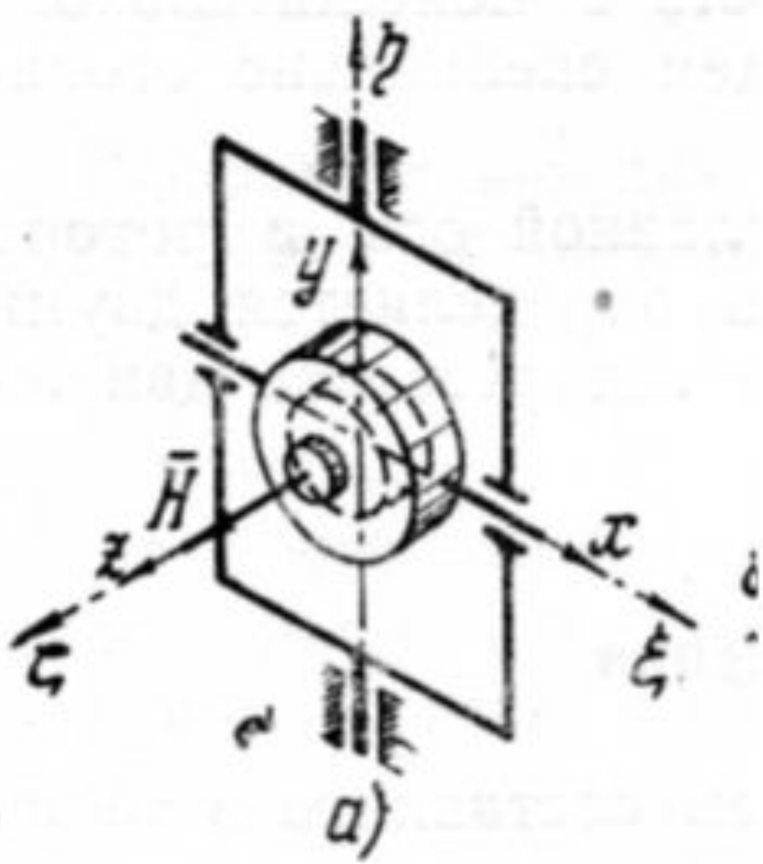
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Э.БАУМАНА

ВЫСОКОТОЧНЫЕ СИСТЕМЫ НАВИГАЦИИ

Лекция №2.1

Вывод уравнений движения трехстепенного гироскопа

Уравнения движения трехстепенного гироскопа.



Oxyz – система координат, связанная с кожухом гироскопа. (Система Резаля)

Ox: по оси внутренней рамки.
Oz: по оси вращения ротора гиромотора.
Oy: правая тройка.

x,y,z – оси Резаля

$O\zeta\eta\xi$ – система координат, связанная с основанием, на котором расположен гироскоп

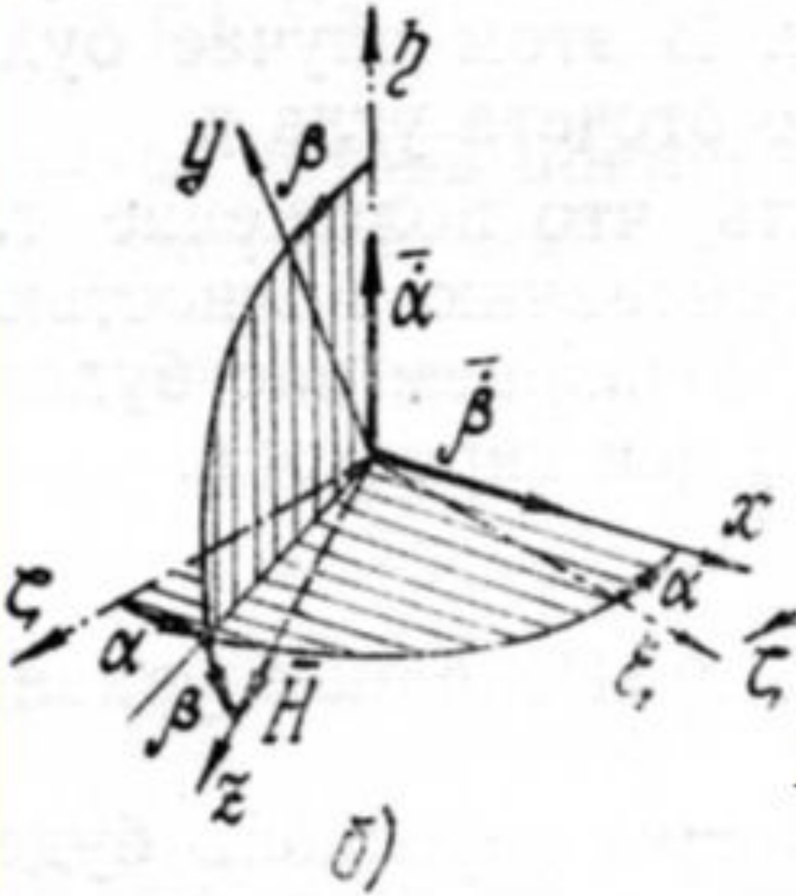
$O\eta$ – по оси наружной рамки.

$O\zeta$ – совпадает с Ox в не отклоненном положении

$O\xi$ – с осью OZ в не отклоненном положении

Положение гироскопа по отношению к основанию будем определять углами

$\alpha\beta\gamma$



Воспользуемся методом кинетостатики:

$$\frac{dK}{dt} = J_i \frac{d\omega_i}{dt} = \sum M_i$$

i — номер оси, относительно которой происходит движение твердого тела.

J_i – – момент инерции твердого тела относительно i – й оси.

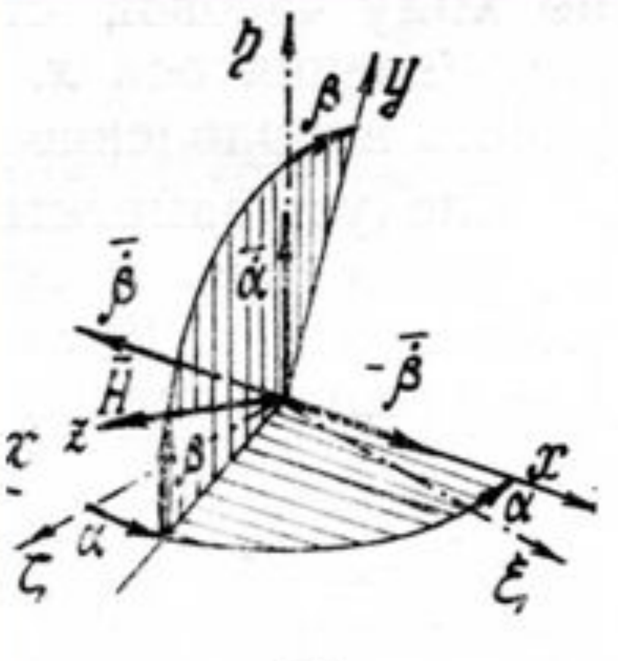
ω_i – проекция абсолютной угловой скорости твердого тела на i – ю ось.

M_i^{in} – инерционные моменты (гироскопический момент и момент, обусловленный углов ускорением).

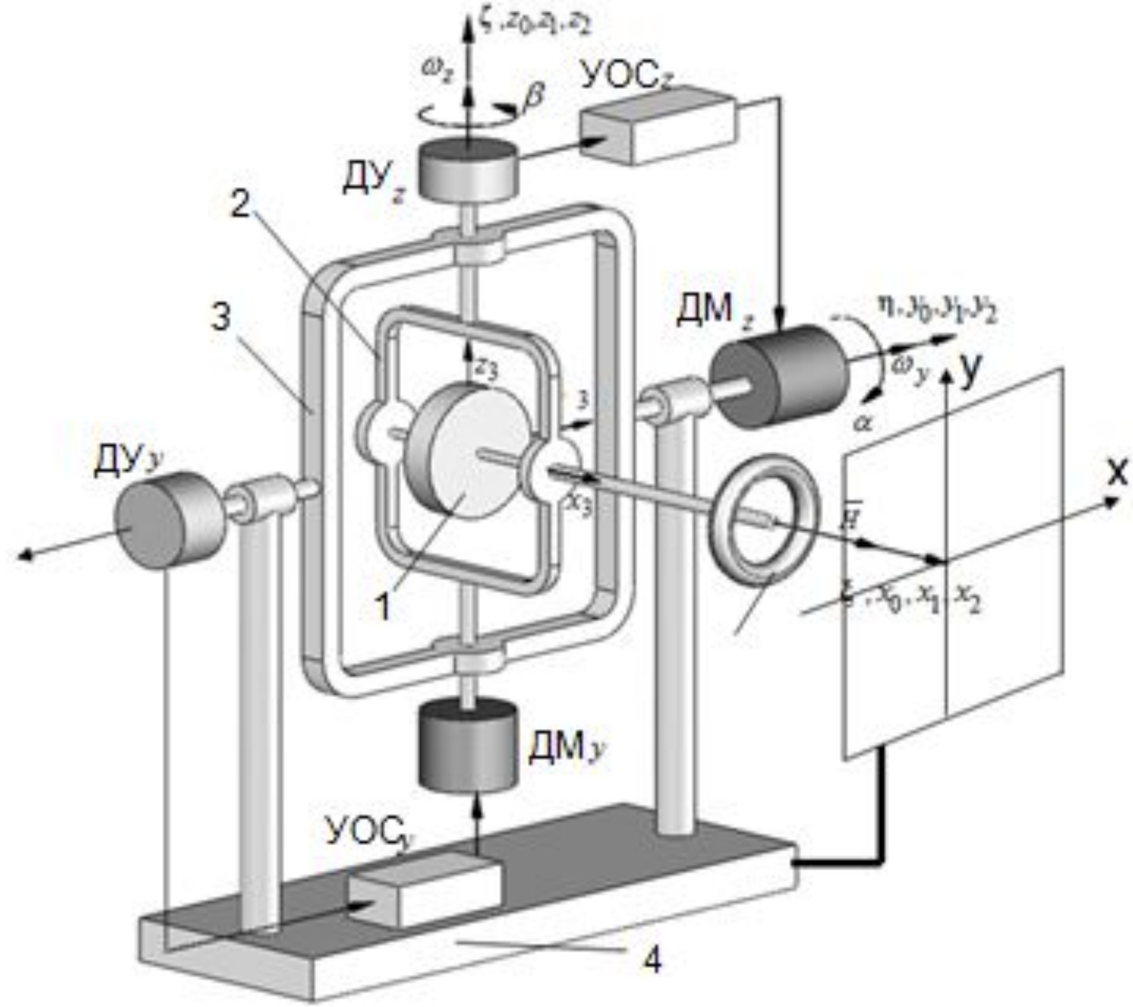
M_i^{a} – активные моменты (датчики момента).

M_i^{p} – реактивные моменты (трение в осях – вяз сухое, тяжение токоподводов).

$$\sum M_i = M_i^{in} + M_i^{a} + M_i^{p}$$



б)



1 – ротор
2 – кожух
3 – наружная рамка
4 – основание (корпус прибора)

1.Уравнение ротора.

$$J_z \frac{d\omega_z}{dt} = M_z^{DB} + M_z^c$$

Обозначим $J_z = J$ $\omega_z \cong \Omega,$

так как кинетический момент совпадает с осью Z (с осью собственного вращения)

$M_z^{DB} > M_z^c \Rightarrow \dot{\Omega} > 0 \Rightarrow$ разгон гиромотора.

$M_z^{DB} < M_z^c \Rightarrow \dot{\Omega} < 0 \Rightarrow$ торможение гиромотора.

$M_z^{DB} = M_z^c \Rightarrow$ установившийся режим работы гиромотора (установившийся режим).

$$J\vec{\Omega} = const = \vec{H}$$

$$\boxed{J \frac{d\Omega}{dt} = M_z = M_{\text{DB}} - M_c} \quad (1)$$

2. Уравнения движения гироузла относительно оси внутренней рамки (ротор +кожух)

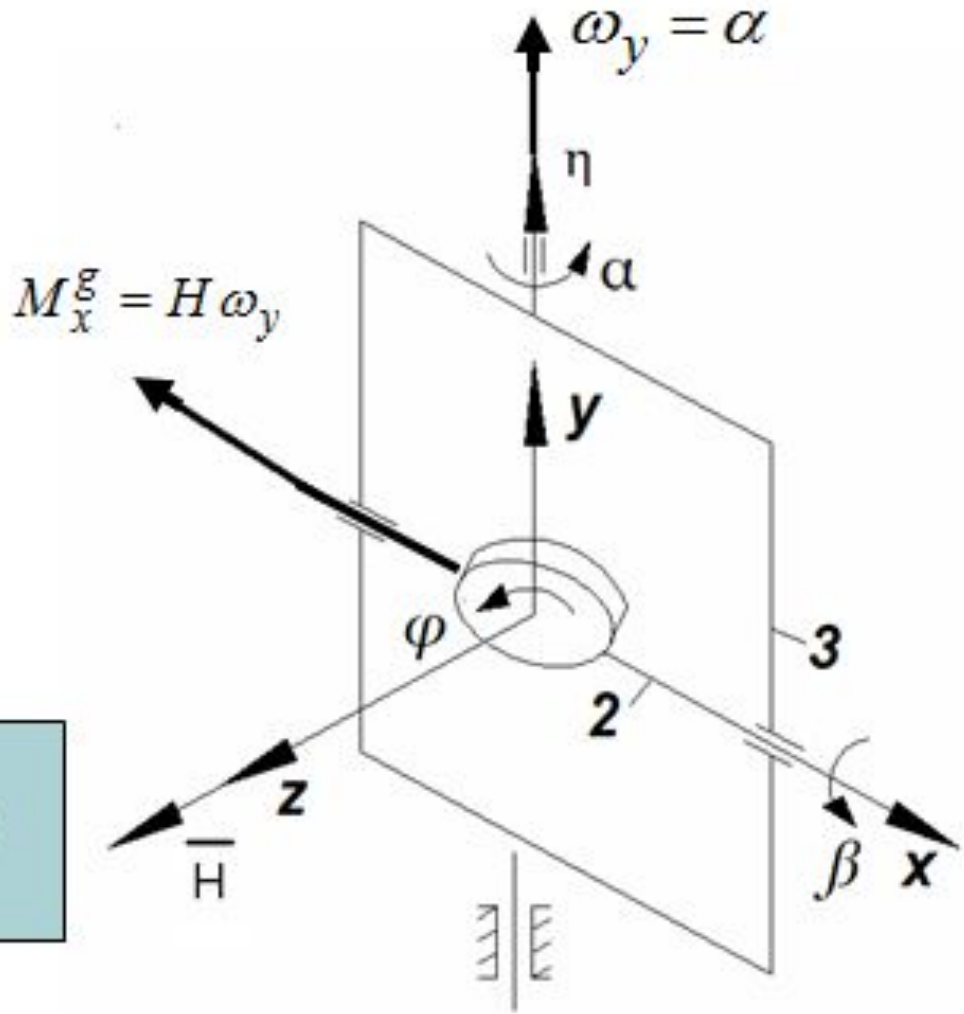
$$J_x \frac{d\omega_x}{dt} = M_x^g + M_x^a + M_x^p$$

$$J_x = J_{px} + J_{Bx} = J_э + J_{Bx}$$

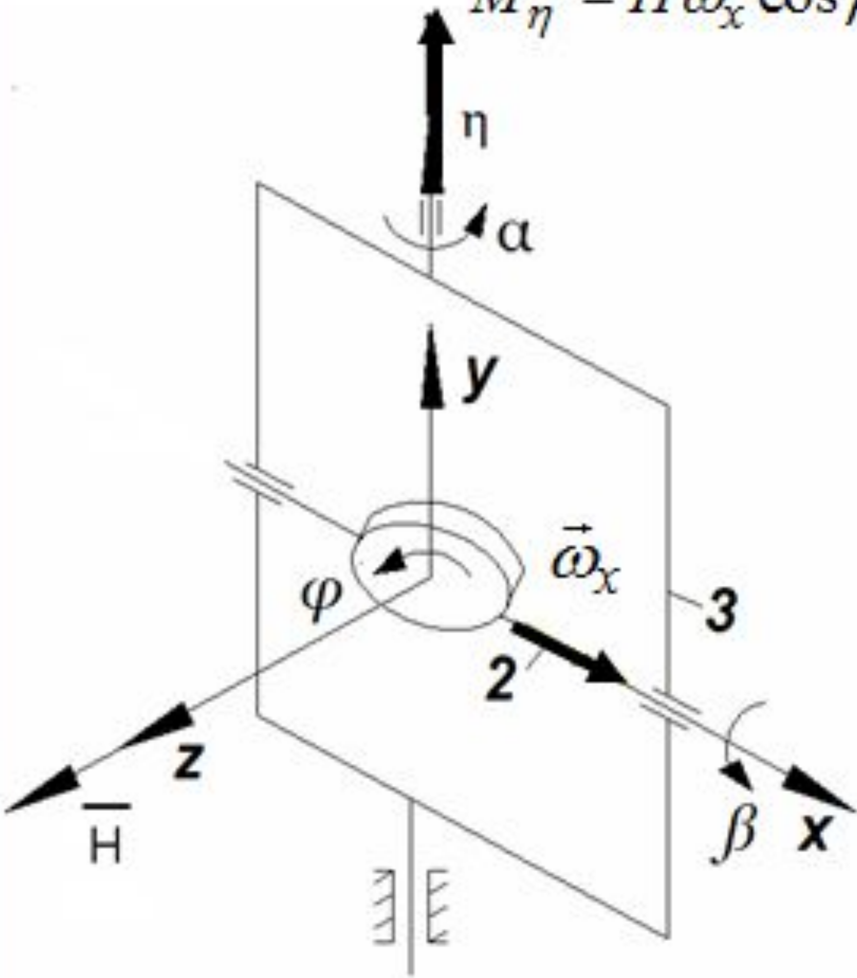
$$M_x^g = H\omega_y$$

$$M_x = M_x^a + M_x^p$$

$$(J_э + J_{Bx})\frac{d\omega_x}{dt} + H\omega_y = M_x \quad (2)$$



3. Наружная рамка с гироузлом



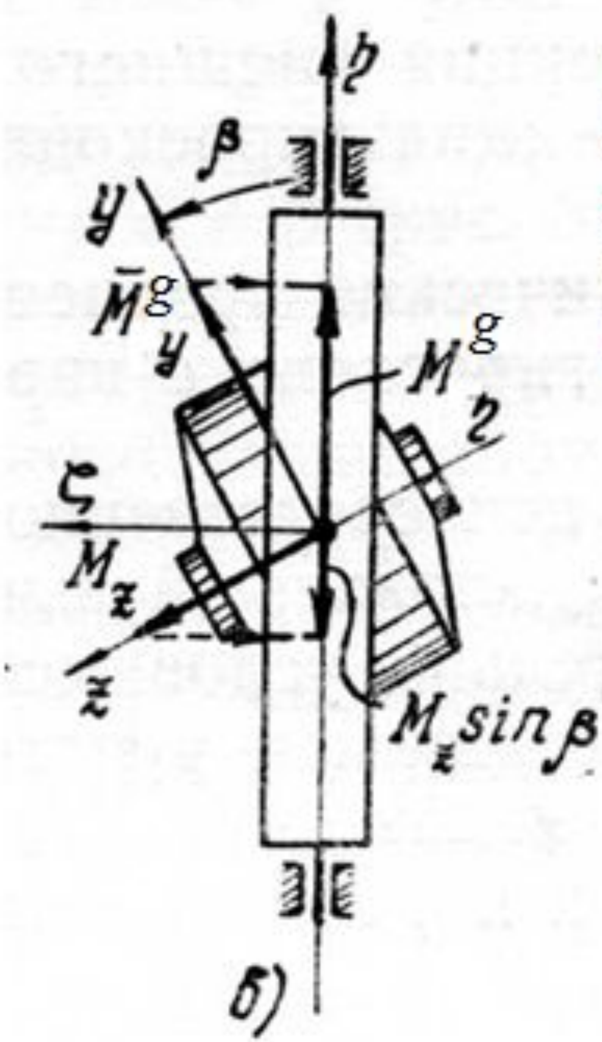
$$M_\eta^g = H\omega_x \cos\beta$$

$$J_\eta = J_{p\eta} + J_{B\eta} + J_{H\eta}$$

$$t = 0 \;\rightarrow\; \Omega = 0$$

Если ось ротора z не перпендикулярна к оси наружной рамки, то повляется проекция $-M_z \sin\beta$

То же самое – при отключении питания.



На гирокамеру по оси Z действует момент трения в подшипниках ротора и момент сил аэродинамического сопротивления газа в гирокамере. Направление этих моментов противоположно вращающему моменту.

$$J_\eta \frac{d\omega_\eta}{dt} = M_\eta^g + M_\eta - M_z \sin\beta$$

$$M_\eta^g = M_y^g \cos\beta = H\omega_x \cos\beta$$

$$J_\eta \frac{d\omega_\eta}{dt} - H\omega_x \cos\beta = M_\eta - M_z \sin\beta$$

Выразим ω_η через ω_y

$$\omega_\eta = \frac{\omega_y}{\cos\beta} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\omega_\eta}{dt} = \frac{\dot{\omega}_y \cos\beta - \omega_y \dot{\beta} \sin\beta}{\cos^2\beta}$$

Пренебрегая величинами второго порядка малости, получим

$$\frac{d\omega_\eta}{dt} = \frac{\dot{\omega}_y}{\cos\ \beta}$$

Окончательно:

$$J\frac{d\Omega}{dt} = M_{\text{ДВ}} - M_c \quad (1)$$

$$(J_э + J_{Вх})\frac{d\omega_x}{dt} + H\omega_y = M_x \quad (2)$$

$$\frac{J_\eta}{\cos\beta}\frac{d\omega_y}{dt} - H\omega_x \cos\beta = M_\eta - M_z \sin\beta \quad (3)$$

В установившемся режиме

$$M_{\text{ДВ}} = M_c\ , \quad M_z = 0, \quad H = J\Omega = const$$

Уравнения прецессионного движения

Общепринятые обозначения:

$$p = \omega_x, \quad q = \omega_y, \quad J_{Bx} + J_э = A, \quad \frac{J_\eta}{\cos\beta} = B$$

$$J\frac{d\Omega}{dt} = M_z; \qquad A\dot{p} + Hq = M_x \ ; \qquad B\dot{q} - Hp\cos\beta = M_\eta - M_z\sin\beta$$

Отбрасывая инерционные члены, отражающие нутационные колебания, в Установившемся режиме запишем прецессионные уравнения:

$$Hq = M_x \qquad\qquad Hp\cos\beta = -M_\eta$$

или

$$q = \frac{M_x}{H} \qquad\qquad p = -\frac{M_\eta}{H}$$

Наши обозначения

Прецессионные уравнения

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\beta} \\ \omega_y = \dot{\alpha}\cos(\beta) \\ \omega_\eta = \dot{\alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = \frac{M_x}{H\cos(\beta)}, (3) \\ \dot{\beta} = -\frac{M_\eta}{H\cos(\beta)}, (4) \end{cases}$$

$$H\dot{\alpha}\cos(\beta) = M_x$$
$$-H\dot{\beta}\cos(\beta) = M_\eta$$

Уравнения с учетом нутационных членов:

$$\begin{cases} I_x\ddot{\beta} + H\dot{\alpha}\cos(\beta) = M_x \\ \left(I_y\ddot{\alpha} - H\dot{\beta}\right)\cos(\beta) = M_\eta \end{cases}$$

Окончательно:

$$\begin{cases} I_x\ddot{\beta} + H\dot{\alpha}\cos(\beta) = M_x \\ I_\eta\ddot{\alpha} - H\,\dot{\beta}\cos(\beta) = M_\eta \end{cases}$$

Подвижное основание

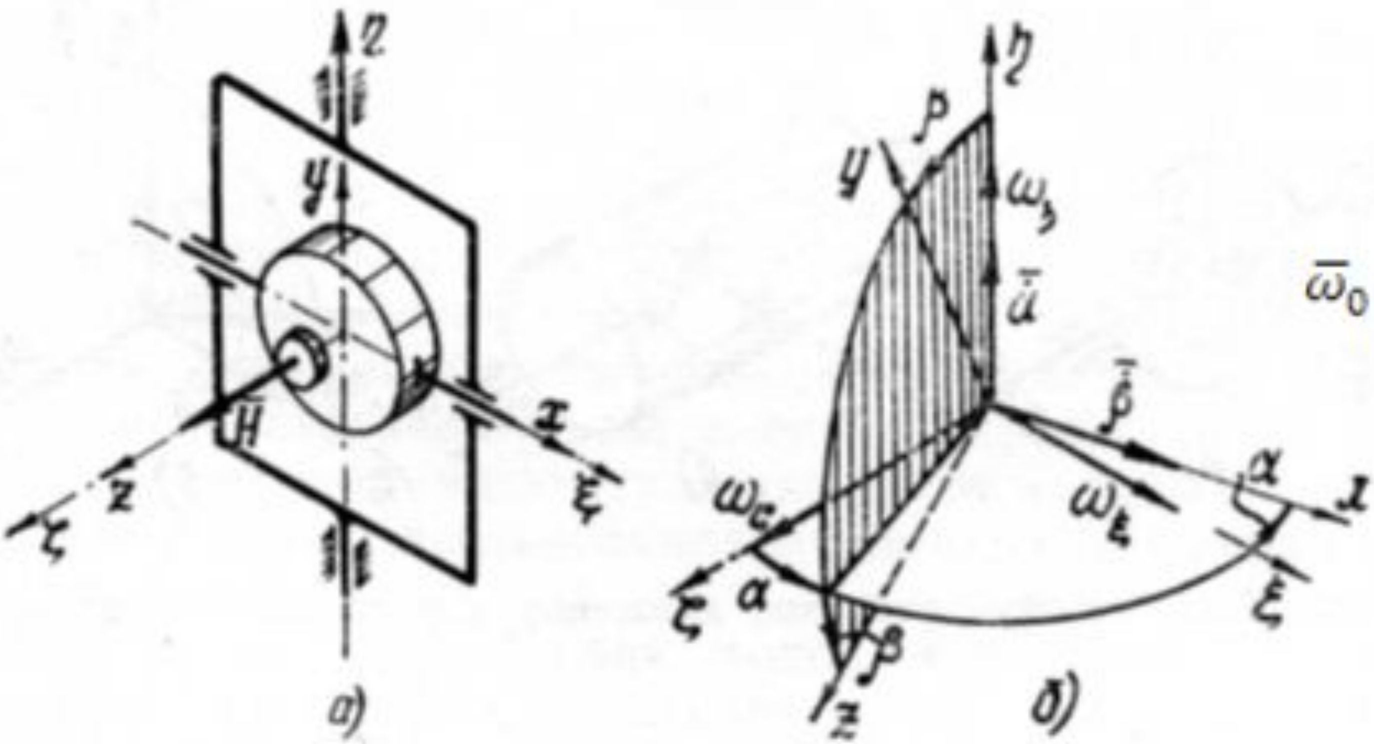


Рис. 3.3. К выводу кинематических соотношений

$$\bar{\omega}_0 = (\omega_{\zeta_0}, \omega_{\eta_0}, \omega_{\xi_0})$$

$$\omega_x = \dot{\beta} + \omega_{\xi_0} \cos\alpha - \omega_{\zeta_0} \sin\alpha$$

$$\omega_y = (\dot{\alpha} + \omega_{\eta_0}) \cos\beta + (\omega_{\zeta_0} \cos\alpha + \omega_{\xi_0} \sin\alpha) \sin\beta$$

$$\omega_\eta = \dot{\alpha} + \omega_{\eta_0}$$