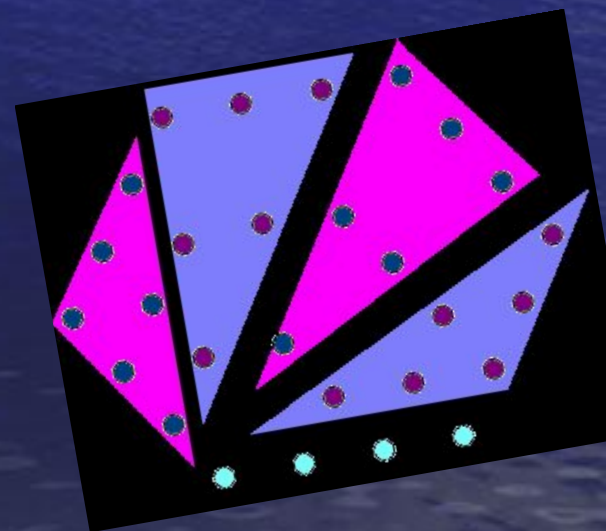
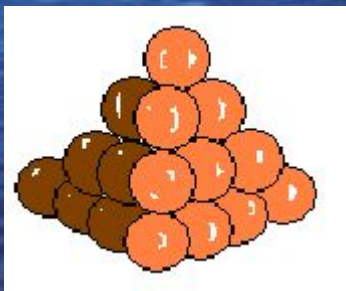


# Фигурные числа.

Элективный курс

для учащихся 5-7 классов

основной школы



# Объяснительная записка

## Цель курса:

Зарождение интереса к математике, расширение кругозора учащихся, развитие математического мышления, формирование активного познавательного интереса к предмету и тем самым создавать основы для выбора профиля.

## Задачи курса:

1. Повышение математической культуры учащихся.
2. Расширить понятие о числе.
3. Ознакомиться с истории возникновения фигурных чисел.
4. Показ на наглядно- индуктивной основе использования фигурных чисел.
5. Развитие мыслительных способностей учащихся: умения анализировать, абстрагировать, сопоставлять, сравнивать, систематизировать и обобщать.



# Элективные курсы в профильном обучении

Дипломная работа состоит из двух глав. В первой главе изложены общие требования к элективным курсам для профильных школ, а так же типы таких курсов.

Элективные курсы могут касаться любой тематики, как лежащей в пределах общеобразовательной программы, так и вне ее. Мы предлагаем элективные курсы математики. В первую очередь элективные курсы - это занятия по выбору, позволяющие школьникам развить интерес к тому или иному предмету.

В второй главе дается описание методической разработки элективного курса по теме "Фигурные числа". Курс разбит на 4 темы:

Тема № 1. История возникновения фигурных чисел и их виды

Тема № 2. Формулы для вычисления плоских чисел

Тема № 3. Формулы для вычисления телесных чисел

Тема № 4. Свойства фигурных чисел.

В каждой теме даны: новый материал, задачи для самостоятельного решения, образцы решения задач. Материалы излагаются в доступной и занимательной форме с привлечением исторических фактов. Так же школьникам предлагается провести творческую работу, в виде домашнего задания.

# Почасовой план элективного курса по теме

## "Фигурные числа"

Исходя из объема, трудности материала; а также из психологических и возрастных особенностей учащихся предлагаем почасовое планирование:

Название темы	Кол-во часов
§1 История возникновения фигурных чисел и их виды.	2
§2 Формулы для вычисления плоских чисел.	2
§3 Формулы для вычисления телесных чисел.	2
§4 Свойства фигурных чисел.	2

Надо отметить, что предложенное почасовое планирование может немного измениться, все зависит от подготовленности учеников. Этот элективный спецкурс рассчитан на одну четверть. В идеальности каждый урок должен проходить в течение одной недели.



# История возникновения фигурных чисел

## И ИХ ВИДЫ

Числа древними греками, а вместе с ними Пифагором и пифагорейцами мыслились зримо, в виде камешков, разложенных на песке или на счетной доске - абаке. По этой причине греки не знали нуля, т.к. его невозможно было "увидеть". Но и единица еще не была полноправным числом, а представлялась как некий "числовой атом", т. е. самое маленькое число, из которого образовывались все числа. Числа - камешки раскладывались в виде правильных геометрических фигур.

### Примечание:

Дадим понятие правильной фигуры. Фигура будет называться правильной, если на каждой его стороне лежит одинаковое число шаров и расстояние между ними должно быть одинаковым.

Надо отметить, что фигурные числа пифагорейцами классифицировались на:

- 1) линейные числа
- 2) плоские числа
- 3) телесные числа.

1) К линейным числам относятся простые числа, которые нельзя было разложить на множители. Эти числа изображались в виде точек, расположенных на одной прямой. Например, число 7



2) Все плоские числа изображаются в виде правильных геометрических фигур. Одинаковые шары можно укладывать на плоскости так, чтобы они образовывали различные фигуры - треугольники, квадраты, пятиугольники и т. д.



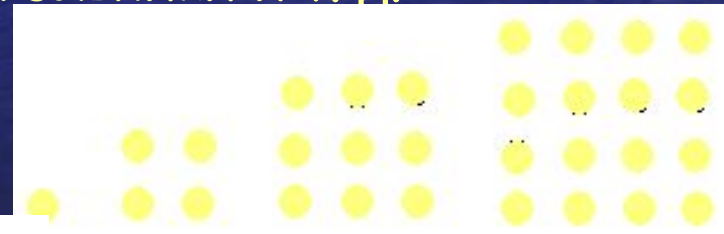
1 3



6 10



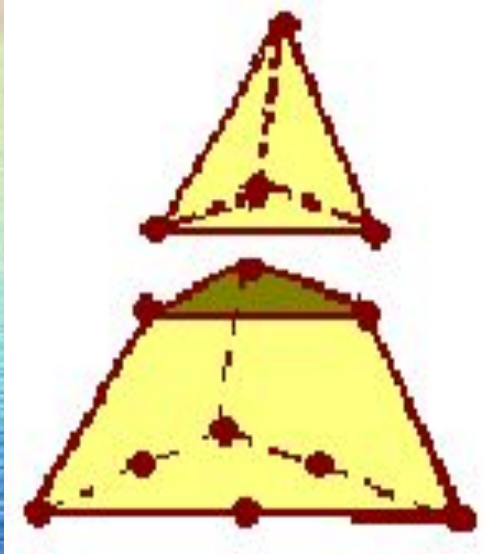
1 5 12 22



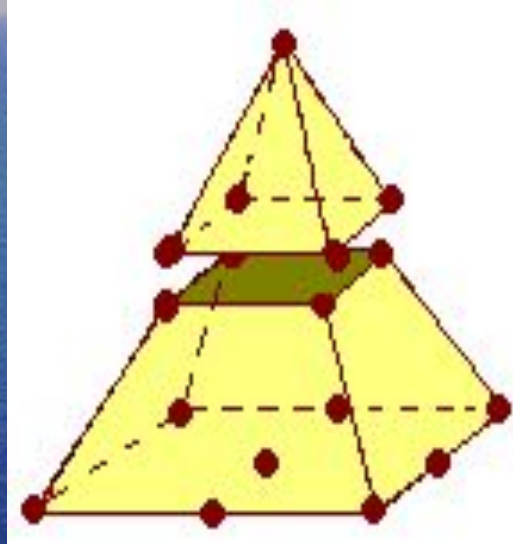
4 9 16



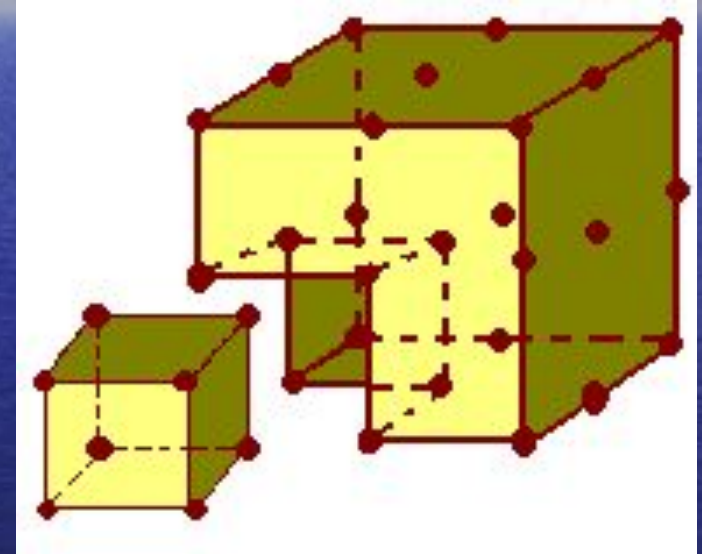
3) Составляя последовательные суммы из плоских фигурных чисел, получим телесные фигурные числа, их иногда называют пространственными.



тетраэдрические числа



четырёхугольные пирамидальные числа



кубические числа

# № 1.

Изобразите простое число 5 как:

- а) Линейное
- б) Плоское
- в) Пространственное.

Решение:

а) Так как число 5 - простое, то является линейным, тогда число 5 изображается в виде точек расположенных на одной прямой.



б) Так же число 5 можно показать в виде правильного пятиугольника 2 - го порядка



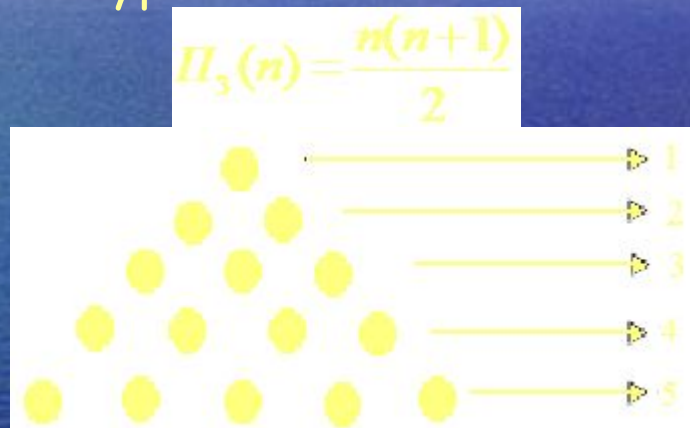
в) Представим число 5 в виде телесного числа





# Формулы для вычисления плоских чисел

Треугольные числа получаются при сложении последовательных натуральных чисел начинающихся с 1:



Далее рассмотрим квадратные числа. Первый из них - это один ряд из одного камушка: 1. Второй - это два ряда, каждый из двух камушков: . Третий - три ряда по три камушка: . Четвертый - четыре ряда по четыре камня . Неспроста про числа говорят «два в квадрате», «три в квадрате», «четыре в квадрате». Следуя по аналогии можно сделать вывод, что квадратное число  $n$ -го порядка вычисляется по формуле:

$$P_4(n) = n \cdot n = n^2$$

Попробуем пойти дальше и найти формулу для нахождения пятиугольных чисел. Первым считаем, как и раньше, пятиугольник из 1-го камушка, во втором пятиугольнике 2 камня снизу и еще три раза по одному; в третьем- 3 камня снизу и еще 3 треугольника - 3 вторых по счету треугольных чисел. А в четвертом? 4 камня снизу и 3 третьих по счету треугольных чисел. По этому правилу, не рисуя картинку, можно найти и пятое пятиугольное число: 5 камней будут снизу, и еще 3 четвертых по счету треугольных числа, т. е.  $5+3 \cdot 10=35$ .

Следовательно, общая формула имеет вид:

$$\Pi_5(n) = n + 3 \cdot T_3(n-1) = \frac{3n^2 - n}{2}$$



Замечание: Разбиением на треугольные числа получается общая формула для нахождения  $k$ -угольного числа с номером  $n$ . Как видно: первое  $k$ -угольное число равно 1, второе  $k$ -угольное число равно  $k$ ,  $n$ -ое  $k$ -угольное число равно:

$$\Pi_k(n) = n + (k-2) \cdot T_2(n-1) = \frac{(k-2)n^2 - (k-4)n}{2}$$



## № 1. (историческая задача).

Один купец купил дом. На вопрос дорого ли он за него заплатил, он ответил, что число рублей, которое он за него отдал, есть 365-угольное число с номером 12.

Решение:

Воспользуемся формулой:

$$P_n(n) = \frac{(n-2)n^2 - (n-4)n}{2}$$

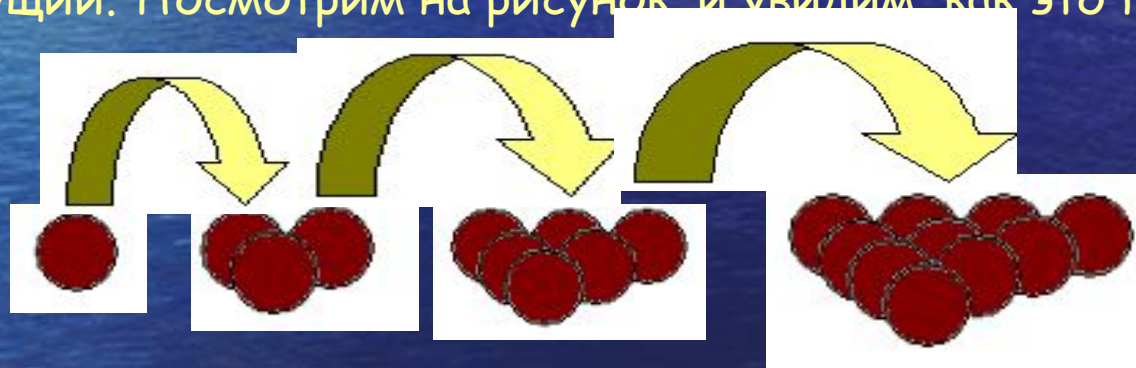
Подставляя вместо  $n$  число 365, а вместо  $n$  число 12, получаем

$$P_{365}(12) = \frac{(365-2) \cdot 12^2 - (365-4) \cdot 12}{2} = 23970$$

Следовательно, дом стоит 23970 рублей.

# Формулы для вычисления телесных чисел

Пирамидальные числа возникают при складывании камушков или, скажем, пушечных ядер горкой так, чтобы они не раскатывались. И что же? Каждый слой ядер в такой пирамиде – треугольное число! Наверху – одно ядро, под ним – три, под теми – шесть и т.д. (  $1$ ,  $1+3=4$ ,  $1+3+6=10$ ,  $1+3+6+10=20$ ...) Можем сделать вывод, что пирамидальное число  $n$ -го порядка получается при наложении на каждый слой треугольное число на один порядок меньше чем предыдущий. Посмотрим на рисунок и увидим, как это получается.



Мы с вами можем увидеть закономерность:

$$T_3(n) = \Pi_3(1) + \Pi_3(2) + \Pi_3(3) + \dots + \Pi_3(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

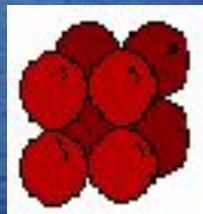
где  $n$  – число шаров уложенных вдоль ребра пирамиды.



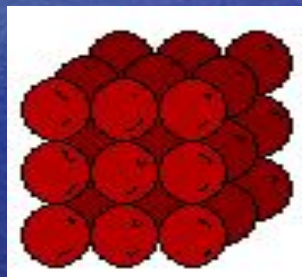
Очень интересны кубические числа, возникающие при складывании кубиков:  $1$ ,  $2*2*2=8$  (два этажа из квадратов  $2*2$ ),  $3*3*3=27$  (три этажа из квадратов  $3*3$ ) и так далее.



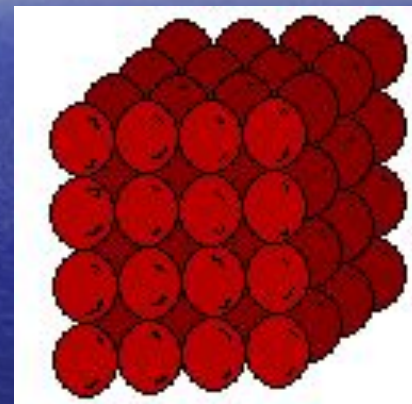
1



8



27



64

Теперь понятно, почему про такие числа говорят: "два в кубе", "три в кубе", "десять в кубе"? Следовательно, общий вид кубических чисел равен:

$$T_n(n) = n^3$$

# Свойства фигурных чисел

Великие творцы затратили немало усилий на изучение свойств фигурных чисел. Мы с вами рассмотрим некоторые, наиболее интересные из них.

## №1.

Докажите тождество, используя фигурные числа:

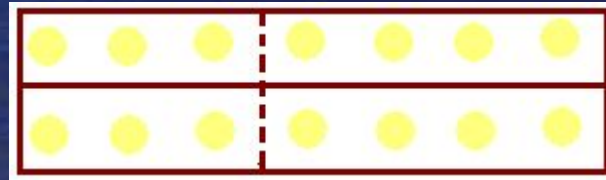
$$2(3+4) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4$$

### Доказательство

Изобразим первую часть  $2(3+4)$ . В начале, найдем сумму двух линейных чисел 3 и 4.

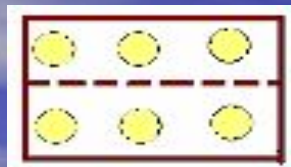


Затем находим произведение двух чисел 2 и 7

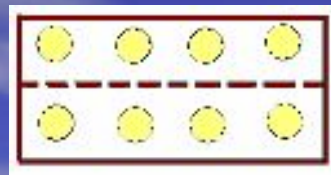


Рассмотрим вторую часть тождества. Нарисуем произведение двух чисел 2 и 3, 2 и 4.



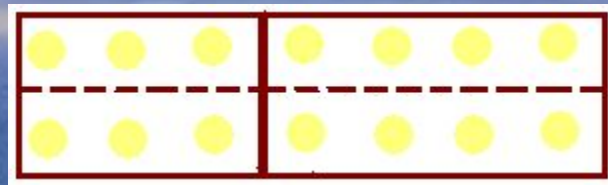


6

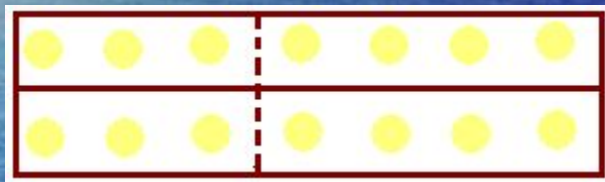


8

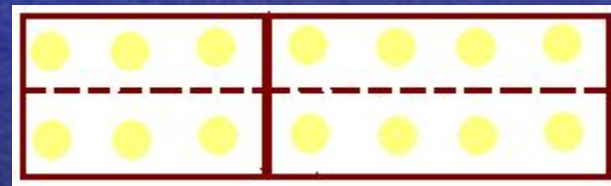
Сложим полученные числа.



Сравним результаты.



14



14

В этом примере можно "разглядеть" распределительный закон сложения относительно умножения:

$$a(b+c)=ab+ac$$

# Описание результатов внедрения элективного курса

## “Фигурные числа” в 7 классе МОУ “Аликовской СОШ

### имени И. Я. Яковлева”

Элективный курс был апробирован в 7 “А” классе МОУ “Аликовской СОШ имени И. Я. Яковлева”, в течение 6 уроков. В эксперименте участвовало 23 учеников. Задания, предложенные на курсах, решались на доске общими усилиями или в тетрадях самостоятельно. При решении некоторых задач ученикам приходилось помогать, когда задачи решались в тетрадях учитель подходил к учащимся, у которых возникали вопросы по ходу решения и помогал отыскать ошибки, разобраться в решении, а иногда дети сами помогали своим товарищам.

К творческим занятиям дети отнеслись серьезно. Когда школьникам была предложена первая домашняя работа, почти все подготовились (тема 1), предварительно им дана была литература. Каждый из учеников хотел похвастаться своими результатами. Ко второй домашней работе подготовились все (тема 3). Ученики сделали по одной фигуре предложенной им на занятии, но в основном дети сконструировали кубическое число 2-го порядка. К диплому прилагается справка, свидетельствующая о том, что этот элективный спецкурс был проведен.