ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

ЛЕКЦИЯ 1

Казахстанско-Американский свободный университет
Кафедра «Бизнеса»

Тема: Основные понятия теории множеств

Цель лекции – изучение основных понятий теории множеств, способов задания множеств, законов алгебры множеств

Содержание:

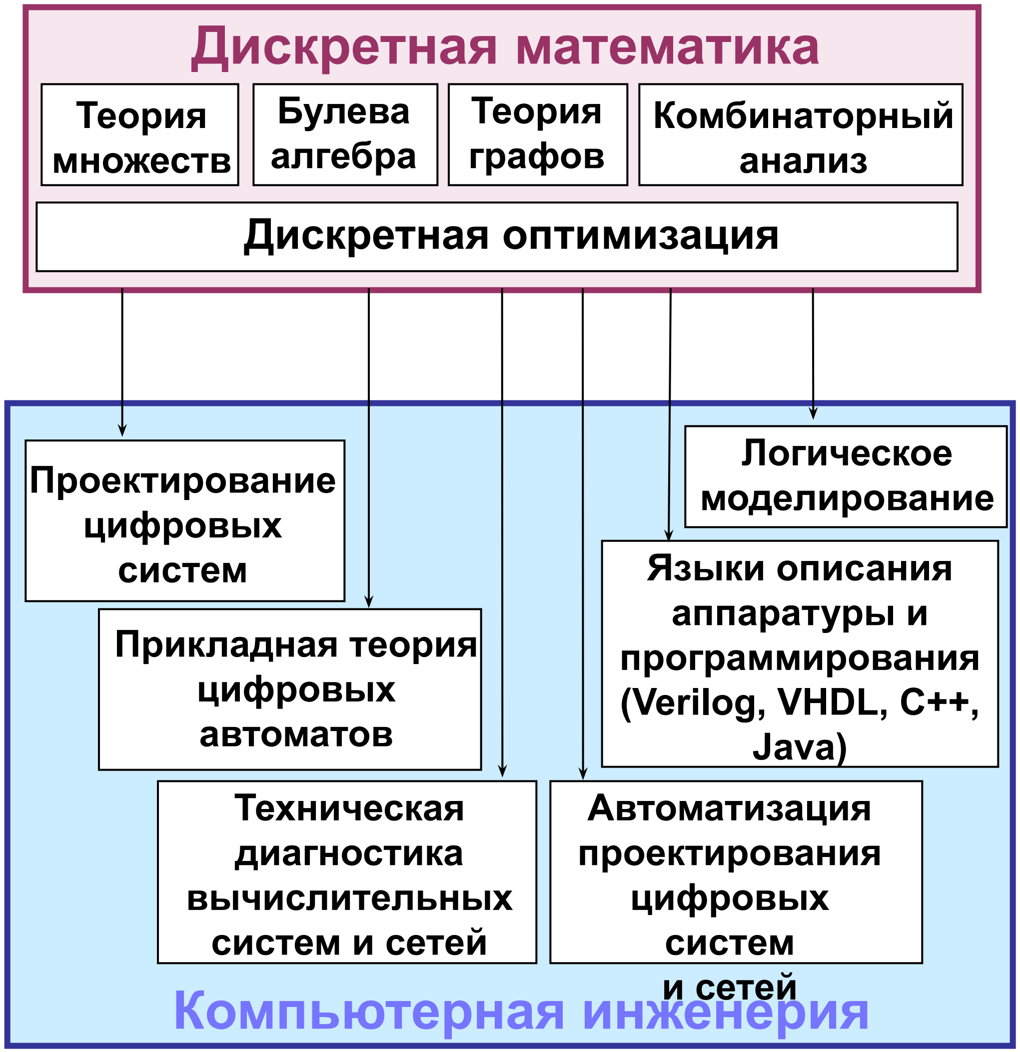
- Курс «Дискретная математика»: цель, структура
- Теория множеств как раздел дискретной математики
- Понятие множества
- Способы задания множеств
- Отношения принадлежности и включения
- Мощность множества. Пустое и универсальное множества
- Булеан и его мощность
- Операции над множествами
- Законы и тождества алгебры множеств Кантора

Литература

- **Горбатов В.А.** Основы дискретной математики. М.: Высш. шк., 1986. С. 4-8.
- **Лавров И.А., Максимова Л.Л.** Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М.: Наука, 1984. С. 4-10.
- **Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М.** Дискретная математика для инженера. М.: Энергия, 1980. 344 с.
- **Новиков Ф.А.** Дискретная математика для программистов. С.-П., 2001. С. 4-24.
- **Тевяшев А.Д., Гусарова И.Г.** Основы дискретной математики в примерах и задачах. Харьков: ХТУРЭ, 2001. С. 4-7.
- **Хаханов В.І., Хаханова І.В., Кулак Е.М., Чумаченко С.В.** Методичні вказівки до практичних занять з курсу “Дискретна математика”. Харків, ХНУРЕ. 2001. 87с.
- **Хаханов В.И., Чумаченко С.В.** Дискретная математика. Электронный учебник. ХНУРЭ: Электронная библиотека кафедры АПВТ (ауд. 320) NSERV\Library\Чумаченко\Дискретная математика\...

Курс «Дискретная математика»: цель, структура

Цель курса – формирование базовых знаний в области ДМ, необходимых для освоения методов анализа и синтеза аппаратных и программных средств цифровых вычислительных систем и сетей различного назначения, изучения теоретической базы информационных технологий, математических способов представления дискретных информационных процессов

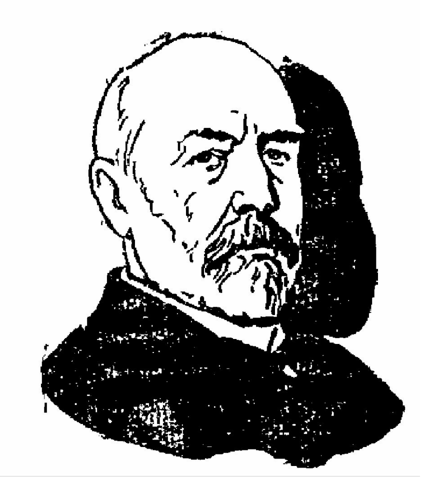


Курс «Дискретная математика»: знания, умения, навыки

Знания	математический аппарат дискретной математики – множества и отношения, операции над ними, графы и операции над ними, формальные правила представления, минимизации и реализации логических функций; комбинаторика в части применения основных формул, методов оптимальных решений и их оценки при рассмотрении типовых задач
Умения	формулировать и решать практические задачи разработки программного обеспечения автоматизированных систем, синтеза и анализа цифровых дискретных объектов на основе выбора наиболее рационального математического аппарата дискретной математики с целью их оптимального решения
Навыки	вычисление теоретико-множественных операций, применение операций минимизации и поглощения, составление матриц для графов, правила минимизации булевых функций, определение полноты булевых функций

Историческая справка

- Немецкий ученый, математик, создатель теории множеств
- Родился в Петербурге в 1845г.
- В 1867 г. окончил Берлинский университет
- В 1872-1913 гг. – профессор университета в Галле
- Сформулировал общее понятие мощности множества (1878)
- Развил принципы сравнения мощностей множеств
- Систематически изложил принципы своего учения
- Созданная Кантором теория множеств, некоторые идеи которой имелись у его предшественников, послужила причиной общего пересмотра логических основ математики и оказала влияние на всю современную ее структуру



Георг Кантор (XIX-XXвв.)

Теория множеств как раздел дискретной математики

- *Сегодня мы знаем, что, логически говоря, возможно вывести почти всю современную математику из единого источника – теории множеств*

  Н. Бурбаки

- *Никто не может изгнать нас из рая, который создал нам Кантор…*

  Д. Гильберт

Термины

Базовые понятия:

- множество/ совокупность/набор
- элемент/объект
- операции над множествами

Ключевые слова:

- подмножество
- принадлежность
- включение
- мощность
- пустое множество
- универсум
- булеан
- объединение
- пересечение
- дополнение
- симметрическая разность

Множество есть многое, мыслимое как единое
Г. Кантор

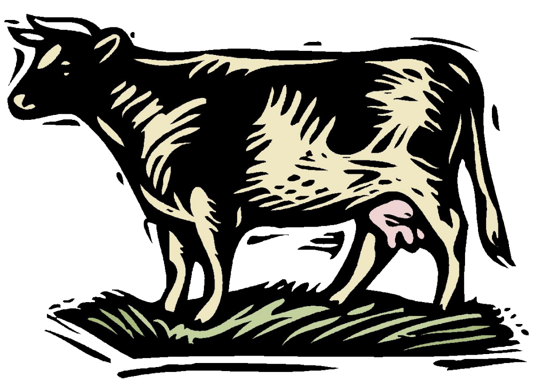
Понятие множества

Множество

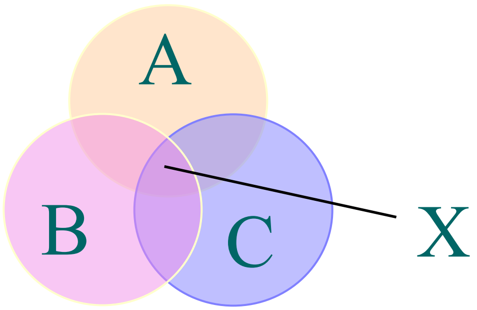
• Точка

Информация

- Множество является **первичным** понятием
- Множество рассматривается как совокупность объектов той или иной природы
- Объекты, которые образуют множество, называются его **элементами**



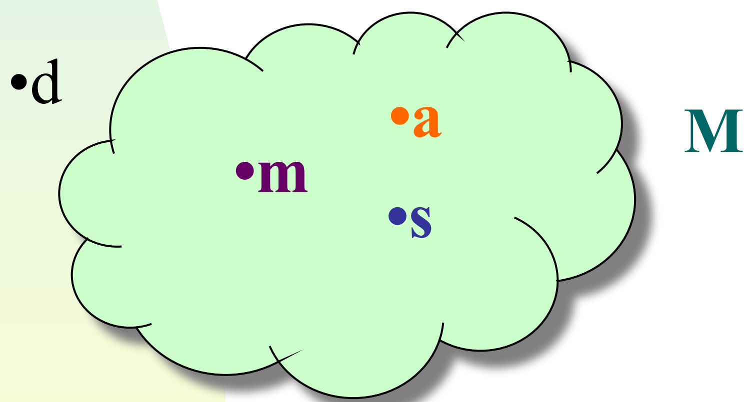
Способы задания множеств

Способ	Пример
Перечисление элементов	$\{a,b,c\}$, $A=\{1,3,5,7\}$
Характеристическое свойство $A=\{$a | a, обладающие свойством $Q\}$, $M=\{\, x \mid P(x) \,\}$	$A=\{x \mid x=2k,\ k\in N\}$; $M=\{x \mid \sin x =1\}$
Порождающая процедура (операции над множествами)	$X=(A\cup B)\cap C$
Графически при помощи диаграмм Эйлера	

Отношение принадлежности

- Отношение **принадлежности** устанавливает связь между множеством и его элементами
- Объект принадлежит множеству, если он является его элементом
- Принадлежность элемента **x** множеству **X** обозначается при помощи символа ∈: $x \in X$

- **Пример**



$m \in M$

$s \in M$

$a \in M$

$d \notin M$

Отношение включения

- Устанавливает связь между двумя множествами:

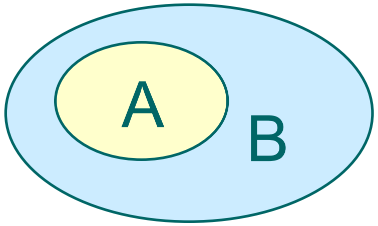
  $$(A \subseteq B) \Leftrightarrow (\forall m \in A \Rightarrow m \in B)$$

- Обозначение:

  $\subset$ – строгое включение;

  $\subseteq$ – нестрогое включение

- A – **подмножество** множества B
- B – **надмножество** множества A
- Множества **равны**, если они состоят из одних и тех же элементов



$A \subset B$

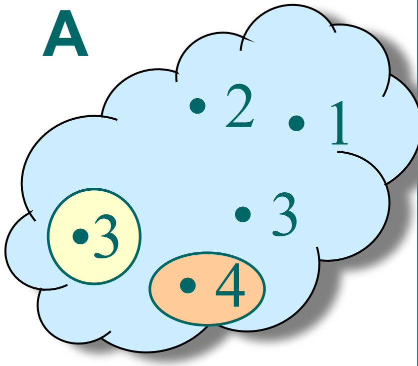
Отношения принадлежности и включения: пример

Дано множество A= {1, 2, 3, {3}, {4} }.

Какие из следующих утверждений выполняются?

- $2 \in A$ – верно, так как в множестве A есть элемент 2;
- $\{1,2\} \subset A$ – верно, так как в множестве A имеются элементы 1,2, т.е. $1 \in A$, $2 \in A$;
- $3 \in A$ – верно, поскольку в множестве A есть элемент 3;
- $\{3\} \in A$ – верно, так как в множестве A есть элемент {3};
- $4 \in A$ – не выполняется, так как в множестве A нет элемента 4;
- $\{4\} \in A$ – верно, так как в множестве A имеется элемент {4};
- $\{4\} \subset A$ – не выполняется, поскольку в множестве A нет элемента 4, т.е. $4 \notin A$.

A



$2 \in A$

$\{1,2\} \subset A$

$3 \in A$

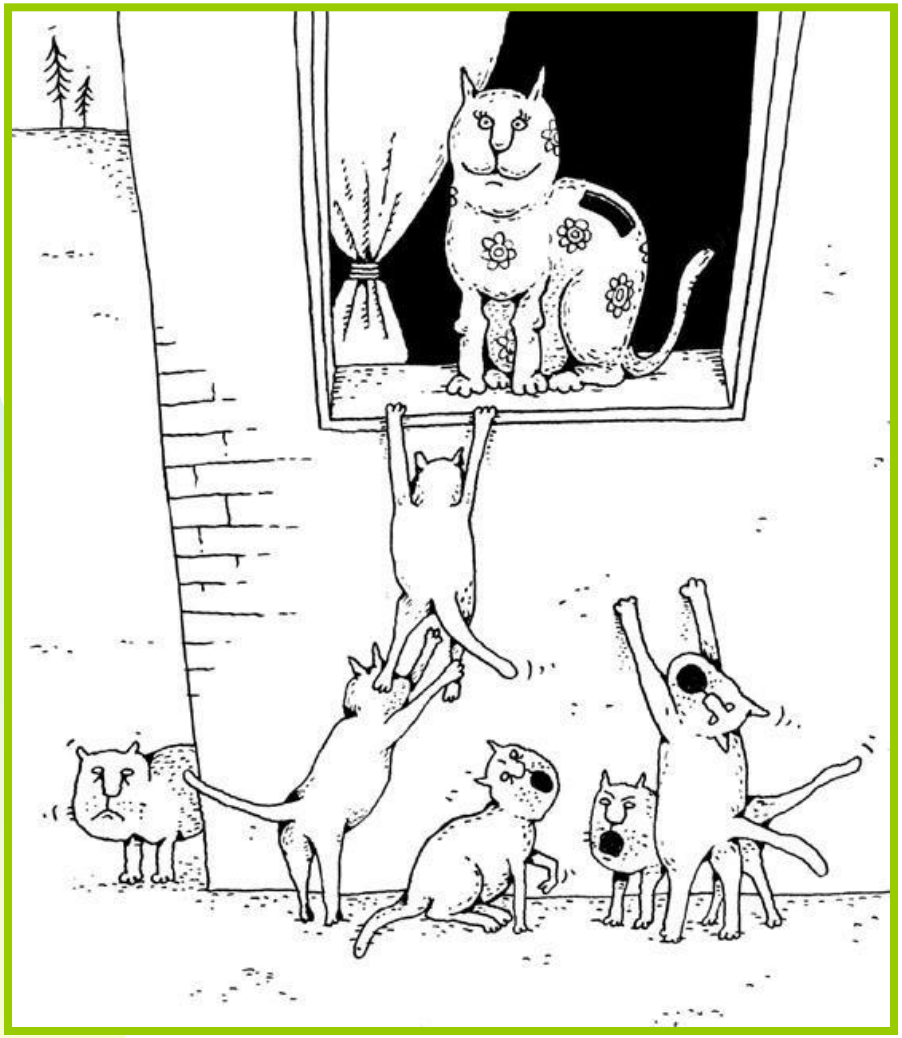
$\{3\} \in A$

$4 \notin A$

$\{4\} \in A$

$\{4\} \not\subset A$

Time Out



Мощность множества.
Пустое и универсальное множества

- **Мощность множества** или **кардинальное число** определяет количество элементов данного множества
- Обозначения: **|M|, card M**
- **Пустое множество** $\varnothing$ не содержит ни одного элемента:

  $$|\varnothing| = 0$$

- **Универсальное множество U** – надмножество всех множеств:

  $$\varnothing \subseteq M \subseteq U$$

Булеан. Мощность булеана

- **Булеан** – множество всех подмножеств данного множества **M**
- Обозначение: **B(M)**
- **Пример**: дано множество A={a, b, c}. Найти B(A).

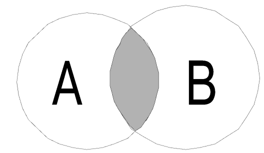
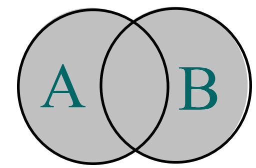
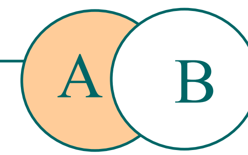
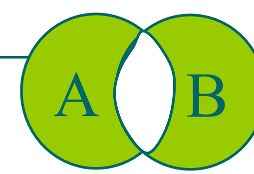
B(A)={ $\varnothing$, {a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c} }

- **Мощность булеана** определяется по формуле:

$$|B(M)|=2^{|M|}$$

- Если $\mathbf{A \subset B}$ и $\mathbf{A \neq B}$, то **A** – **собственное** подмножество множества **B**
- Пустое множество и само множество являются **несобственными** подмножествами множества M
- Остальные подмножества – **собственные**

Операции над множествами

Название операции	Определение	Диаграммы Эйлера
Пересечение	$A\cap B=\{ x \mid x\in A \text{ и } x\in B \}$	
Объединение	$A\cup B=\{ x \mid x\in A \text{ или } x\in B \}$	
Разность	$A\setminus B=\{ x \mid x\in A \text{ и } x\notin B \}$	
Дополнение	$\overline{A}=\mathbf{U}\setminus A=\{ x \mid x\in \mathbf{U} \text{ и } x\notin A \}$	
Симметрическая разность	$A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=$ $=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$	

Законы и тождества алгебры множеств Кантора. 1

Название	Формула
Коммутативность	$A\cup B=B\cup A,\ A\cap B=B\cap A$
Ассоциативность	$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),$ $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$
Дистрибутивность	$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$ $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$
Идемпотентность	$A\cap A=A,\ A\cup A=A$
Действия с константами	$A\cup\varnothing=A,\ A\cap\varnothing=\varnothing,\ A\cup U=U,\ A\cap U=A$
Закон противоречия	$A\cap\overline{A}=\varnothing$
Закон исключенного третьего	$A\cup\overline{A}=U$
Инволюция	$\overline{\overline{A}}=A$

Законы и тождества алгебры множеств Кантора. 2

Название	Формула
Закон де Моргана	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
Элиминация	$(A \cup B) \cap A = A$, $(A \cap B) \cup A = A$
Склеивание	$(A \cup B) \cap (A \cup B) = \overline{A}$, $(A \cap B) \cup (A \cap B) = \overline{A}$
Законы Блэйка-Порецкого	$A \cap (A \overline{\cup} B) = A \cap B$, $A \cup (A \overline{\cap} B) = A \cup B$ $A \overline{\cap} (A \cup B) = A \overline{\cap} B$, $A \cup (A \cap B) = A \overline{\cup} B$
Формулы для определения мощности	$\lvert A \cup B \rvert = \lvert A \rvert + \lvert B \rvert - \lvert A \cap B \rvert$, $\lvert A \cap B \rvert = \lvert A \rvert + \lvert B \rvert - \lvert A \cup B \rvert$

Алгебра множеств Кантора. Выводы

- **Алгебра** – совокупность носителя и сигнатуры
- Обозначение: **$A=<N, S>$**
- Замкнутость относительно операций
- Алгебра множеств Кантора:

носитель – множества,
сигнатура – набор операций
Обозначение: **$A_k=<N_k, S_k>$**

Тест-вопросы

1. Могут ли повторяться элементы множества?
а) да; б) нет.
2. Является ли множество несобственным подмножеством самого себя?
а) да; б) нет.
3. Множества равны, если они содержат
а) одни и те же элементы;
б) одинаковое количество элементов.

4. Являются ли понятия «мощность» и «кардинальное число» идентичными?
а) да; б) нет.
5. Определить мощность булеана множества F={a, {d, c} }:
А) |B(F)|= 2;
Б) |B(F)|= 4;
В) |B(F)|= 0;
Г) |B(F)|= 3.

Тест-вопросы

6. Что является константами в теории множеств:
а) любое множество,
б) булеан,
в) любой элемент булеана,
г) пустое множество,
д) универсальное множество?

7. Какие формулы определяют закон элиминации?
а) $(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cap \mathbf{A} = \mathbf{A}$, $(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup \mathbf{A} = \mathbf{A}$;
б) $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \mathbf{B} \cup \mathbf{A}$, $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \mathbf{B} \cap \mathbf{A}$.

8. Как определяется дополнение множества
а) $\overline{A} = \mathbf{U} \backslash A$; б) $\overline{A} = \mathbf{U} \Delta A$?

9. Мощность множества вычисляется по формуле:
а) $|\mathbf{B(M)}| = \mathbf{2} \cdot |\mathbf{M}|$;
б) $|\mathbf{B(M)}| = \mathbf{2}^{|\mathbf{M}|}$.

10. Какие подмножества являются собственными для множества $F = \{a, \{d, c\}\}$:
А) {a, {d, c} },
Б) {a},
В) {d, c},
Г) {{d, c}},
Д) ∅?