторые постоянные действительные числа .

О п р е д е л е н и е 2. Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ называется *матрицей системы* (1); вектор

$\bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ называется *столбцом свободных членов системы* (1),

вектор $\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ – столбцом неизвестных.

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1. СИСТЕМЫ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Теорема 1 (*правило Крамера*). Если определитель матрицы системы (1) не равен нулю, то система (1) имеет единственное решение, вычисляемое по формулам:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} \qquad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

где $\Delta = |A|$; $\Delta_j \ (j = 1, 2)$

– определители, полученные из Δ заменой его *j*-го столбца столбцом свободных членов .

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
1. СИСТЕМЫ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Теорема 2. Если у системы (1) $\Delta = 0$ но хотя бы один из определителей Δ_1 или Δ_2 отличен от нуля, то система (1) не имеет решения. Если у системы (1) $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$, то система (1) имеет бесконечное множество решений.

2. СИСТЕМЫ ТРЕХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Определение 3. *Системой линейных алгебраических уравнений*, состоящей из трех уравнений с тремя неизвестными ***x***, ***y*** и ***z***, называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3, \end{cases} \qquad \textbf{(2)}$$

где $a_{ij}, b_i \ (i, j = 1,2,3)$

– некоторые постоянные действительные числа.

2. СИСТЕМЫ ТРЕХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Определение 4. *Матрицей системы* (2), столбцом свободных членов системы (2) и столбцом неизвестных системы (2) называются, соответственно, матрица ***A***, вектор $\overset{\boxtimes}{b}$ и вектор $\overset{\boxtimes}{x}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}; \qquad \bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Теорема 3. (правило Крамера). Если определитель матрицы системы (2) не равен нулю, то система (2) имеет единственное решение, вычисляемое по формулам:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

где

$$\Delta = |A|; \qquad \Delta_j \ (j = 1,2,3)$$

определители, полученные из Δ заменой его j-го столбца столбцом свободных членов .

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
2. СИСТЕМЫ ТРЕХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Теорема 4. Если у системы (2) $\Delta = 0$, но хотя

. бы один из определителей Δ_1, Δ_2 или Δ_3

отличен от нуля, то система (2) не имеет решения.

Если выполнены условия $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$

то система (2) или имеет бесконечное множество

решений.

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Примеры

- **Пример 1.** Решить систему:

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ 3x - y = 1 \\ 4x - y + 3z = 1. \end{cases}$$

Решение. В данном примере имеем:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Delta = |A| = -3 - 6 + 8 = -1 \neq 0.$$

Вычислим:

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Примеры

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -3; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -8; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Отсюда находим:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-3}{-1} = 3; \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-8}{-1} = 8; \quad z = \frac{1}{-1} = -1.$$