Кинематика материальной точки и поступательного движения твердого тела

Механика- это раздел физики, в котором изучается простейшая форма движения материи – механическое, т. е. движение тел в пространстве.

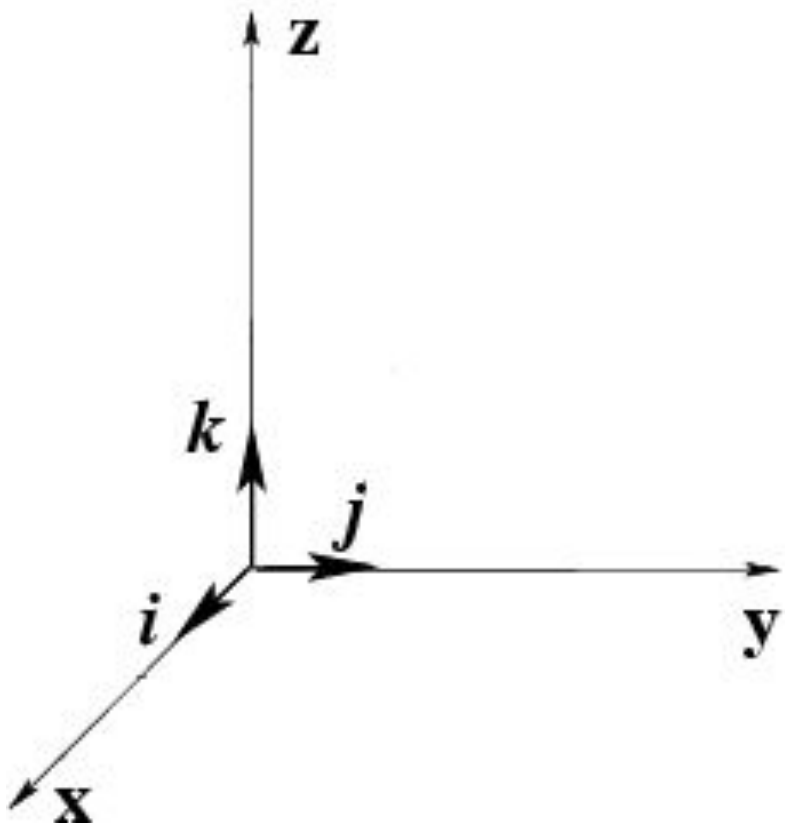
Основные понятия классической механики

- Положение тела в пространстве может быть определено только по отношению к каким-либо другим телам. Движение тела – это процесс изменения положения в **пространстве** с течением **времени**. **Чтобы изучать свойства пространства и времени необходимо наблюдать движение тел, которые в них находятся, исследовать характер движения тела.**
- **Пространство.** Считается, что движение тел происходит в пространстве, являющимся евклидовым, абсолютным (не зависит от наблюдателя), однородным (две любые точки пространства неотличимы) и изотропным (два любых направления в пространстве неотличимы).
- **Время**— фундаментальное понятие, постулируемое в классической механике. Считается, что время является абсолютным, однородным и изотропным (уравнения классической механики не зависят от направления течения времени).

Основные понятия классической механики

- Тело, которое служит для определения положения интересующего нас тела называют **телом отсчёта.** Для описания движения с телом отсчёта связывают систему координат, например, декартову. Координаты тела позволяют определить его положения в пространстве. Движение происходит не только в пространстве, но и во времени, поэтому для описания движения необходимо отсчитывать время.
- Совокупность тела отсчёта и связанных с ним системы координат и синхронизированных между собой часов образуют **систему отсчёта.**
- Материальная точка — это тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь. В одной задачи тело можно рассматривать как материальную точку, в других как протяжённый объект.

Декартова система координат— ортонормированный базис которой образован тремя единичными по модулю и взаимно ортогональными (перпендикулярными) векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ проведенными из начала координат.



Основные понятия классической механики

- **Ньютоновская механика-** основана на основанный на законах Ньютона и принципе относительности Галилея: скорости тел малы по сравнению со скоростью света, линейные масштабы и промежутки времени остаются неизменными при переходе от одной системы отсчёта к другой, т.е. не зависят от выбора системы отсчёта.

- **Релятивистская механика**: скорости сравнимы со скоростью света, линейные масштабы и промежутки времени зависят от выбора системы отсчёта. В частном случае малых скоростей переходит в классическую.

Задачи механики

- **Изучение различных движений и обобщение полученных результатов в виде законов движения-** законов, с помощью которых может быть предсказан характер движения в каждом конкретном случае.

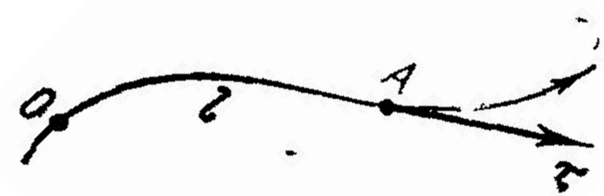
- **Отыскание общих свойств.** Присущих любой системе, независимо от конкретного рода взаимодействий между телами системы.

- **Кинематика**- это раздел механики, где изучаются различные способы описания движений независимо от причин, обуславливающих эти движения.

Три способа описания движения:

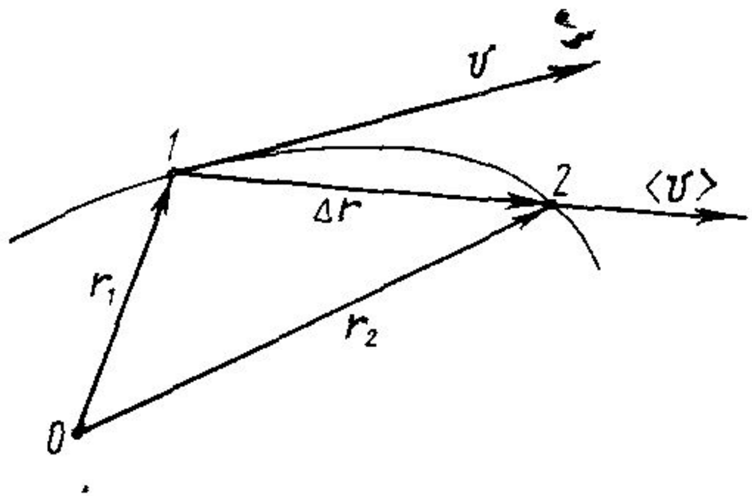
Координатный –
в выбранной системе координат задаются <u>координаты движущейся точки как функции от времени</u>.

Естественный - пользуются, если известна траектория движения точки. Положение точки А определяют <u>дуговой координатой *l*</u> – расстоянием вдоль траектории от выбранного начала отсчёта О.

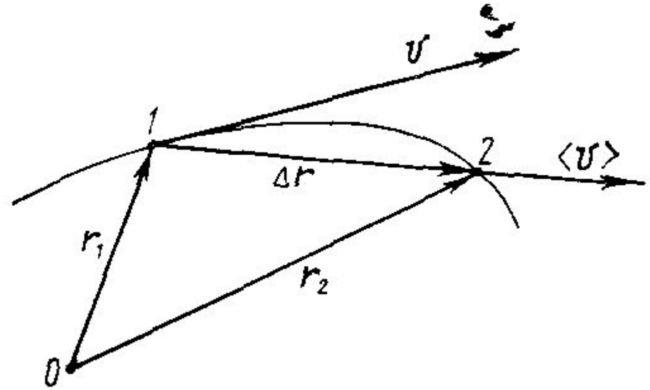


Векторный - положение точки определяется <u>радиус-вектором</u>, направленным в данную точку.

Векторный способ



- Положение точки задают радиус-вектором **r**.
- При движении точки радиус-вектор меняется по модулю и направлению, т.е. радиус-вектор зависит от времени **r**(t).
- Геометрическое место концов радиус-вектора образует **траекторию** точки.
- В зависимости от формы траектории движение материальной точки может быть **прямолинейным** или **криволинейным.**



- **Скорость** — это **векторная** величина, которая определяет быстроту и направление движения в данный момент времени [м/с].
- Скорость точки: пусть за время Δt точка A переместилась из положения 1 в положение 2.
- Вектор перемещения $\Delta\mathbf{r}$ точки A: $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ **–** приращение радиус-вектора за время Δt.
- **Средний вектор скорости** $\langle\mathbf{v}\rangle = \Delta\mathbf{r}/\Delta t$
- Вектор скорости в данный момент времени **v, мгновенная скорость**:

$$\mathbf{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta\mathbf{r}/\Delta t = d\mathbf{r}/dt$$

- Модуль вектора скорости: $\mathbf{V} = \sqrt{V^2}$

Векторный способ

- **Ускорение a** определяет скорость изменения вектора скорости (по модулю и направлению) точки со временем равен производной вектора скорости по времени [м/с^2]:
- $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$
- Пример: радиус-вектор точки зависит по закону: $\mathbf{r} = A*t^2 + 3*D$, где A и D постоянные вектора, тогда

  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt = 2*A*t$

  $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = 2*A$

Векторный способ

- Обратная задача, можно найти **v**(t) и **r**(t) зная зависимость **a**(t) ?
- Достаточно ли начальных условий: $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{r}_0$ в момент времени t=0?

Векторный способ

- Рассмотрим случай равноускоренного движения $\mathbf{a} = \mathbf{const}$.
- Найдём $\mathbf{v}(t)$. За промежуток времени dt элементарное приращение скорости $d\mathbf{v}$:
- $d\mathbf{v} = \mathbf{a} * dt$. Проинтегрируем по времени в пределах от 0 до t и найдём приращение вектора скорости за это время:

- $\Delta\mathbf{v} = \int_0^t \mathbf{a} * dt = \mathbf{a} * t$
- $\mathbf{v} = \mathbf{v_0} + \Delta\mathbf{v} = \mathbf{v_0} + \mathbf{a} * t$

Векторный способ

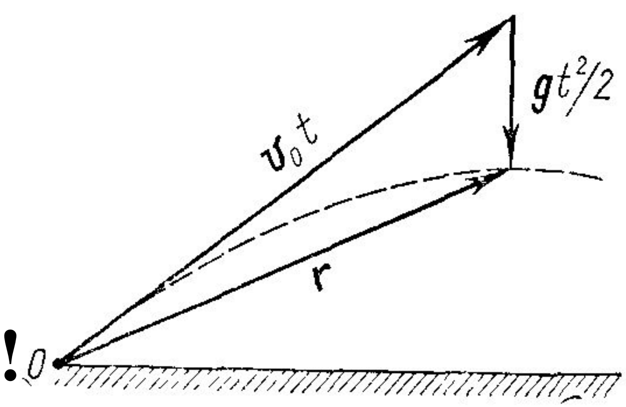
- Найдём радиус-вектор: за промежуток времени dt элементарное приращение радиус-вектора d**r:**
- d**r = v** * dt**.**
- Интегрируем это выражение с учётом зависимости **v**(t) и найдём приращение радиус-вектора за время от 0 до t:
- $\Delta\mathbf{r} = \int_{\mathbf{0}}^{t} \mathbf{v(t)}\,dt = \mathbf{v_0}\,\mathbf{t} + \mathbf{a}\,t^2/2$

Векторный способ

- Тогда сам радиус вектор **r**:
- $\mathbf{r} = \mathbf{r_0} + \Delta\mathbf{r} = \mathbf{r_0} + \mathbf{v_0}\, t + \mathbf{a}\, t^2/2$
- Пример: рассмотрим камень, брошенный под некоторым углом к горизонту с начальной скоростью $\mathbf{v_0}$. Камень движется с постоянным ускорением **a=g,** его положение относительно точки бросания ($\mathbf{r_0}=\mathbf{0}$) определяется радиус-вектором:
- $\mathbf{r} = \mathbf{v_0}\, t + \mathbf{g}\, t^2/2$,

  r –сумма двух векторов:

Начальные условия нужны!



Координатный способ

- С выбранным телом отсчёта жестко связывают определённую систему координат, например, декартову. Запишем в момент времени t положение точки A относительно начала координат O через проекции радиус – вектора **r** (t) – x, y, z:
- x = x(t) y = y(t) z = z(t) – **кинематические уравнения движения точки**
- Зная зависимость этих координат от времени – закон движения точки, можно найти положение точки в каждый момент времени, её скорость и ускорение.

Координатный способ

- Проекции векторов скорости и ускорения:

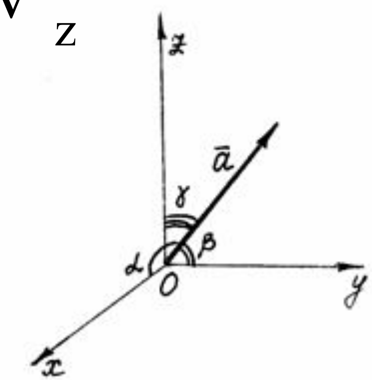
  $\mathbf{v}_{\mathbf{x}} = d\mathbf{x}/dt \quad \mathbf{v}_{\mathbf{y}} = d\mathbf{y}/dt \quad \mathbf{v}_{\mathbf{z}} = d\mathbf{z}/dt$

  $\mathbf{a}_{\mathbf{x}} = d\mathbf{v}_{\mathbf{x}}/dt = d^2\mathbf{x}/dt^2 \quad \mathbf{a}_{\mathbf{y}} = d\mathbf{v}_{\mathbf{x}}/dt = d^2\mathbf{y}/dt^2$

  $\mathbf{a}_{\mathbf{z}} = d\mathbf{v}_{\mathbf{z}}/dt = d^2\mathbf{y}/dt^2$
- Модуль вектора скорости $v = \sqrt{v^2{}_x + v^2{}_y + v^2{}_z}$
- Направление вектора **v** определяется **направляющими косинусами**:

  $\cos\alpha = v_x/v \quad \cos\beta = v_y/v \quad \cos\gamma = v_z/v$,

  где α, β, γ – углы между вектором **v** и осями x, y, z, соответственно.



- Таким образом x(t), y(t), z(t) полностью определяют движение точки.

Тангенциальное и нормальное ускорения

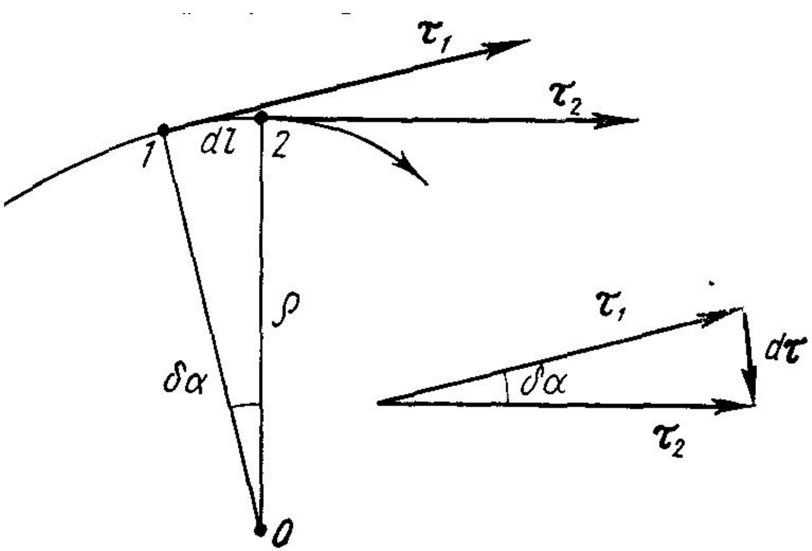
- При прямолинейном движении векторы скорости и ускорения совпадают с направлением траектории. Рассмотрим движение материальной точки по криволинейной плоской траектории. Вектор скорости в любой точке траектории направлен по касательной к ней.

- Введём единичный вектор $\boldsymbol{\tau}$**,** связанный с движущейся точкой А и направленный по касательной к траектории в сторону возрастания дуговой координаты *l***.**

- Вектор скорости **v** движения точки направлен по касательной к траектории, тогда можем записать:
- $\mathbf{v} = v_{\tau} * \boldsymbol{\tau}$**, где** $v_{\tau} = dl/dt$ – проекция вектора **v** на направление вектора $\boldsymbol{\tau}$**.**
- **Тангенциальное ускорение:**
- $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = d\,(v_{\tau} * \boldsymbol{\tau})/dt = (dv_{\tau}/dt\,)\boldsymbol{\tau} + (d\boldsymbol{\tau}/dt)\, v_{\tau}$
- **Тангенциальное (касательное) ускорение** – это составляющая вектора ускорения, направленная вдоль касательной к траектории в данной точке траектории движения.

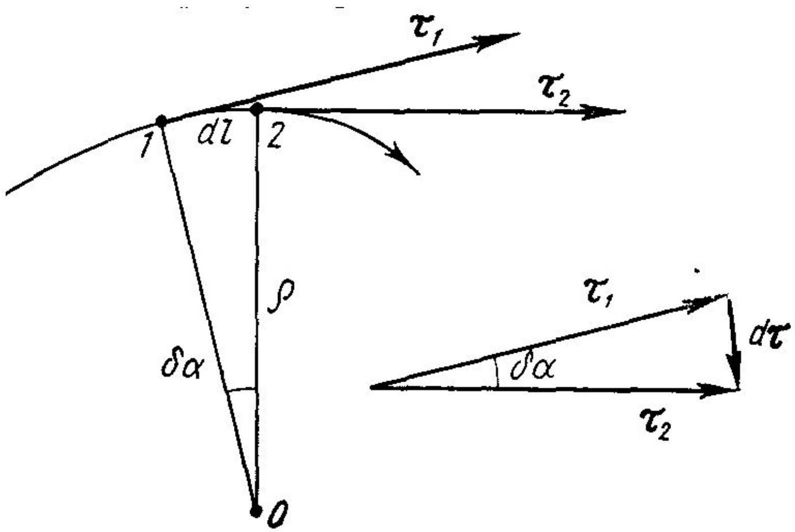
Тангенциальное и нормальное ускорения

- Преобразуем:
- $v_\tau(d\boldsymbol{\tau}/dt) = v_\tau(d\boldsymbol{\tau} * dl/dt * dl) = v_\tau^{\,2}\, d\boldsymbol{\tau}/dl = v^2 d\boldsymbol{\tau}/dl$ (1)

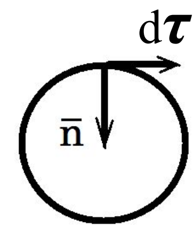


- Траектория 1-2 стремится к окружности с центром в некоторой точке О, называемую **центром кривизны траектории** в данной точке, а радиус ρ – **радиусом кривизны траектории** в точке 2.

Тангенциальное и нормальное ускорения



- Угол $\delta\alpha = /\mathrm{d}l/ \,/\, \rho$
- Введём единичный вектор нормали **n** к траектории в точке 1, тогда



- $/\mathrm{d}l/ \,/\, \rho = /\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}/ \,/\, \mathbf{n}$
- $/\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}/ \,//\mathrm{d}l/ = \mathbf{n} \,/\, \rho$ (2)
- Подставим (2) в (1) и получим:
- $\mathbf{a} = \boldsymbol{\tau}(\mathrm{d}v_{\tau} / \mathrm{d}t) /+ \mathbf{n}\,(v^2/ \rho)$
- Полное ускорение есть сумма тангенциального и нормального ускорений.

Тангенциальное и нормальное ускорения

- **Тангенциальное** ускорение $\boldsymbol{a_\tau}$ характеризует ***<u>быстроту изменения скорости по модулю</u>***, его величина:

  $\mathbf{a}_\tau = \boldsymbol{\tau}(\mathrm{d}v_\tau / \mathrm{d}\boldsymbol{\tau})$
- **Нормальное (центростремительное)** ускорение направлено по нормали к траектории к центру ее кривизны *O* и характеризует ***<u>быстроту</u>*** ***<u>изменения направления</u>*** <u>вектора</u> скорости точки.

  $\mathbf{a}_n = \mathbf{n}\,(v^2/\rho)$
- **Модуль полного ускорения**: $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$
- Абсолютная величина тангенциального ускорения зависит только от путевого ускорения, совпадая с его абсолютной величиной. Абсолютная величина нормального ускорения, зависит от путевой скорости.