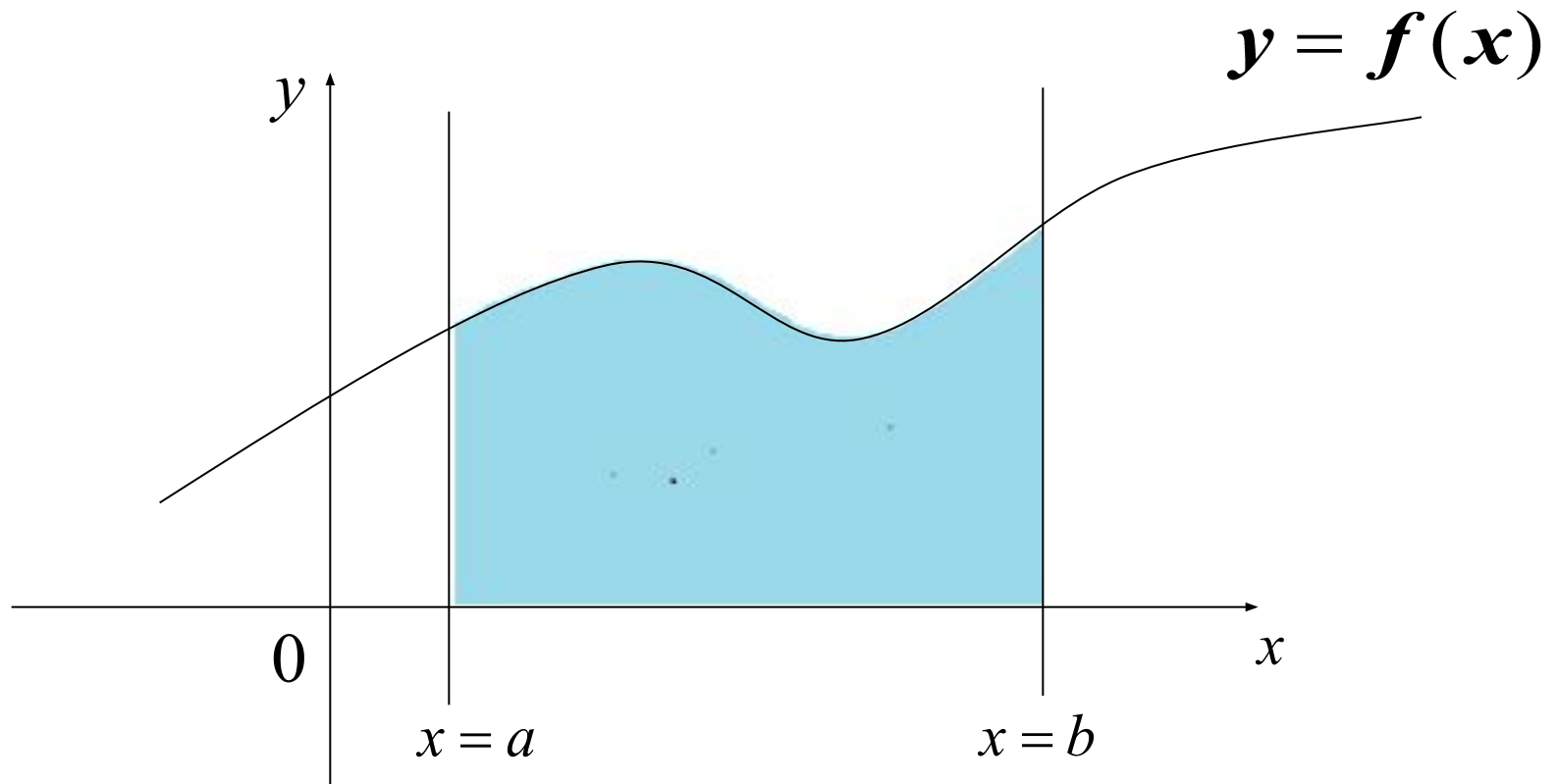




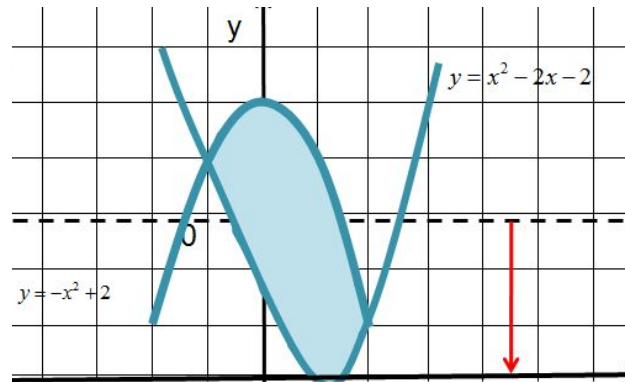
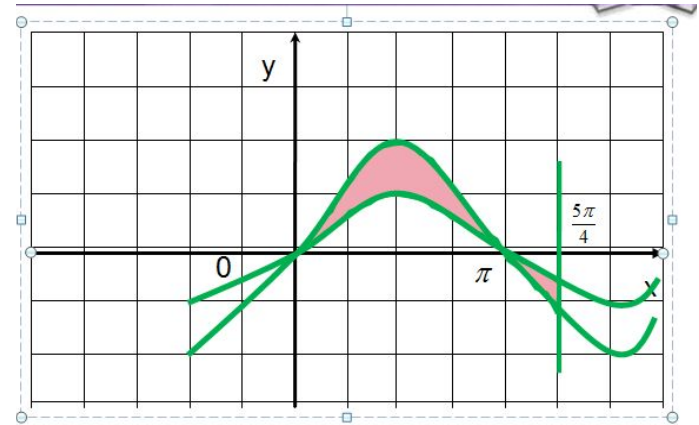
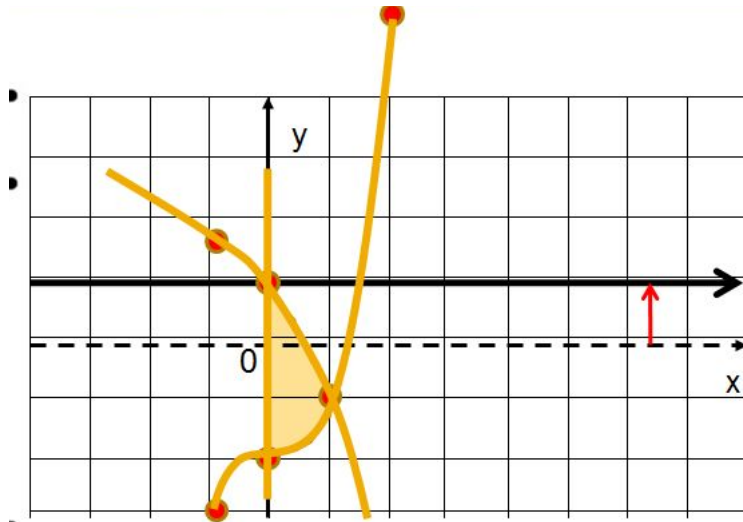
# Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла



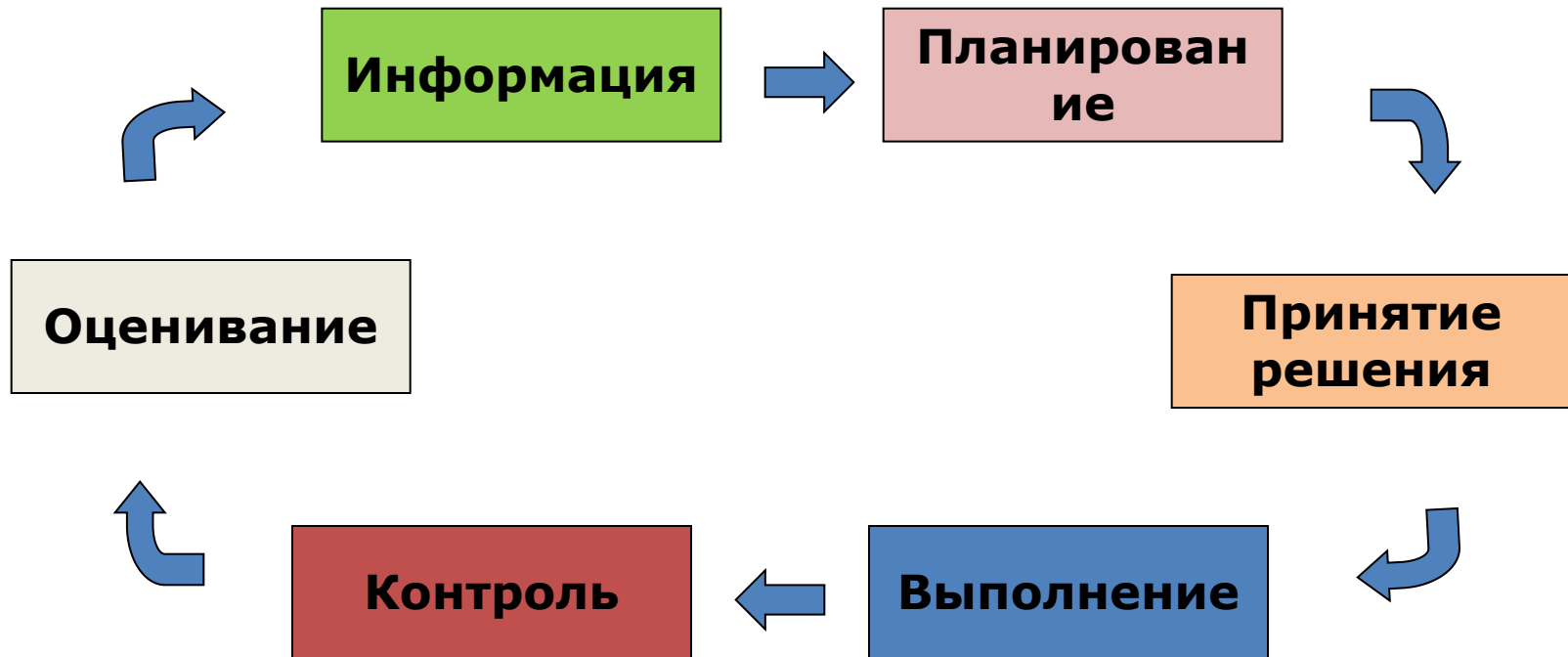
# Криволинейная трапеция



$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$



# Этапы работы





# ЗАДАЧА



Перед зданием школы решено разбить клумбу. Но по форме клумба не должна быть круглой, квадратной или прямоугольной. Она должна содержать в себе прямые и кривые линии. Пусть она будет плоской фигурой, ограниченной линиями

$$Y = 4/X + 2; X = 4; Y = 6.$$

Необходимо ещё подсчитать сколько денег можно получить за вскапывание этой клумбы, если за каждый  $m^2$  выплачивается 50 руб.?

# Цели урока:

- 1) самостоятельно спланировать свою работу;
- 2) научиться составлять алгоритм решения задач на вычисление площади плоских фигур;
- 3) уметь аргументировать свою точку зрения;
- 4) уметь концентрировать внимание на задании;
- 5) научиться применять определённый интеграл при решении практических задач;
- 6) учиться анализировать выполненную работу.

# **Алгоритм последовательности действий при вычислении площади плоской фигуры**

## **(Задание 1):**

- 1. По условию задачи сделать схематический чертеж;**
- 2. Представить искомую функцию, как сумму или разность площадей криволинейных трапеций, выбрать соответствующую формулу;**
- 3. Найти пределы интегрирования (a и b) из условия задачи и чертежа  $t_1$  и  $t_2$ , если они не заданы;**
- 4. Вычислить площадь каждой криволинейной трапеции и площадь искомой фигуры.**

## Задание 2

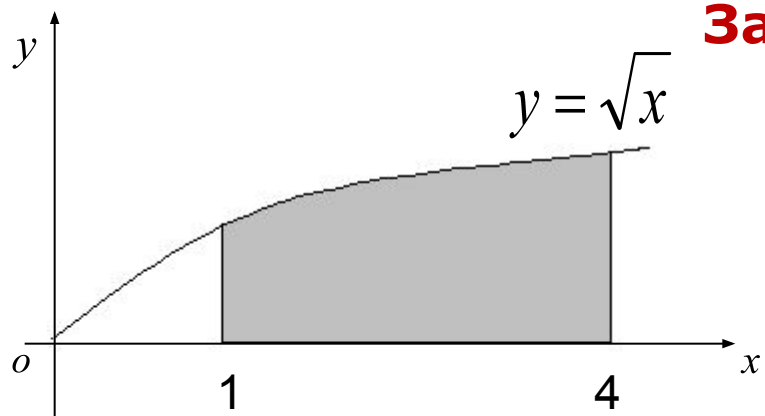


Рис. 1

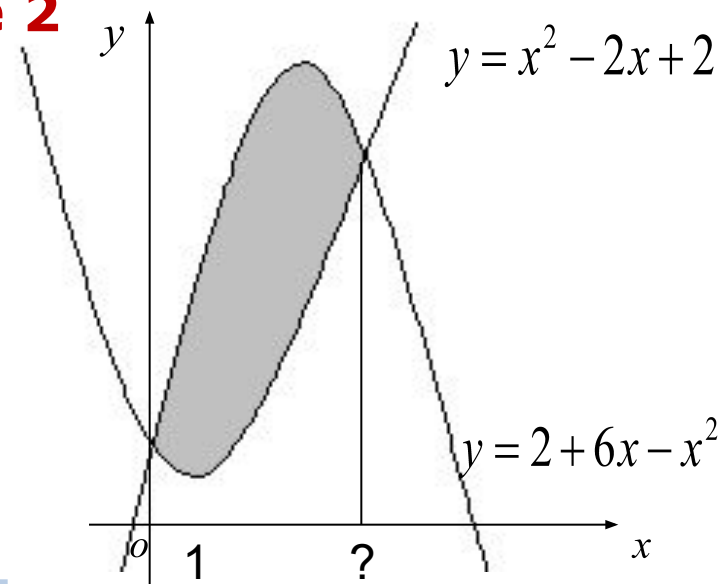


Рис. 2

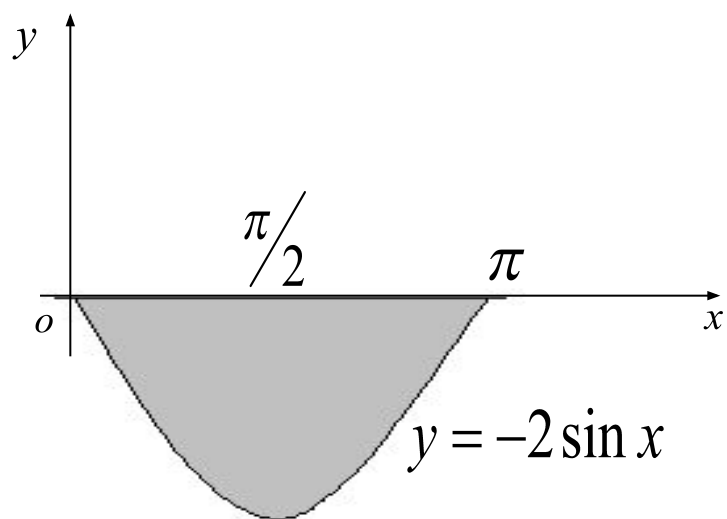


Рис. 3

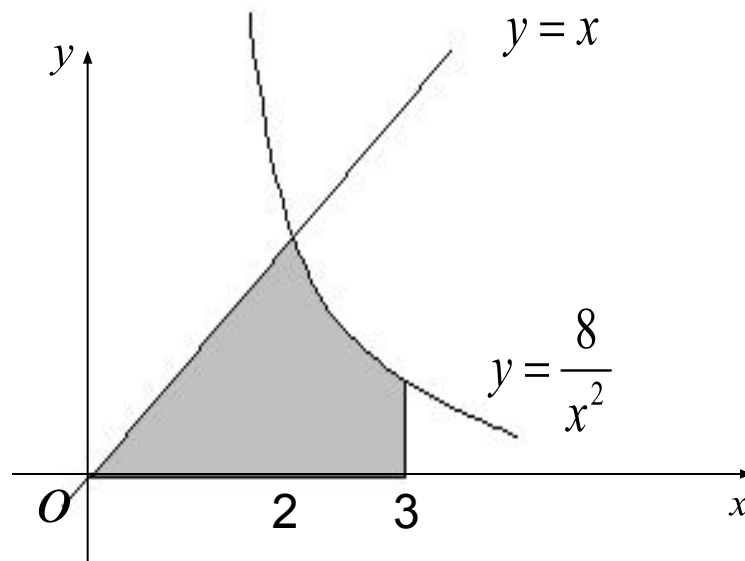


Рис. 4





## **Вычислить площадь земельного участка ограниченного графиком функции:**

1)  $y = 3x^2$  и прямыми  $x=1$ ,  $x=2$ ,  $y=0$ .

2)  $y = 2x$ , прямыми  $x=2$ ,  $x=3$  и отрезком оси  $Ox$  от 2 до 3.

3)  $y = x^3$  прямыми  $x=1$ ,  $x=3$  и отрезком оси  $Ox$  от 1 до 3.

4) Вычислите площадь фигуры, ограниченной  
линиями  $y = -x^2 + 9$ ,  $y=0$ .

• Вычислите площадь фигуры, ограниченной  
линиями:

$$y = x^2 \text{ и } y = -x + 2.$$



## Ответы к задачам (Задание 3)

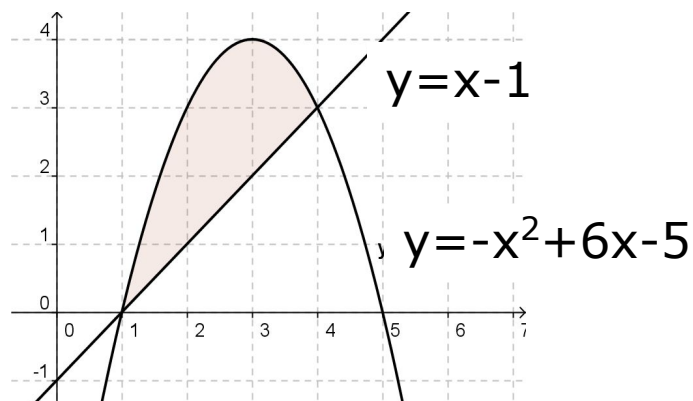
| Вариант 1   | Вариант 2    | Вариант 3    | Вариант 4     | Вариант 5      |
|-------------|--------------|--------------|---------------|----------------|
| 7<br>кв. ед | 5<br>кв. ед. | 4 кв.<br>ед. | 36<br>кв. ед. | 4,5<br>кв. ед. |

## Задание 4

## Вариант I

Проверьте правильность решения, исправьте найденные ошибки.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:  
 $y=x-1$  и  $y=-x^2+6x-5$



Применим формулу  $S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$   
По рисунку  $a = 1$   $b = 4$

$$S = \int_1^4 (-x^2 + 6x - 5 - (x - 1)) dx = \int_1^4 (-x^2 + 5x - 6) dx = \left. \frac{-x^3}{3} + 2,5 \cdot x - 6x \right|_1^4 =$$

$$\frac{-64}{3} + 2,5 \cdot 4 - 24 + \frac{1}{3} - 2,5 + 6 = -21 + 10 - 24 - 2,5 + 6 = -31,5$$

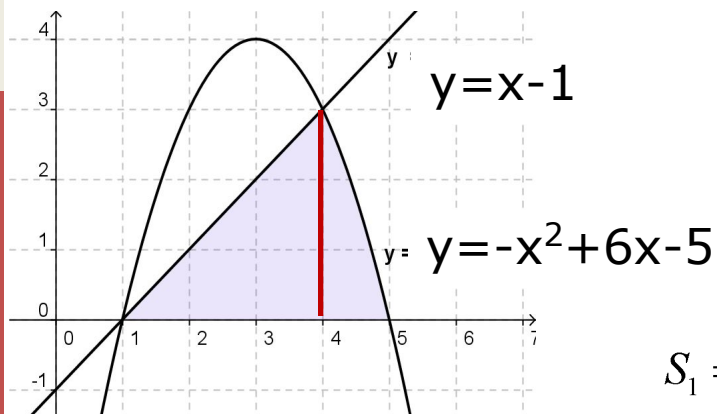
$$S = |-31,5| = 31,5$$

## Задание 4      Вариант II

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y=x-1, y=-x^2+6x-5 \text{ и } y=0$$

**Решение:**



Площадь искомой фигуры равна разности площадей двух криволинейных трапеций, а значит разности двух определённых интегралов на промежутке  $[1;4]$ .

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_1^4 (-x^2 + 6x - 5) dx = \left. \frac{-x^3}{3} + 3x^2 - 5x \right|_1^4 = \\ &= -\frac{64}{3} + 3 \cdot 16 - 20 - \left( \frac{-1}{3} + 3 - 5 \right) = -\frac{64}{3} + 48 - 20 + \frac{1}{3} + 2 = 9 \end{aligned}$$

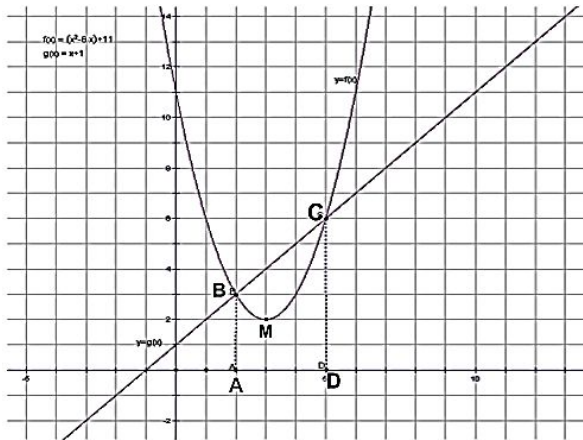
$$\begin{aligned} S_2 &= \int_1^4 (x-1) dx = \left. \frac{x^2}{2} - x \right|_1^4 = \frac{16}{2} - 4 - \frac{1}{2} + 1 = \\ &= 8 - 4 - \frac{1}{2} + 1 = 4,5 \end{aligned}$$

$$S_1 - S_2 = 9 - 2,5 = 6,5$$

## Задание 4 Вариант III

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:  
 $y=x+1$ ,  $y=x^2-6x+11$ .

Найдём пределы интегрирования по графику  $a=1$   $b=5$  .



$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx \quad , \text{ где } f(x) = x^2 - 6x + 11 \quad g(x) = x + 1$$

$$\begin{aligned} S &= \int_1^5 (x^2 - 6x + 11 - x - 1) dx = \left. \frac{x^3}{3} - 5x + 10 \right|_1^5 = \frac{125}{3} - 25 + 10 - \frac{8}{3} + 10 - 10 = \\ &= 117/3 - 15 = 39 - 15 = 24 \end{aligned}$$



# ЗАДАЧА



Перед зданием школы решено разбить клумбу. Но по форме клумба не должна быть круглой, квадратной или прямоугольной. Она должна содержать в себе прямые и кривые линии. Пусть она будет плоской фигурой, ограниченной линиями

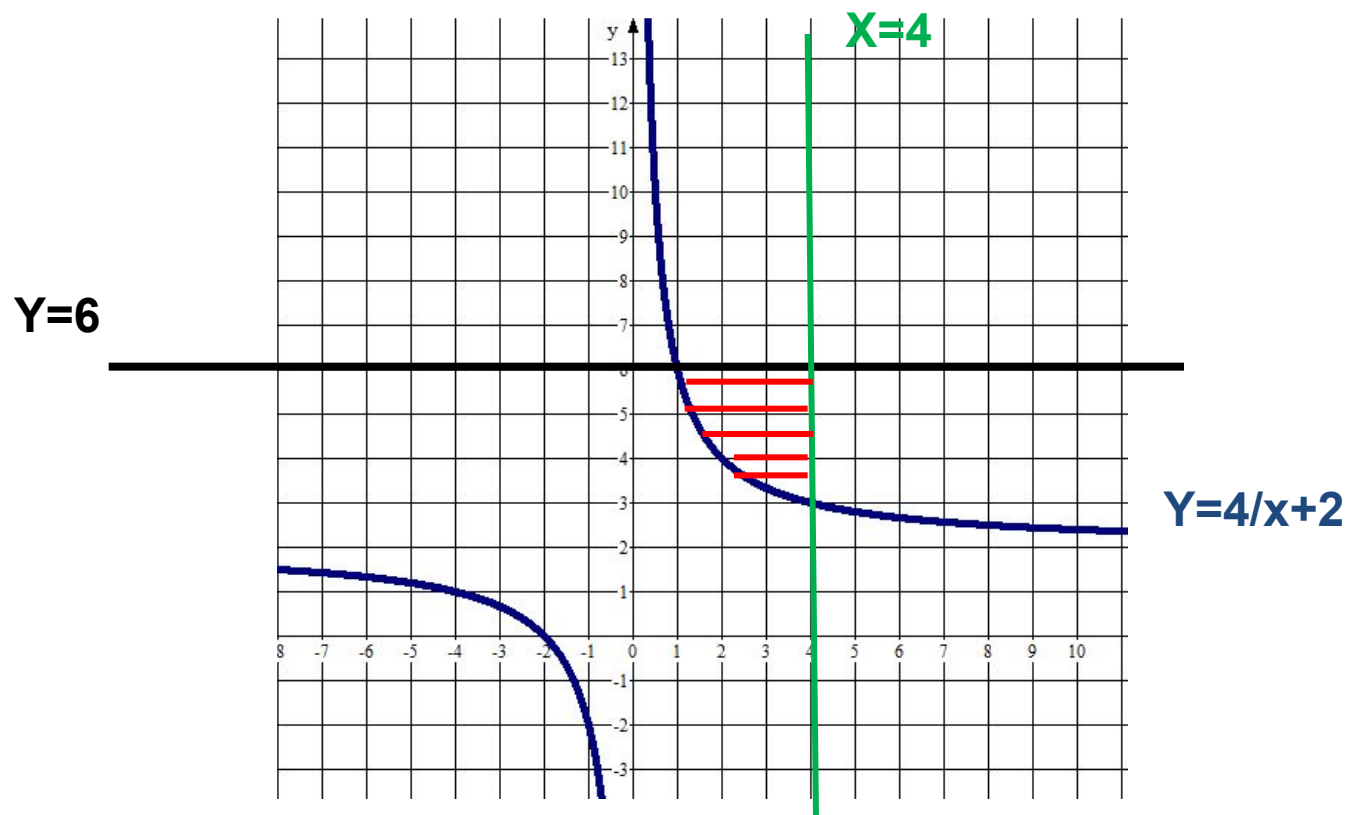
$$Y = 4/X + 2; X = 4; Y = 6.$$

Необходимо ещё подсчитать сколько денег можно получить за вскапывание этой клумбы, если за каждый  $m^2$  выплачивается 50 руб.?

1

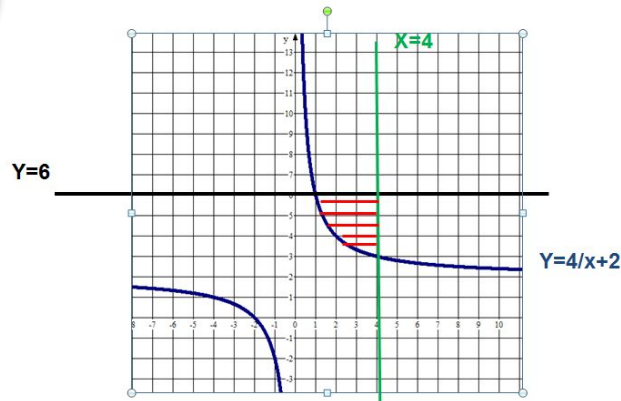
# Эталон решения

Изобразим линии на координатной плоскости и выделим искомую фигуру.



2

# Эталон решения



Вычислим площадь полученной фигуры  
по формуле:

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

где  $f(x) = 6$ , а  $g(x) = 4/x + 2$



# Эталон решения



3

Найдем пределы интегрирования:

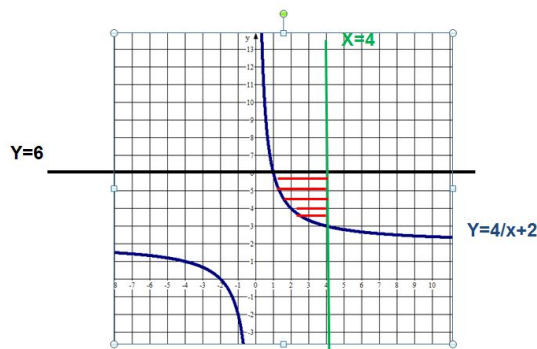
$X = 4$  – по условию, следовательно, абсцисса точки пересечения графиков

$$Y = 4/X + 4 \text{ и } Y = 6.$$

Решим уравнение  $4/X + 2 = 6$ ;

$$4/X = 4$$

$$X = 1.$$



# Эталон решения

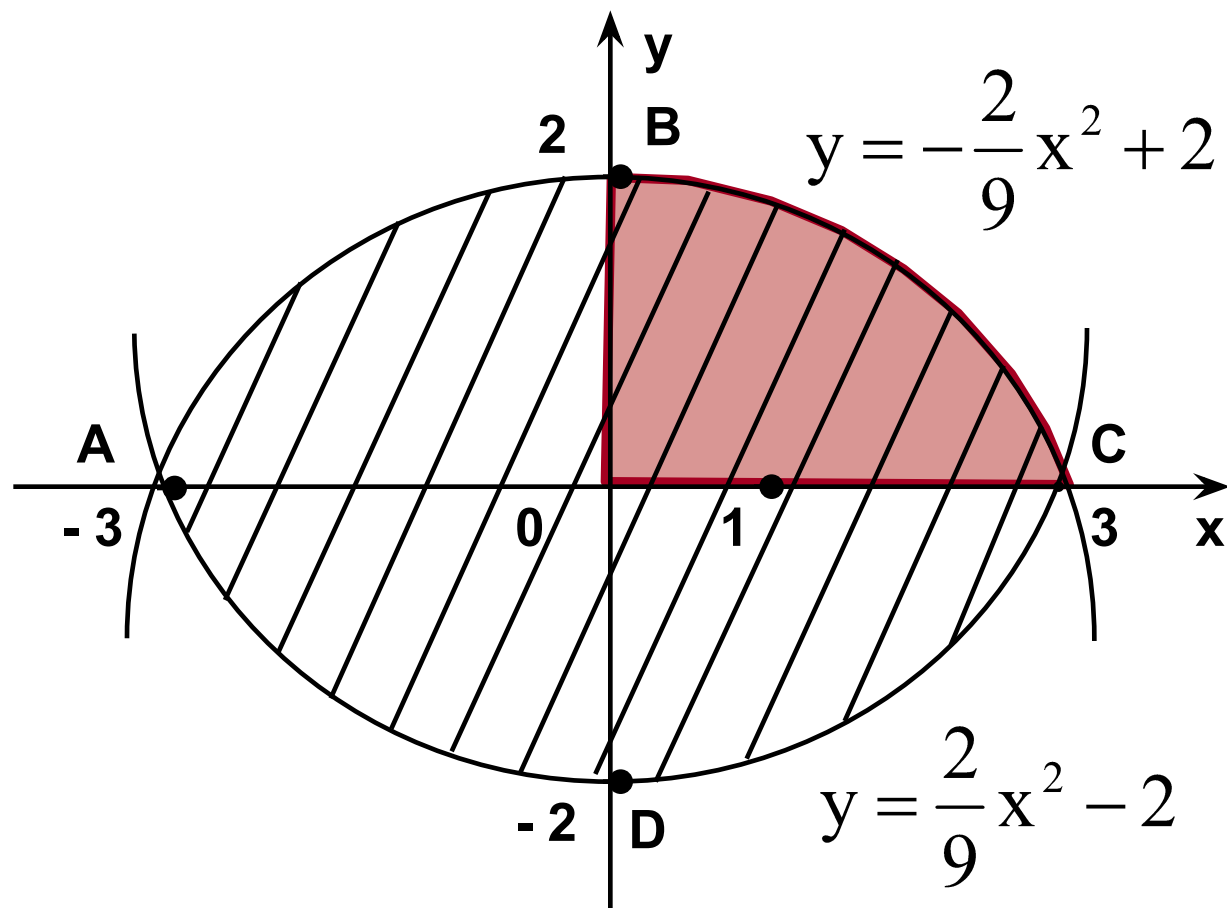


$$\begin{aligned}\int_1^4 \left(6 - \frac{4}{x} - 2\right) dx &= \int_1^4 \left(4 - \frac{4}{x}\right) dx = \\ &= 4x - \ln x \Big|_1^4 = 16 - \ln 4 - 4 + \ln 1 \\ &= 12 - \ln 4 \approx 6,4 (\text{м}^2)\end{aligned}$$

Так как за каждый квадратный метр выплачивается 50 рублей, то заработок составит:

$$6,4 * 50 = 320 \text{ (рублей).}$$

Укажите различные способы вычисления площади фигуры и выберите самый рациональный.



$$S_{ABCD} = 4S_{OBC} = 4 \int_0^3 \left( -\frac{2}{9}x^2 + 2 \right) dx$$



# Цели урока:

- 1) самостоятельно спланировать свою работу;
- 2) научиться составлять алгоритм решения задач на вычисление площади плоских фигур;
- 3) уметь аргументировать свою точку зрения;
- 4) уметь концентрировать внимание на задании;
- 5) научиться применять определённый интеграл при решении конкретных задач;
- 6) учиться анализировать выполненную работу.