

# Элементы алгебры логики



**Аристотель** (384-322 до н.э.).  
Основоположник формальной логики (понятие, суждение, умозаключение).



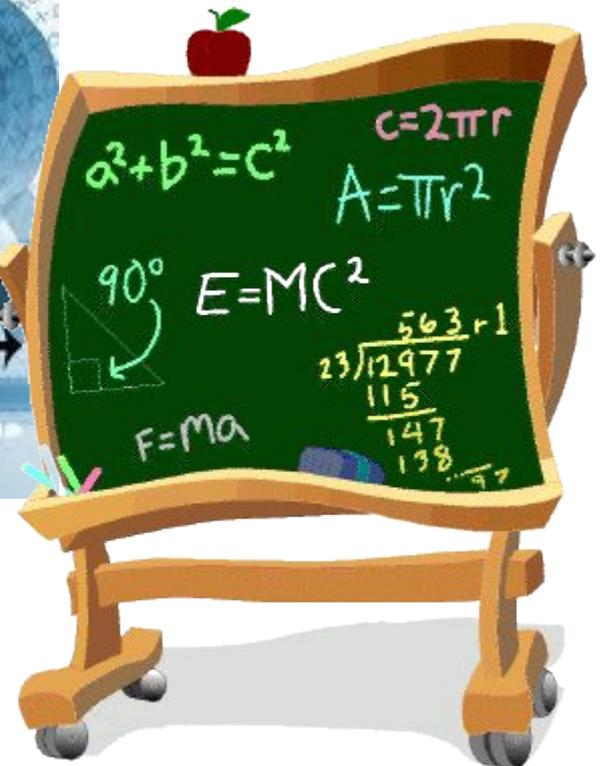
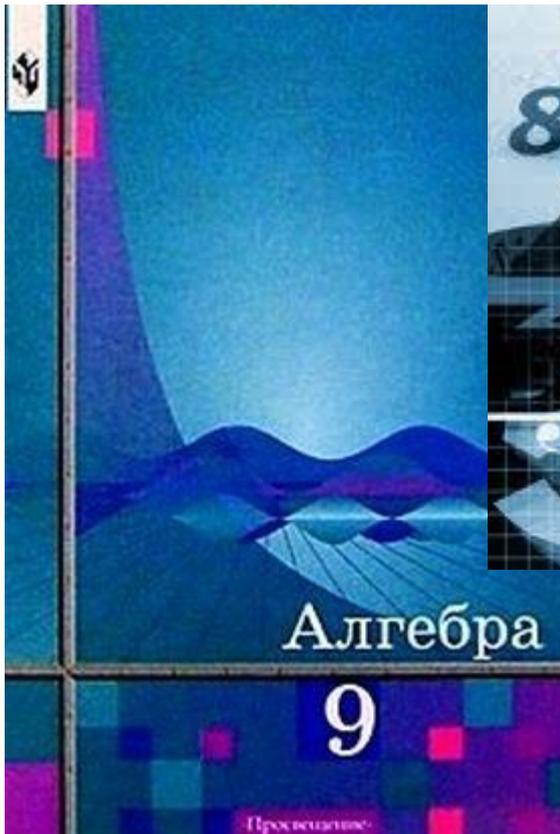
**Джордж Буль** (1815-1864). Создал новую область науки - Математическую логику (Булеву алгебру или Алгебру высказываний).



**Клод Шеннон** (1916-2001). Его исследования позволили применить алгебру логики в вычислительной технике

# Алгебра

**Алгебра** - наука об общих операциях, аналогичных сложению и умножению, которые могут выполняться над разнообразными математическими объектами – числами, многочленами, векторами и др.



# Высказывание

**Высказывание** - это предложение на любом языке, содержание которого можно однозначно определить как **истинное** или **ложное**.

В русском языке высказывания выражаются повествовательными предложениями:

*Земля вращается вокруг Солнца.  
Москва - столица.*

Но не всякое повествовательное предложение является высказыванием:

*Это высказывание ложное.*

Побудительные и вопросительные предложения высказываниями не являются.

*Без стука не входите!  
Откройте учебники.  
Ты выучил стихотворение?*

# Высказывание или нет?

- ✓ Зимой идет дождь.
- ✓ Снегири живут в Крыму.
- ✓ У треугольника 5 сторон.

Кто к нам пришел?

Как пройти в библиотеку?

Переведите число в десятичную систему.

Запишите домашнее задание

# Алгебра логики

**Алгебра логики** определяет правила записи, вычисления значений, упрощения и преобразования высказываний.

В алгебре логики высказывания обозначают буквами и называют **логическими переменными**.

Если высказывание **ИСТИННО**, то значение соответствующей ему логической переменной обозначают **единицей** ( $A = 1$ ), а если **ложно** - **нулём** ( $B = 0$ ).

**0** и **1** называются **логическими значениями**.

# Простые и сложные высказывания

Высказывания бывают простые и сложные:

*Весна наступила. Грачи прилетели.*

– простые высказывания

*Весна наступила и грачи прилетели.*

– сложное высказывание

(применяются связки - союзы и частицы: **И, ИЛИ, НЕ**)

# Простые и сложные высказывания

## Пример:

Элементарные (простые) высказывания:

*«Петров — врач»,*

*«Петров — шахматист»*

Составные высказывания:

1. *"Петров — врач и шахматист"*, понимаемое как *"Петров — врач, хорошо играющий в шахматы"*.

2. *"Петров — врач или шахматист"*, понимаемое в алгебре логики как *"Петров или врач, или шахматист, или и врач и шахматист одновременно"*.

# Простые и сложные высказывания

Высказывание называется *простым*, если никакая его часть сама не является высказыванием.

*Сложные* (составные) высказывания строятся из простых с помощью логических операций.

Название логической операции	Логическая связка
Конъюнкция	«и»; «а»; «но»; «хотя»
Дизъюнкция	«или»
Инверсия	«не»; «неверно, что»

# Логические операции

**Инверсия** - логическая операция, которая каждому высказыванию ставит в соответствие новое высказывание, значение которого противоположно исходному.

Другое название: **логическое отрицание**.

Обозначения: **НЕ,  $\neg$ ,  $\bar{\quad}$** .

Например, для высказывания

**A = «Путин президент России»**

отрицанием будет высказывание

**$\neg A$  = «Путин не президент России»**



# Задача

## Иван против Кащея бессмертного

Темница I – «Здесь Василиса Прекрасная».

Темница II – «Темница III не пустая».

Темница III – «Здесь Змей Горыныч».

**Все подписи на дверях темниц неверные.**

На какую дверь показать?



# Иван против Кощея бессмертного



Здесь нет  
Василисы  
Прекрасной

Здесь  
Василиса  
Прекрасная

Темница  
III пуста

Темница III  
не пуста

Здесь нет  
Змея  
Горыныча

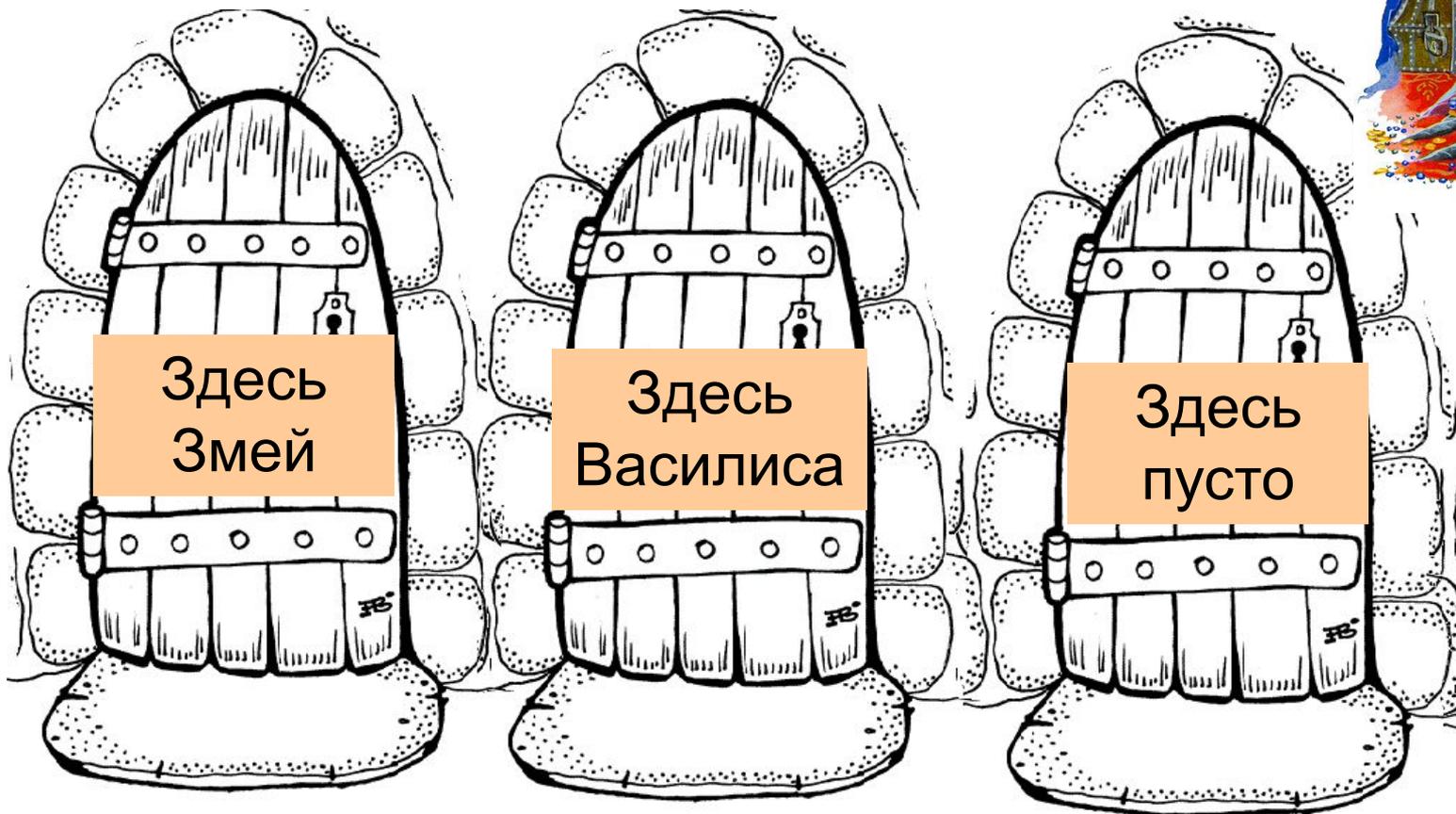
Здесь Змей  
Горыныч

На какую дверь показать?

Все подписи на дверях темниц неверные



# Иван против Кощея бессмертного



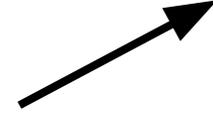
На какую дверь показать?

Все подписи на дверях темниц неверные

# Логические операции



Ядовитые грибы – И (1)  
Неядовитые грибы - Л (0)

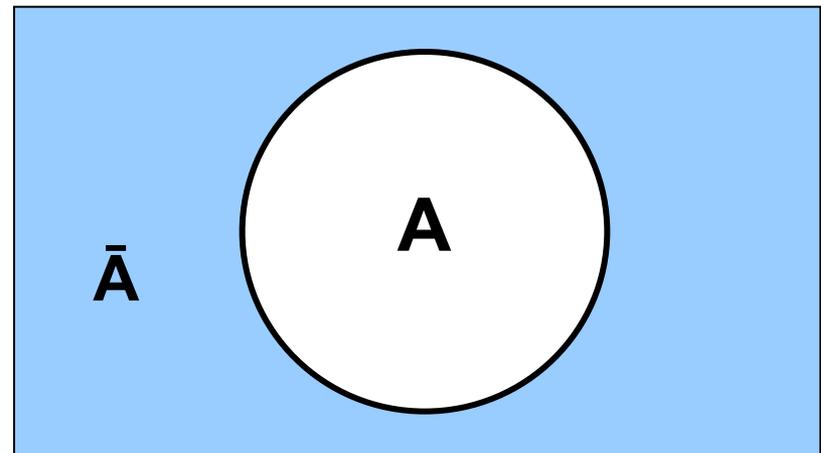


Ядовитые грибы - Л (0)  
Неядовитые грибы – И (1)

Таблица истинности:

A	$\bar{A}$
0	1
1	0

Графическое представление



Логические операции имеют следующий приоритет:  
**инверсия, конъюнкция, дизъюнкция.**

# Логические операции

**Дизъюнкция** - логическая операция, которая каждому двум высказываниям ставит в соответствие новое высказывание, являющееся ложным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания ложны.

Другое название: **логическое сложение**.

**И, +.**



$A \equiv \{\text{Луна - спутник Земли}\}$

**ИЛИ**

$B \equiv \{\text{Солнце - спутник Земли}\}$

$A \cup B \equiv \{\text{Луна - спутник Земли или Солнце - спутник Земли}\}$

# Логические операции

$A \equiv \{\text{Луна - спутник Земли}\}$  **И** (1)

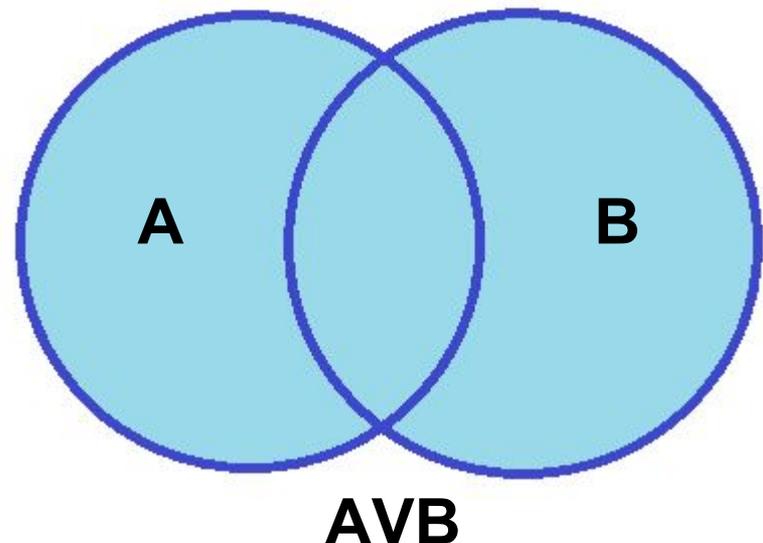
$B \equiv \{\text{Солнце - спутник Земли}\}$  **Л** (0) **(U) ИЛИ**

$A \cup B \equiv \{\text{Луна - спутник Земли или Солнце - спутник Земли}\}$

Таблица истинности:

A	B	$A \cup B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Графическое представление



*Пример:*

а) Пусть  $A = \{4, 5, 6\}$ ,  $B = \{2, 4, 6\}$ .

Тогда  $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$ .

б) Пусть  $A$  – множество чисел, которые делятся на 2, а  $B$  – множество чисел, которые делятся на 3:

$A = \{2, 4, 6, \dots\}$ ,  $B = \{3, 6, 9, \dots\}$ .

Тогда  $A \cup B$  множество чисел, которые делятся на 2 или на 3:

$A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, \dots\}$ .

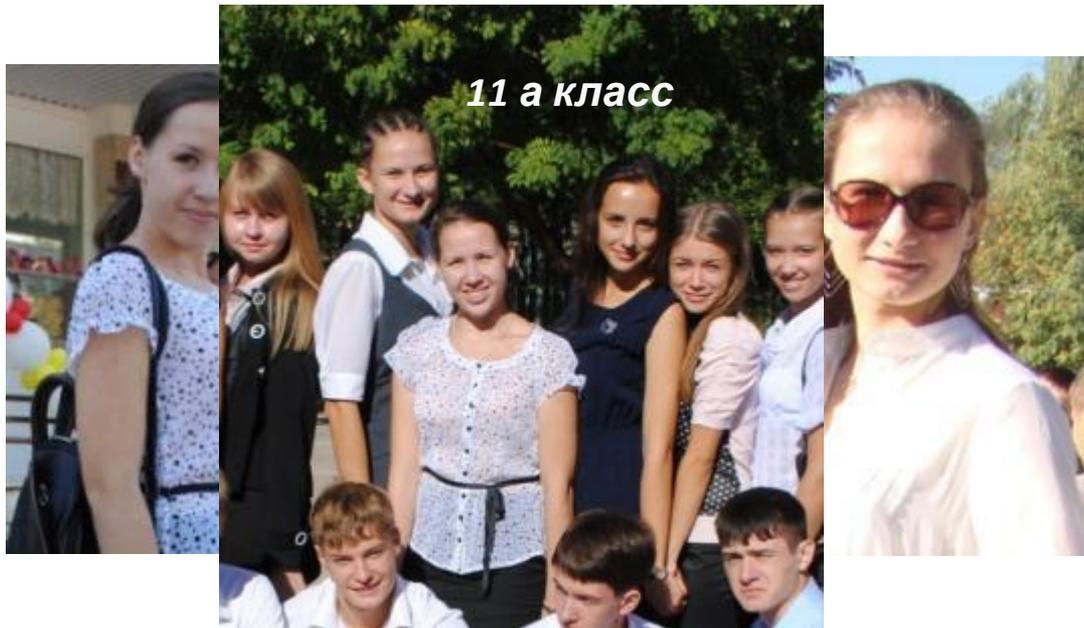
# Логические операции

**Конъюнкция** - логическая операция, ставящая в соответствие каждому двум высказываниям новое высказывание, являющееся истинным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания истинны.

Другое название: **логическое умножение**.

Обозначения:  $\wedge$ ,  $\times$ ,  $\&$ , И.

$A \equiv \{\text{Наталья}$   
учится в  
11 а классе}



$B \equiv \{\text{Людмила}$   
учится в  
11 а классе}

$A \wedge B \equiv \{\text{Наталья и Людмила учатся вместе в 11 а классе}\}$

# Логические операции

$A \equiv \{\text{Наталья учится в 11 а классе}\}$

$\cap$  (И)

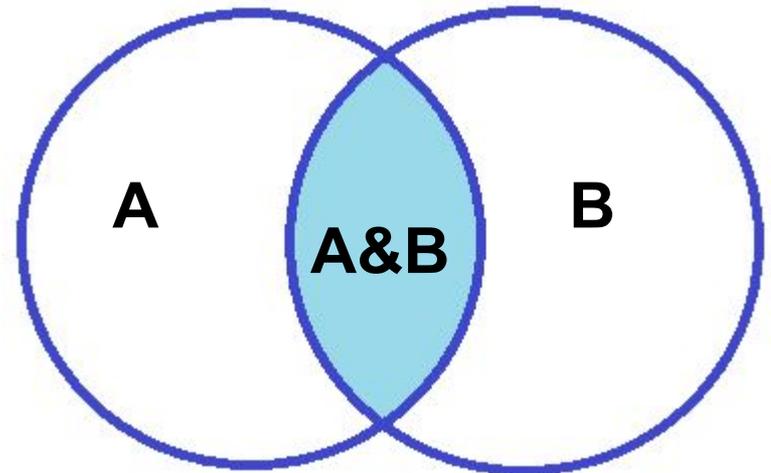
$B \equiv \{\text{Людмила учится в 11 а классе}\}$

$A \cap B \equiv \{\text{Наталья и Людмила учатся вместе в 11 а классе}\}$

Таблица истинности:

A	B	A&B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Графическое представление



# Логические операции

Пример:

$A = \langle 10 \text{ делится на } 2 \rangle \quad A = 1 \text{ (И)}$

$B = \langle 5 \text{ больше } 3 \rangle \quad B = 1 \text{ (И)}$

$C = \langle 4 - \text{нечётное число} \rangle \quad C = 0 \text{ (Л)}$

$A \cap B = \langle 10 \text{ делится на } 2 \text{ и } 5 \text{ больше } 3 \rangle \quad A \cap B = 1$

$A \cap C = \langle 10 \text{ делится на } 2 \text{ и } 4 - \text{нечётное число} \rangle \quad A \cap C = 0$

# Логические операции

Пример:

$A =$  "Тимур поедет летом на море",

$B =$  "Тимур летом отправится в горы".

$A \cap B =$  "Тимур летом побывает **и** на море, **и** в горах»

$A \cup B =$  "Тимур летом побывает на море **или** в горах»

# Логические операции

Пример:

$A = \text{«}10 \text{ делится на } 2\text{»}$        $A = 1$

$B = \text{«}5 \text{ больше } 3\text{»},$        $B = 1$

$C = \text{«} 4 - \text{нечётное число}\text{»}$        $C = 0$

$K = \text{«} 3 - \text{чётное число}\text{»}$        $K = 0$

$A + B = \text{«}10 \text{ делится на } 2 \text{ или } 5 \text{ больше } 3\text{»}$        $A + B = 1$

$A + C = \text{«}10 \text{ делится на } 2 \text{ или } 4 - \text{чётное число}\text{»}$        $A + C = 1$

$C + K = \text{«} 4 - \text{нечётное число или } 3 - \text{чётное число}\text{»}$

$C + K = 0$

*Пример:*

а) Пусть  $A = \{4, 5, 6\}$ ,  $B = \{2, 4, 6\}$ .

Тогда  $A \cap B = \{4, 5\}$ .

б) Пусть  $A$  – множество чисел, которые делятся на 2, а  $B$  – множество чисел, которые делятся на 3:

$A = \{2, 4, 6, \dots\}$ ,  $B = \{3, 6, 9, \dots\}$ .

Тогда  $A \cap B$  множество чисел, которые делятся на 2 или на 3:

$A \cup B = \{6, 12, 18, \dots\}$ .

# Логические операции

**Импликацией** высказываний А и В называется такое высказывание  $A \rightarrow B$ , ложное лишь в том случае, когда высказывание А – истинное и В – ложное.

А	В	$A \rightarrow B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И



$A \equiv \{\text{Лето жаркое}\}$

$B \equiv \{\text{Зима будет холодной}\}$

$A \rightarrow B \equiv \{\text{Если лето жаркое, то зима будет холодной.}\}$



# Логические операции

**Эквивалентцей** высказываний  $A$  и  $B$  называется такое высказывание  $A \sim B$ , истинное когда  $A$  и  $B$  – оба истинные или оба ложные высказывания.

$A \equiv \{\text{Убийство раскрыто}\}$

$B \equiv \{\text{Есть свидетели}\}$

$A$	$B$	$A \sim B$
и	и	и
и	л	л
л	и	л
л	л	и

Для того чтобы раскрыть убийство необходимо и достаточно найти свидетелей.

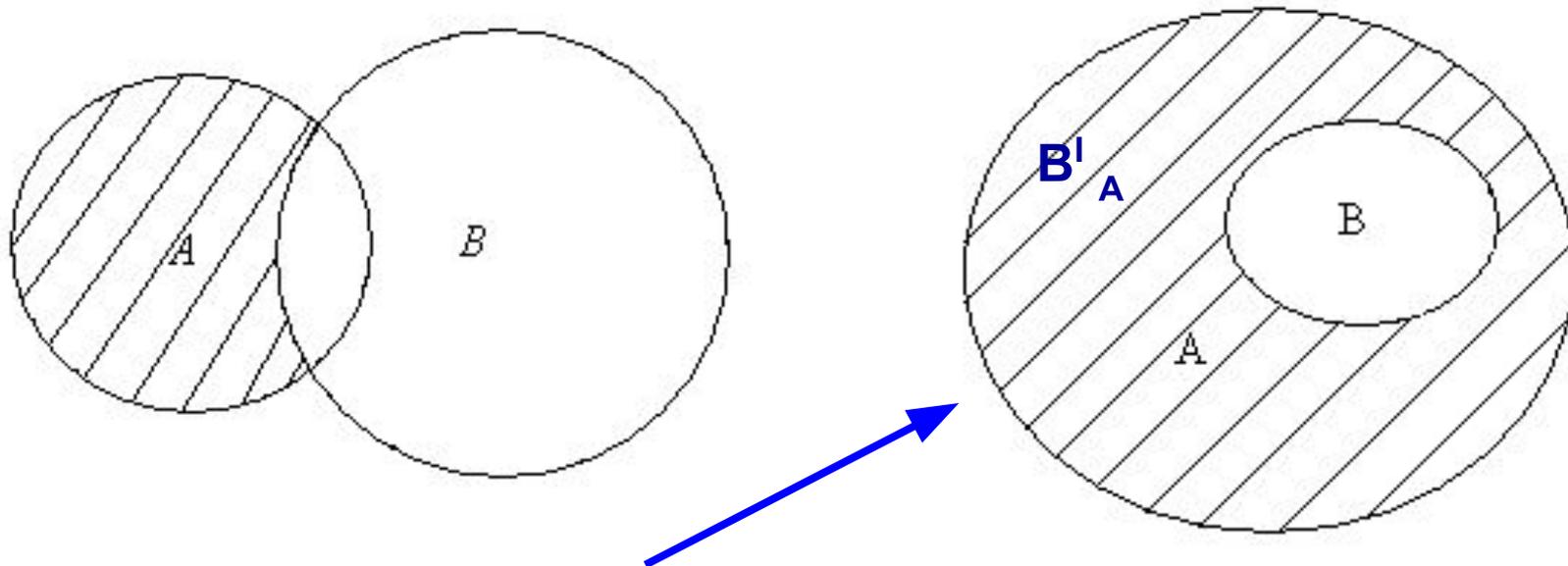


# Логические операции

## Порядок выполнения логических операций

1. Сначала выполняется операция отрицания (“не”),
2. Затем конъюнкция (“и”),
3. После конъюнкции — дизъюнкция (“или”),
4. В последнюю очередь — импликация и эквиваленция.

Разностью множеств  $A$  и  $B$  называется множество, содержащее те и только те элементы, которые принадлежат множеству  $A$  и не принадлежат множеству  $B$ . Разность  $A$  и  $B$  обозначают  $A \setminus B$ .



Пусть  $B \subseteq A$ . Дополнением множества  $B$  до множества  $A$  называется множество, содержащее те и только те элементы множества  $A$ , которые не принадлежат множеству  $B$ . Дополнение множества  $B$  до множества  $A$  обозначают  $B'_A$ .

## Пример

Пусть  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  и  $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 17, 19\}$ .

Найти  $A \cup B$  и  $A \cap B$

**Решение**

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 13, 17, 19\},$$

$$A \cap B = \{1, 3, 5, 7, 9\}.$$

## Пример

Пусть  $A = [-2; 1]$  и  $B = (0; 3)$ . Найти  $A \cup B$  и  $A \cap B$ .

Решение

$$A \cup B = [-2; 3), \quad A \cap B = (0; 1].$$

## Пример

Пусть  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  и

$B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 17, 19\}$ . Найти  $A \setminus B$  и  $B \setminus A$ .

### Решение

$$A \setminus B = \{2, 4, 6, 8\}.$$

$$B \setminus A = \{11, 13, 17, 19\}.$$

**Логическое выражение** - это высказывание о котором можно сказать **ИСТИННО** оно или **ЛОЖНО**



Какие высказывания являются логическими выражениями? Укажите их истинность или ложность.

- 1) Луна – спутник Земли. **И**
- 2) Информатика –это наука об информации и информационных процессах. **И**
- 3) Монитор – это устройство ввода информации. **Л**
- 4) Процессор – это устройство хранения информации. **Л**
- 5) Кто отсутствует?
- 6) Посмотрите на доску.
- 7) Уберите посуду со стола.

Ответ

Порядок выполнения логических операций:  
1. Отрицание 2. Умножение 3. Сложение

?

Определите значения выражений, если  
A = истина, B = ложь, C = истина.

- |                             |   |
|-----------------------------|---|
| 1) A и B                    | Л |
| 2) A или B                  | И |
| 3) Не A или B               | Л |
| 4) A и B или C              | И |
| 5) не A или B и C           | Л |
| 6) не (A или B) и (C или B) | Л |

Определить истинность значений A, B, C, D, если:

1) A **и** “Марс - планета” = 1      A = **И**

2) B **и** “Марс – планета” = 0      B = **Л**

C = **И**

3) C **или** “Солнце – спутник Земли” = 1

4) D **и** “Солнце – спутник Земли” = 0

D = **И, Л**

1. Найти все подмножества множества  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ .
2. Найти все подмножества множества  $P = \{a, d\}$ .
3. Найти все подмножества множества  $F = \{a, b, c, d, e, f\}$ .
4. Составьте не менее семи слов, буквы которых образуют подмножества множества  $A = \{к, а, р, у, с, е, л, ь\}$ .
5. Пусть  $A$  - это множество натуральных чисел, делящихся на 2, а  $B$  - множество натуральных чисел, делящихся на 4. Какой вывод можно сделать относительно данных множеств?

1). Пусть  $A$  – множество делителей числа 60.

а) Верна ли запись  $7 \in A$ ?

нет

б) Верна ли запись  $10 \in A$ ?

да

в) Верна ли запись  $20 \notin A$ ?

нет

г) Составьте список элементов множества  $A$ .

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 30, 15, 20, 30, 60\}$

2). Составьте список элементов множества, заданного характеристическим свойством:

а)  $A = \{x: x \in \mathbb{N}, -11 < x < -3\}$ ;

$A = \emptyset$

б)  $A = \{x: (x - 5)(x - 3) = 0\}$ .

$A = \{3; 5\}$

3). В следующих множествах все элементы, кроме одного, обладают некоторым свойством.

Найдите элементы, не обладающие этим свойством:

а)  $\{2, 6, 15, 84, 156\}$ ;

15

б)  $\{2, 7, 13, 16, 29\}$ ;

16

в)  $\{1, 9, 25, 67, 121\}$ ;

67

г) {треугольник, квадрат, трапеция, круг, правильный шестиугольник}.

круг