

Дифференциальные уравнения и ряды

Лекция 9

Тема 3. Ряды

§1. Числовые ряды: основные понятия

Рассмотрим числовую последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots = \{a_n\}$, где a_n – действительные или комплексные числа.

Выражение вида $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется **числовым рядом**,

a_1, a_2, a_3, \dots – члены ряда,

a_n – общий член ряда.

Сумма первых n членов ряда называется n -й *частичной суммой* ряда и обозначается S_n , т.е.

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Если последовательность частичных сумм ряда $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет конечный предел S при $n \rightarrow \infty$, то ряд называется *сходящимся*, число $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ называют *суммой ряда*.

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ не существует или $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$, то говорят, что ряд *расходится*. Такой ряд суммы не имеет.

Пример 1. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a q^n = a + a q + a q^2 + \dots + a q^{n-1} + \dots, \quad (a \neq 0).$$

Исследуем ряд на сходимость по определению.

Если $q \neq 1$, то члены ряда образуют геометрическую прогрессию, поэтому сумма первых n членов находится по формуле:

$$S_n = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{a}{1 - q} - \frac{a q^n}{1 - q}, \quad q \neq 1.$$

1. Если $|q| < 1$, то $q^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$,

следовательно, ряд сходится и его сумма $S = a/(1 - q)$.

2. Если $|q| > 1$, то $q^n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ и ряд расходится.

3. Если $q = 1$, то ряд примет вид: $a + a + a + \dots$

В этом случае $S_n = na$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$, ряд расходится.

4. Если $q = -1$, то ряд примет вид: $a - a + a - \dots$

В этом случае $S_n = 0$ при четном n и $S_n = a$ при нечетном n , поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ не существует и ряд расходится.

Таким образом, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geq 1$.

Пример 2. Рассмотрим ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$.

Иследуем ряд на сходимость по определению.

Сначала преобразуем общий член ряда

$$a_n = \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{A}{n-1} + \frac{B}{n+1} \Rightarrow \frac{A(n+1) + B(n-1)}{n^2 - 1}$$

$$\Rightarrow A(n+1) + B(n-1) = 1.$$

$$\begin{aligned} n^1 : A + B &= 0 \\ n^0 : A - B &= 1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} A = 1/2; \\ B = -1/2. \end{cases}$$

Таким образом, $a_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right)$.

Составим n -ую частичную сумму ряда:

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^2 - 1} = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n+1} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\left[\frac{1}{\cancel{2} \cancel{2} \cancel{3}} - \frac{1}{\cancel{3}} \right]_{k=2} + \left[\frac{1}{\cancel{2} \cancel{3} \cancel{4}} - \frac{1}{\cancel{4}} \right]_{k=3} + \left[\frac{1}{\cancel{3} \cancel{4} \cancel{5}} - \frac{1}{\cancel{5}} \right]_{k=4} + \left[\frac{1}{\cancel{4} \cancel{5} \cancel{6}} - \frac{1}{\cancel{6}} \right]_{k=5} + \dots + \right. \\
 &\quad \left. + \left[\frac{1}{\cancel{n} \cancel{n-3} \cancel{n-1}} - \frac{1}{\cancel{n-1}} \right]_{k=n-2} + \left[\frac{1}{\cancel{n} \cancel{n-2} \cancel{n}} - \frac{1}{\cancel{n}} \right]_{k=n-1} + \left[\frac{1}{\cancel{n} \cancel{n-1} \cancel{n+1}} - \frac{1}{\cancel{n+1}} \right]_{k=n} + \left[\frac{1}{\cancel{n} \cancel{n+2} \cancel{n+1}} - \frac{1}{\cancel{n+1}} \right]_{k=n+1} \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right).
 \end{aligned}$$

Таким образом, $S_n = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right)$.

Теперь вычисляем предел частичной суммы ряда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) \right] = \frac{3}{4}.$$

0 0

Предел равен конечному числу, следовательно, данный ряд сходится по определению и его сумма $S = 3/4$.

Свойства числовых рядов

1. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и его сумма равна S , то ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c a_1 + c a_2 + c a_3 + \dots + c a_n + \dots$ также сходится и его сумма равна $c \cdot S$.

2. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся и их суммы соответственно равны S_a и S_b , то сходятся ряды

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ и их суммы соответственно равны $S_a \pm S_b$.

3. Если к ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ прибавить (или отбросить) конечное число членов, то исходный ряд и полученный ряд сходятся или расходятся одновременно.

Ряд $a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$ называется n -м *остатком ряда*. Он получается из ряда $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ путем отбрасывания n первых его членов.

Из 3 свойства следует, что если исходный ряд сходится, то при $n \rightarrow \infty$ его остаток стремится к нулю.

§2. Признаки сходимости числовых рядов

Установить сходимость или расходимость ряда по определению (путем вычисления $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$) во многих случаях является непростой задачей. Поэтому для выяснения сходимости ряда используют специальные *признаки сходимости*.

Теорема 1 (необходимый признак сходимости).

Если ряд сходится, то предел его общего члена при $n \rightarrow \infty$ равен нулю.

Доказательство.

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Тогда, учитывая, что $a_n = S_n - S_{n-1}$, получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Следствие (достаточное условие расходимости ряда).

Если предел n -го члена ряда отличен от нуля или не существует, то ряд расходится.

Замечание. Теорема 1 дает необходимое условие сходимости ряда, но не достаточное, т.е. если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, то из этого не следует, что ряд сходится.

В качестве **примера (1)** рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots,$$

называемый **гармоническим**.

Здесь $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Однако этот ряд является расходящимся (докажем это).

Запишем сумму первых $2n$ и n членов ряда:

$$S_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n};$$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Найдем разность $S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}$, в которой каждое слагаемое заменим наименьшим, равным $1/(2n)$.

Получим $S_{2n} - S_n > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$.

Теперь предположим, что ряд сходится, тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S.$$

Переходя к пределу в неравенстве, получим, что $S - S > 1/2$, или $0 > 1/2$.

Пришли к противоречию, следовательно предположение о сходимости ряда неверно, т.е. гармонический ряд расходится.

Пример 2. Записать общий член ряда

$\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 + \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3$ указать краткую запись
 для ряда и исследовать его на сходимость.

Решение.

На основании первых трех элементов определяем закономерность и видим, что $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Поэтому в краткой записи ряд имеет вид: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Вычислим предел общего члена ряда:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0.$$

Общий член ряда не стремится к 0, следовательно, по достаточному условию расходимости, данный ряд расходится.

Замечания

1. Предел вычислен на основании второго замечательного предела.
2. Достаточное условие расходимости еще называют критерием расходимости. Поэтому при решении задач ответ можно формулировать в виде: ряд расходится по критерию расходимости.

Достаточные признаки сходимости

Рассмотрим некоторые достаточные признаки сходимости для **знакоположительных** рядов, т.е. рядов с неотрицательными членами (ряд с отрицательными членами превращается в знакоположительный путем умножения на (-1) , что, согласно свойствам рядов, не влияет на сходимость ряда).

Теорема 2 (признак сравнения).

Пусть даны два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Если для всех n выполняется неравенство $a_n \leq b_n$,

то из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует расходимость

ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(Суть признака: из сходимости большего ряда следует

сходимость меньшего ряда, а из расходимости

меньшего ряда следует расходимость большего ряда.)

Пример 3. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n}$.

Решение.

Очевидно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Поэтому ряд может как сходиться, так и расходиться.

Рассмотрим гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, который расходится (см. пример 1).

Обозначим $a_n = \frac{1}{n \cdot 3^n}$, и сравним a_n и $b_n = \frac{1}{n}$:

$$\forall n: 3^n > 1 \Rightarrow \frac{1}{n \cdot 3^n} < \frac{1}{n} \Rightarrow a_n < b_n.$$

В этом случае теорема 2 не применима, т.к. из расходимости большего ряда не следует расходимость меньшего ряда. И нужно искать другой ряд для сравнения.

Рассмотрим степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$, который сходится (см. §1, пример 1).

Обозначим $b_n = \frac{1}{3^n}$ и сравним a_n и b_n :

$$\forall n > 1: \frac{1}{n \cdot 3^n} < \frac{1}{3^n} \Rightarrow a_n < b_n.$$

Следовательно, по признаку сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n}$ тоже сходится.

Теорема 3 (предельный признак сравнения).

Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ряды с положительными членами и существует конечный, отличный от нуля предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k$, то ряды одновременно сходятся или расходятся.

Замечание. Здесь важно, что $k \neq 0$ и $k \neq \infty$.

Если при вычислении предела возникает одно из этих значений, значит, нужно либо подбирать другой ряд для сравнения, либо использовать другой признак сходимости.

Пример 4. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2n}$.

Решение.

Очевидно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ при $a_n = \sin \frac{\pi}{2n} \sim \frac{\pi}{2n}$.

Поэтому для сравнения возьмем гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ и используем предельный признак сравнения:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{\pi}{2n} \div \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{2n} \cdot n \right) = \frac{\pi}{2} = k.$$

Значение k конечное и не нулевое, поэтому, по предельному признаку сравнения, оба ряда ведут себя одинаково.

Т.к. гармонический ряд расходится, то и данный ряд расходится.

Теорема 4 (признак Даламбера).

Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = k$.

Тогда ряд сходится при $k < 1$ и расходится при $k > 1$.

Замечание

При $k = 1$ признак Даламбера ответа о сходимости не дает. Нужно применить другой признак.

Пример 5. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+1)!}$.

Решение.

Здесь сложно оценить предел общего члена ряда, поэтому используем достаточный признак сходимости.

По условию $a_n = \frac{n^n}{(n+1)!}$ тогда $a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+2)!}$.

Воспользуемся признаком Даламбера:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+2)!} \div \frac{n^n}{(n+1)!} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n \cdot (n+1) \cdot (n+1)!}{(n+2)! \cdot n^n} = \\ &= \left[(n+2)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n+1) \cdot (n+2) = (n+1)! \cdot (n+2) \right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} \cdot \frac{(n+1) \cdot \cancel{(n+1)!}}{\cancel{(n+1)!} \cdot (n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \cdot \frac{(n+1)}{(n+2)} = e > 1. \end{aligned}$$

e
 1

Следовательно, по признаку Даламбера, ряд расходится.

Теорема 5 (радикальный признак Коши).

Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = k$.

Тогда ряд сходится при $k < 1$ и расходится при $k > 1$.

Замечание

Как и в случае признака Даламбера, данный признак при $k = 1$ ответа о сходимости не дает.

Пример 6. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)^n}$.

Решение.

Исследуем по радикальному признаку Коши:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{(n+1)^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1.$$

По радикальному признаку Коши, данный ряд сходится.

Теорема 6 (интегральный признак Коши).

Пусть члены знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ являются значениями некоторой непрерывной монотонно убывающей на промежутке $[1; +\infty)$ функции $f(x)$ так, что $a_1 = f(1), a_2 = f(2), \dots, a_n = f(n), \dots$

Тогда

• если $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;

2) если $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ расходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Пример 7. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

Доказательство.

Воспользуемся интегральным признаком Коши.

Составим соответствующий несобственный интеграл I рода $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx$ и вычислим его.

$$\begin{aligned} \text{Если } \alpha \neq 1, \text{ то } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b x^{-\alpha} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left. \frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha} \right|_1^b = \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \lim_{b \rightarrow +\infty} (b^{-\alpha+1} - 1) = \begin{cases} b^{-\alpha+1} \rightarrow 0, & \text{если } \alpha > 1 \\ b^{-\alpha+1} \rightarrow +\infty, & \text{если } \alpha < 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{при } \alpha > 1; \\ +\infty, & \text{при } \alpha < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, интеграл сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha < 1$.

Рассмотрим случай когда $\alpha = 1$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln|x| \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln b = +\infty \Rightarrow$$

интеграл расходится.

Согласно интегральному признаку Коши, из сходимости интеграла следует сходимость ряда, а из расходимости – расходимость ряда.

Поэтому ряд сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

Замечание.

Ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ называют обобщенным гармоническим рядом и часто используют в признаках сравнения.

Задание для самоконтроля

Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2 \cdot \ln(n+1)}$.

используя интегральный признак Коши.