Тема: «Многокритериальные задачи. Метод идеальной точки»

Метод идеальной точки

- *Идеальной или точкой абсолютного максимума* называют точку в критериальном пространстве, в которой все критерии достигают своих максимальных значений.
- Если эта точка принадлежит достижимому множеству G, то все эффективное (паретовское) множество состоит из этой единственной точки и проблемы как таковой в этом случае нет. Однако идеальная точка обычно лежит вне множества G и поэтому нереализуема. В связи с этим ее иногда называют также утопической.
- Идея метода состоит в том, чтобы на множестве G найти точку, наиболее близкую к идеальной.

Решение задачи методом идеальной точки

Задача линейной многокритериальной максимизации с двумя переменными и двумя целевыми функциями

Пример 1. Найти значения переменных, при которых функции

$L_1 = 2x_1 + x_2 + 1 \rightarrow \max$

$L_2 = x_1 - x_2 + 5 \rightarrow \max$

при ограничениях:

$x_1 + 2x_2 \leq 8,$

$0 \leq x \leq 6,$

$0 \leq x \leq 3.$

Решение.

1) Построим область допустимых решений. Введем на плоскости прямоугольную систему координат и построим множество X — область допустимых решений данной задачи в указанной системе координат. Ограничительные условия определяют на плоскости многоугольник *ABCDE* (Рис. 1), вершины которого имеют соответственно координаты: (0; 0), (0; 3), (2; 3), (6; 1), (6; 0). Следовательно, предст собою многоугольник *ABCDE*.

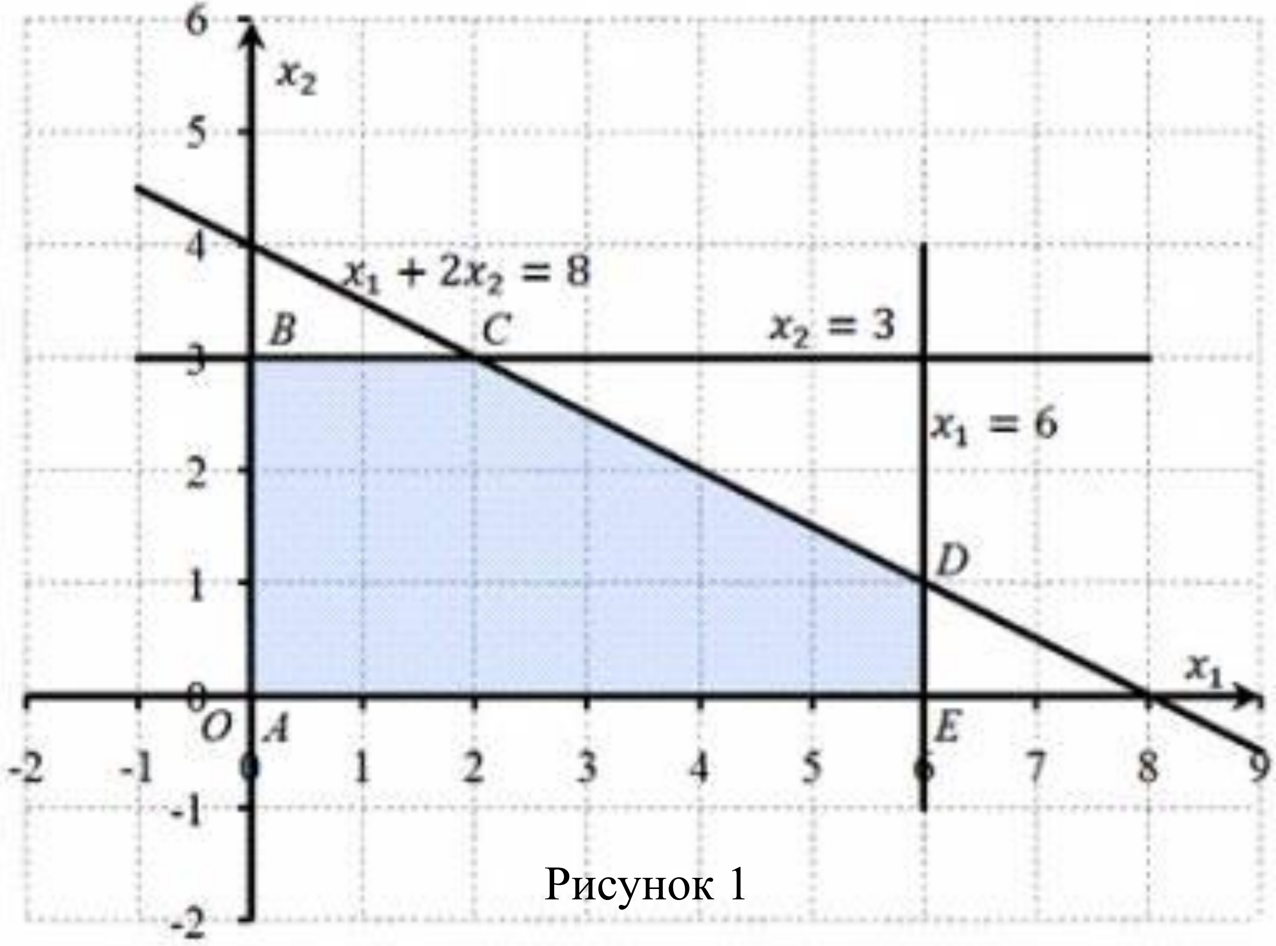

Рисунок 1

2) Строим область допустимых решений в пространстве критериев. Подвергнем координаты каждой точки плоскости преобразованиям $L_1 = 2x_1+x_2+1 \rightarrow \max$ и $L_2 = x_1-x_2+5 \rightarrow \max$. Получим плоскость OL_1L_2. При этом в силу линейности проводимых преобразований прямоугольная система координат перейдет в прямоугольную систему координат , а многоугольник *ABCDE* в многоугольник *A*B*C*D*E**, вершины которого имеют соответственно координаты: (1; 5), (4; 2), (8; 4), (14; 10), (13; 11) (рис. 2).

Для наглядности укажем описанное соответствие вершин: $A(0; 0) \rightarrow A^*(1; 5)$, $B(0; 3) \rightarrow B^*(4; 2)$, $C(2; 3) \rightarrow C^*(8; 4)$, $D(6; 1) \rightarrow D^*(14; 10)$, $E(6; 0) \rightarrow E^*(13; 11)$.

Таким образом, все точки, координаты которых удовлетворяют условиям $L_1= 2x_1+x_2+1 \rightarrow \max$, $L_2 = x_1-x_2+5 \rightarrow \max$ и $(x_1, x_2) \in X$, определяют на плоскости многоугольник *A*B*C*D*E**. Следовательно, область допустимых решений данной задачи в системе координат (пространстве критериев) представляет собою многоугольник *A*B*C*D*E**.

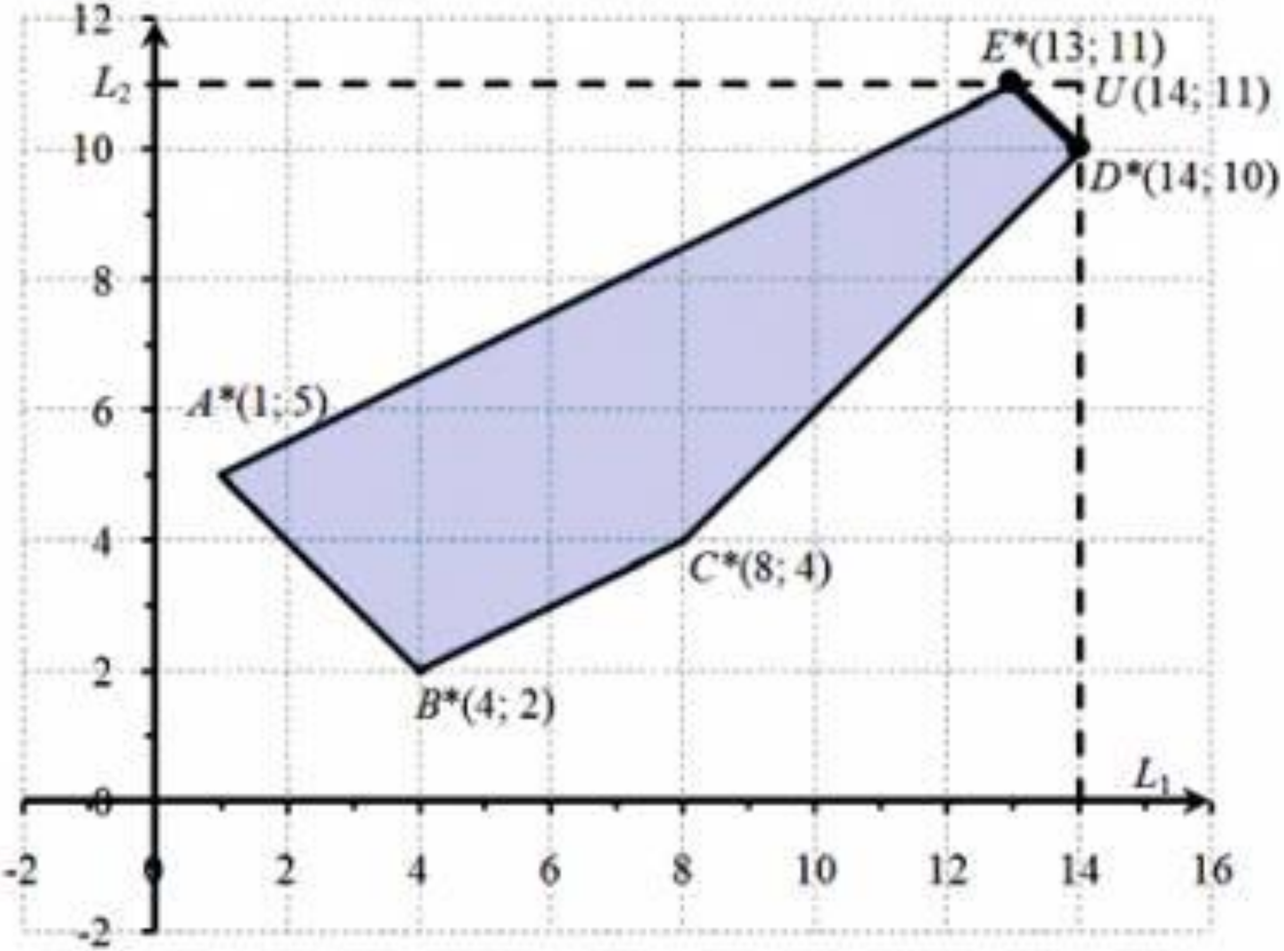

Рисунок 2

3) Находим множество Парето. Это отрезок *D*E**.

4) Находим точку утопии. Выбираем комбинацию наилучших значений всех критериев. В данном случае это точка *U* с координатами (14; 11).

5) Находим идеальную точку. Теперь необходимо найти во множестве Парето точку, расположенную ближе всех к точке утопии U. Из рис. 3 видно, что точка I (I_1, I_2), являющаяся основанием перпендикуляра, проведенного из точки U (14; 11) к прямой D^*E^*, принадлежит отрезку D^*E^*. Это означает, что точка I — искомая.

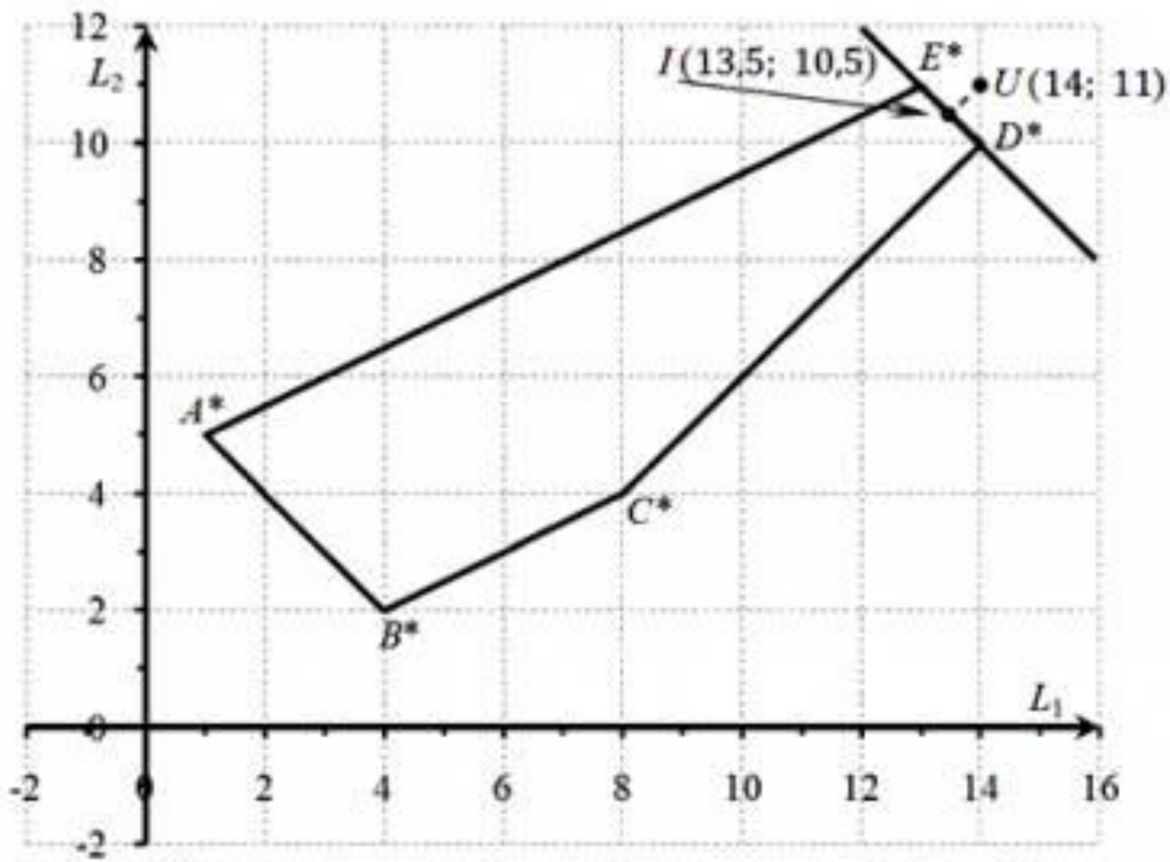

Рисунок 3

6) Находим координаты идеальной точки. Сейчас необходимо вспомнить аналитическую геометрию: находим уравнение прямой *D*E** и находим точку пересечения перпендикуляра проходящего через точку утопии U получаем координаты идеальной точки I (I_1, I_2).

Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две заданные точки. Имеем

$$\frac{L_1 - L_{1D^*}}{L_{1E^*} - L_{1D^*}} = \frac{L_2 - L_{2D^*}}{L_{2E^*} - L_{2D^*}},$$

где L_{1D^*}, L_{2D^*} и L_{1E^*}, L_{2E^*} — координаты точек D^* и E^* соответственно. Подставляя сюда числовые значения для координат D^* и E^*, находим:

$$\frac{L_1 - 14}{13-14} = \frac{L_2 - 10}{11-10}, \text{ или } L_1 + L_2 = 24.$$

Нормальным вектором прямой D^*E^* является вектор $\vec{N}(1;1)$, направляющим вектором для прямой UI. Следовательно, ее каноническое уравнение имеет вид:

$$\frac{L_1 - L_{1U}}{1} = \frac{L_2 - L_{2U}}{1},$$

где L_{1U}, L_{2U} — координаты точки U. Подставляя сюда числовые значения для координат U, находим:

$$\frac{L_1 - 14}{1} = \frac{L_2 - 11}{1}, \text{ или } L_1 - L_2 = 3.$$

Точка I принадлежит прямым D^*E^* и UI (рис. 70). Поэтому ее координаты удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = 24, \\ I_1 - I_2 = 3. \end{cases}$$

Отсюда находим $I_1 = \frac{27}{2}$, $I_2 = \frac{21}{2}$.

Расстояние d между точками $I\left(\frac{27}{2};\frac{21}{2}\right)$ и $U(14;\ 11)$ равно длине вектора $\overrightarrow{IU} = \left(14-\frac{27}{2};\ 11-\frac{21}{2}\right) = \left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$, которая, в свою очередь, равна корню квадратному из суммы квадратов его координат. Поэтому $d = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Соответствующие значения x_1, x_2 найдем из системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 1 = \frac{27}{2}, \\ x_1 - x_2 + 5 = \frac{21}{2}. \end{cases}$$

Имеем $x_1 = 6,\ x_2 = \frac{1}{2}$.

Таким образом, Парето-оптимальное решение $L_1 = \frac{27}{2}, L_2 = \frac{21}{2}$ достигается при $x_1 = 6,\ x_2 = \frac{1}{2}$, а идеальная точка $\left(\frac{27}{2};\frac{21}{2}\right)$ находится от точки утопии $(14;\ 11)$ на расстоянии $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

<u>Замечание</u>. При нахождении расстояния между точкой утопии и идеальной точкой, учитывая топологию множества Парето, был применен «геометрический» метод. В общем случае задача нахождения расстояния между указанными точками решается как экстремальная. Необходимо найти на множестве Парето точку, такую, что расстояние между ней и точкой утопии минимально.

Заключение

Таким образом, метод может быть использован для построения не популяционных алгоритмов Парето-аппроксимации. Задачу Парето-аппроксимации в этом случае сводят к многократному решению задачи глобальной оптимизации.