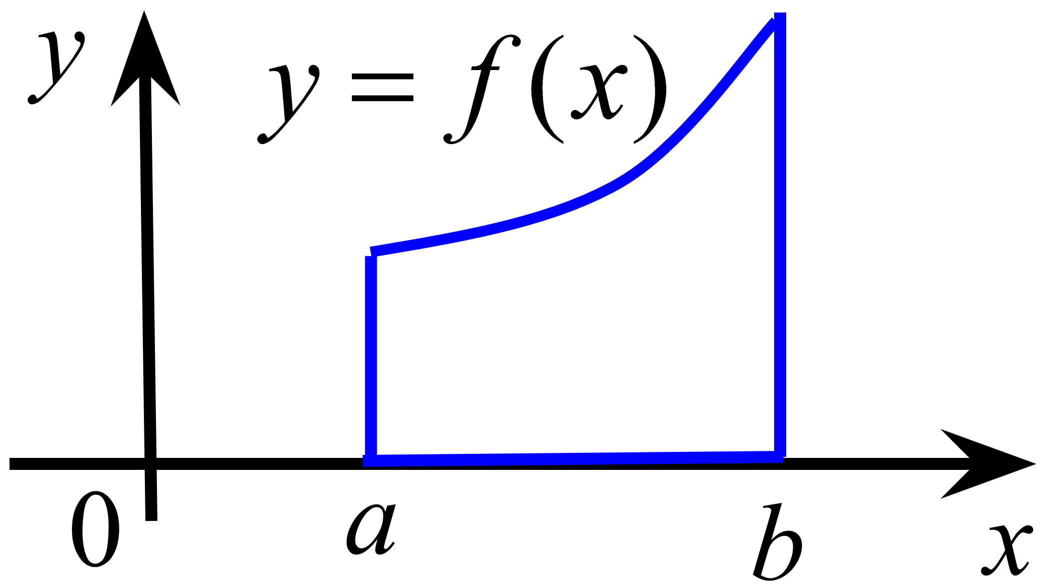
Лекция N10

Лектор:

Тема: Определенный интеграл

Задача о площади криволинейной трапеции

Рассмотрим фигуру, ограниченную слева и справа прямыми $x = a$ и $x = b$, снизу отрезком оси Ox и сверху кривой $y = f(x)$.



Такая фигура называется криволинейной трапецией.
Вычислим площадь этой фигуры.

1) Разобьем отрезок $[a,b]$ на n малых отрезков с помощью точек деления

$$x_1 < x_2 < \dots < x_i < \dots < x_{n-1}.$$

2) В каждом из отрезков возьмем произвольную точку c_i, где

$$c_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

3) Составим сумму $\sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i$.

Назовем её **интегральной суммой**.

4) Назовем **определенным интегралом**

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i$$

и обозначим

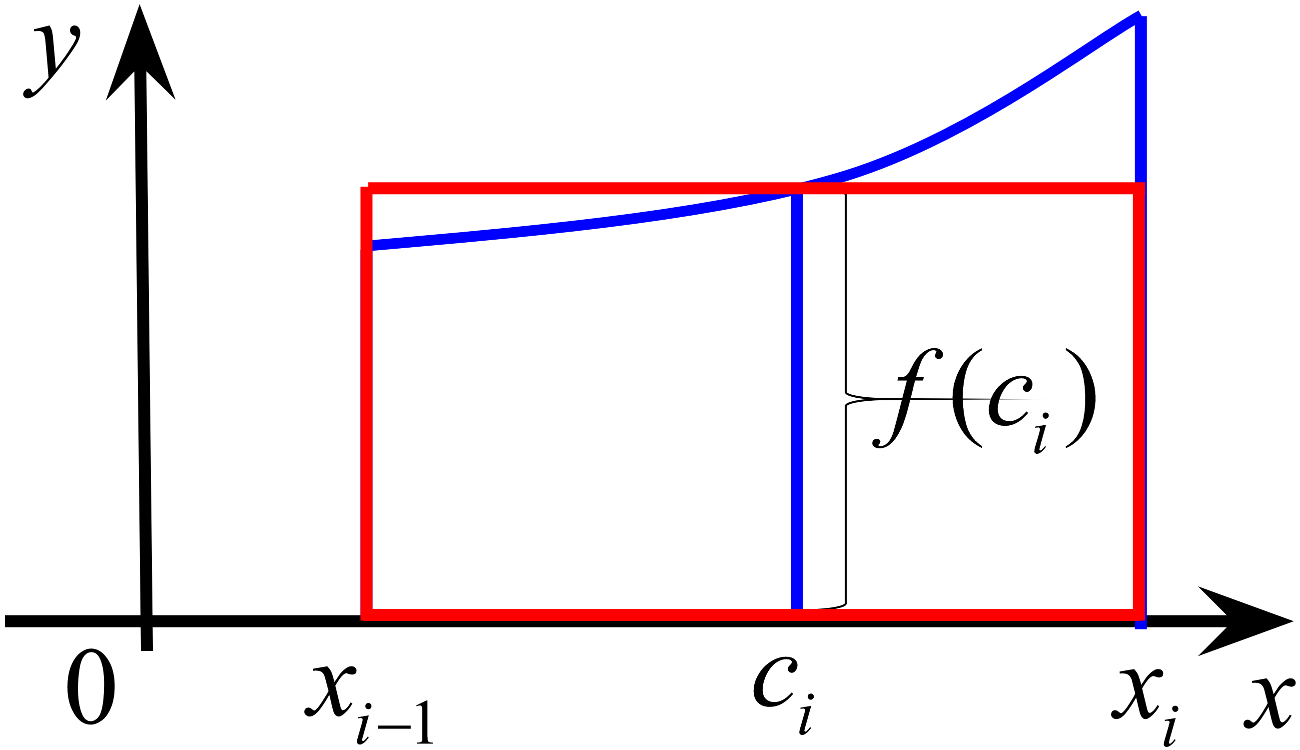
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i .$$

Числа a и b называют верхним и нижним пределами интегрирования.

$f(x)$ **- подынтегральная функция.**

$f(x)dx$ **- подынтегральное выражение.**

Произведение $f(c_i)\cdot\Delta x_i$ **численно равно площади прямоугольника с основанием** $[x_{i-1}, x_i]$ **и высотой** $f(c_i)$.



y
f(c_i)
0
x_{i−1}
c_i
x_i
x

Геометрический смысл определенного интеграла:

$$\int_a^b f(x)\,dx = S_{\text{криволинейной трапеции}}.$$

(предполагается, что $f(x) \geq 0$ **).**

Свойства определенного интеграла

$$1)\quad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

$$2)\quad \int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx.$$

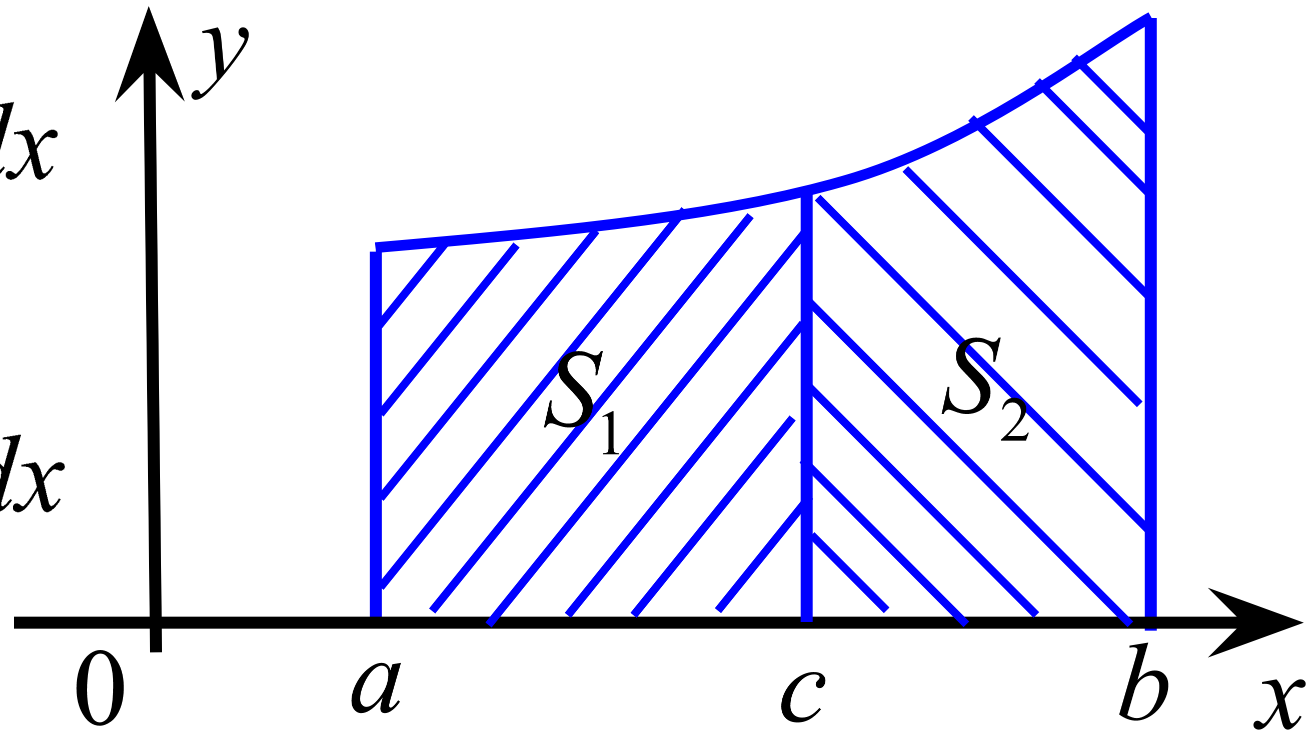
$$3)\ \int_a^b \big(f(x)+\varphi(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Свойства определенного интеграла

$$4)\quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

$$S_1 = \int_a^c f(x)\,dx$$

$$S_2 = \int_c^b f(x)\,dx$$



Свойства определенного интеграла

5) $$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Теорема о среднем значении

Если $f(x)$ **- непрерывная на** $[a,b]$ **функция, то существует такая точка** $c \in (a,b)$, **что**

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\cdot(b-a).$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Г. Лейбниц (1646-1716) – великий немецкий математик.

И. Ньютон (1642-1727) – великий английский математик

Примеры

$$1)\ \int_{1}^{2} e^{x}\,dx = e^{x}\Big|_{1}^{2} = e^{2} - e = e(e-1).$$

$$2)\ \int_{0}^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}} = \arcsin x\Big|_{0}^{0,5} =$$

$$= \arcsin 0,5 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6}.$$

Предполагается, что $f(x)$ - непрерывная функция.

Замена переменной в определенном интеграле

$$1)\ \int_3^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}}.$$

Замена:

$$x+1=t^2 \Rightarrow x=t^2-1,\ dx=2t\,dt.$$

Новые пределы интегрирования:

$$x=3 \Rightarrow t=2, \qquad x=8 \Rightarrow t=3.$$

$$\int_3^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}} = \int_2^3 \frac{(t^2-1)\cdot 2\cancel{t}\,dt}{\cancel{t}} = 2\int_2^3 \left(t^2-1\right)dt =$$

$$= 2\left(\frac{t^3}{3} - t\right)\Bigg|_2^3 = 2\left(\frac{3^3}{3} - 3\right) - 2\left(\frac{2^3}{3} - 2\right) =$$

$$= 2\cdot 6 - 2\cdot\left(\frac{8}{3} - 2\right) = 12 - \frac{4}{3} = 10\frac{2}{3}.$$

$$2)\ \int_0^4 \sqrt{4-x^2}\,dx.$$

$$x = 2\sin t,$$

$$dx = 2\cos t\,dt.$$

Если $x = 0,$ **то** $t = 0;$

Если $x = 4,$ **то** $\sin t = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}.$

$$\int_0^4 \sqrt{4-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t\,dt =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t\,dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1+\cos 2t)\,dt = 2\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 + \cos 2t)\, dt = 2\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t \right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} =$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Самостоятельная работа №1

$$1)\ \int_0^1 x^2\,dx \qquad 3)\ \int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$$

$$2)\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} \qquad 4)\ \int_1^2 \left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)dx$$

5) $\int_0^1 3^x \cdot 4^x \, dx$

7) $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$

6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx$

8) $\int_1^e \frac{\ln x + 1}{x} dx$

9) Найти производную функции

$$y = 2^{\sin 3x} + \mathrm{tg}^3 x.$$

Работы собирают старосты