Тема: Разложение дроби на простейшие.

Студенты ПЭ13-10

Решетников П.А, Малышев А.В.

Дробно – рациональная функция

Дробно – рациональной функцией называется функция, равная отношению двух многочленов:

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$$

Рациональная дробь называется ***правильной***, если степень числителя меньше степени знаменателя, то есть $m < n$, в противном случае дробь называется ***неправильной***.

многочлен степени m

многочлен степени n

Всякую неправильную рациональную дробь можно, путем деления числителя на знаменатель, представить в виде суммы многочлена $L(x)$ и правильной рациональной дроби:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = L(x) + \boxed{\frac{R(x)}{Q(x)}}$$

Простейшие рациональные дроби

Правильные рациональные дроби вида:

$$(\mathrm{I})\quad \frac{A}{x-a}$$

$$(\mathrm{II})\quad \frac{A}{(x-a)^k}\quad (k \ge 2;\, k \in N)$$

$$(\mathrm{III})\quad \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\quad (p^2-4q<0)$$

$$(\mathrm{I}V)\quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}\quad (p^2-4q<0;\quad k \ge 2;\, k \in N)$$

Называются ***простейшими рациональными дробями*** $\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}, \mathrm{I}V$ типов.

Разложение рациональной дроби на простейшие дроби

Теорема: Всякую правильную рациональную дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, знаменатель которой разложен на множители:

$$Q(x)=(x-x_1)\cdot(x-x_2)^k\cdot\ldots\cdot(x^2+p_1x+q_1)\cdot$$
$$\cdot(x^2+p_2x+q_2)^s$$

можно представить, притом единственным образом в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B_1}{x-x_2}+\frac{B_2}{(x-x_2)^2}+\ldots+\frac{B_k}{(x-x_2)^k}$$
$$+\frac{Cx+D}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_2x+q_2}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_2x+q_2)^2}+$$
$$+\ldots+\frac{M_sx+N_s}{(x^2+p_2x+q_2)^s}$$

Разложение рациональной дроби на простейшие дроби

Поясним формулировку теоремы на следующих примерах:

$$\frac{x^2+4}{\boxed{(x-2)}\boxed{(x-3)^3}}=\boxed{\frac{A}{x-2}}+\boxed{\frac{B_1}{x-3}+\frac{B_2}{(x-3)^2}+\frac{B_3}{(x-3)^3}}$$

$$\frac{x^3+3}{\boxed{x^2}\boxed{(x^2+1)}}=\boxed{\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}}+\boxed{\frac{Cx+D}{x^2+1}}$$

$$\frac{7x^2+8x+9}{\boxed{(x-4)}\boxed{(x^2+x+1)^2}}=\boxed{\frac{A}{x-4}}+\boxed{\frac{M_1x+N_1}{x^2+x+1}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+x+1)^2}}$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов *A, B, C, D*… применяют два метода: ***метод сравнивания коэффициентов и метод частных значений переменной***. Первый метод рассмотрим на примере.

Разложение рациональной дроби на простейшие дроби

Представить дробь в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}=\boxed{\frac{-1}{x-1}+\frac{3x-2}{x^2-2x+5}}$$

$$\frac{A(x^2-2x+5)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2-2x+5)}$$

Приведем простейшие дроби к общему знаменателю

$$Ax^2-2Ax+5A+Bx^2+Cx-Bx-C=2x^2-3x-3$$

Приравняем числители получившейся и исходной дробей

$$\begin{array}{c|l} x^2 & \\ x^1 & \\ x^0 & \end{array}\left\{\begin{array}{l} A+B=2 \\ -2A+C-B=-3 \\ 5A-C=-3 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A=-1 \\ B=3 \\ C=-2 \end{array}\right. \Rightarrow$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x

Интегрирование простейших дробей

Найдем интегралы от простейших рациональных дробей:

I $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = \boxed{A\ln|x-a| + C}$

II $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int (x-a)^{-k} d(x-a) =$

$$= \boxed{\frac{A(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C}$$

III $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx$

Общее правило разложения рациональных дробей на простейшие

- Если дробь неправильная, то представить ее в виде суммы многочлена и правильной дроби.
- Разложив знаменатель правильной рациональной дроби на множители, представить ее в виде суммы простейших дробей с неопределенными коэффициентами
- Найти неопределенные коэффициенты методом сравнения коэффициентов или методом частных значений переменной.

Пример

$$\mathrm{I} = \int \frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^3 + 2x^2 + x}\, dx$$

Приведем дробь к правильному виду.

$$\begin{array}{r|l}
x^5 + 2x^3 + 4x + 4 & x^3 + 2x^2 + x \\ \cline{2-2}
-\underline{x^5 + 2x^4 + x^3} & x^2 - 2x + 5 \\
-2x^4 + x^3 + 4x + 4 & \\
-\underline{-2x^4 - 4x^3 - 2x^2} & \\
5x^3 + 2x^2 + 4x + 4 & \\
-\underline{5x^3 + 10x^2 + 5x} & \\
-8x^2 - x + 4 &
\end{array}$$

$$\frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^3 + 2x^2 + x} = x^2 - 2x + 5 + \frac{-8x^2 - x + 4}{x^3 + 2x^2 + x}$$

Пример

$$\frac{-8x^2-x+4}{x^3+2x^2+x}=\frac{-8x^2-x+4}{x(x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx}{x(x+1)^2}$$

Представим дробь в виде суммы простейших дробей

Разложим знаменатель правильной дроби на множители

$$A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx=-8x^2-x+4$$

$$\begin{array}{l|c}
x=0 & A=4 \\
x=-1 & -C=-3 \\
x=1 & 4A+2B+C=-5
\end{array}
\Rightarrow
\begin{cases}
A=4 \\
B=-12 \\
C=3
\end{cases}$$

Найдем неопределенные коэффициенты методом частных значений переменной

$$\frac{-8x^2-x+4}{x^3+2x^2+x}=\frac{4}{x}-\frac{12}{x+1}+\frac{3}{(x+1)^2}$$

Пример

$$\mathrm{I} = \int x^2 - 2x + 5 + \frac{4}{x} - \frac{12}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2}\,dx =$$

$$\int x^2dx - 2\int xdx + 5\int dx + 4\int\frac{dx}{x} - 12\int\frac{dx}{x+1} + 3\int\frac{dx}{(x+1)^2} =$$

$$= \boxed{\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x + 4\ln|x| - 12\ln|x+1| - \frac{3}{x+1} + C}$$