Периодическая функция

Подготовила ученица
10 «А» класса
МАОУ «Лицея №3
им. А.С.Пушкина»
Козлова Анастасия

Определение

- **Периоди́ческая фу́нкция** — функция, повторяющая свои значения через какой-то регулярный интервал, то есть не меняющая своего значения при добавлении к аргументу фиксированного ненулевого числа (периода).

Признак

- Функция с областью определения называется периодической, если существует хотя бы одно число , такое, при котором выполняются следующие два условия:
- 1) точки , принадлежат области определения для любого ;
- 2) для каждого x из D имеет место соотношение

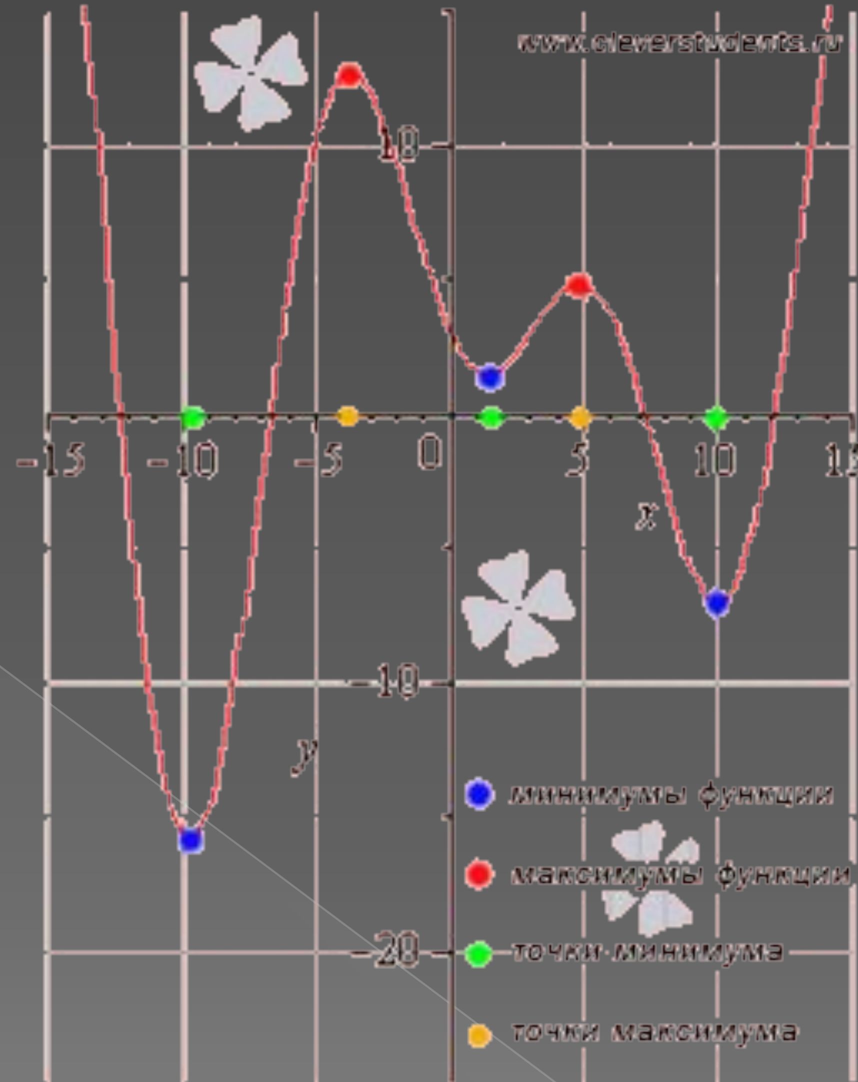
Экстремумы функции

- **Экстре́мум** (лат.*extremum* — крайний) в математике — *максимальное* или *минимальное* значение функции на заданном множестве. Точка, в которой достигается экстремум, называется *точкой экстремума*. Соответственно, если достигается минимум — точка экстремума называется *точкой минимума*, а если максимум — *точкой максимума*. В математическом анализе выделяют также понятие *локальный экстремум (соответственно минимум или максимум)*.

Точку x_0 называют **точкой максимума** функции *y = f(x)*, если для всех x из ее окрестности справедливо неравенство $f(x_0) \geq f(x)$. Значение функции в точке максимума называют **максимумом функции** и обозначают y_{max}.

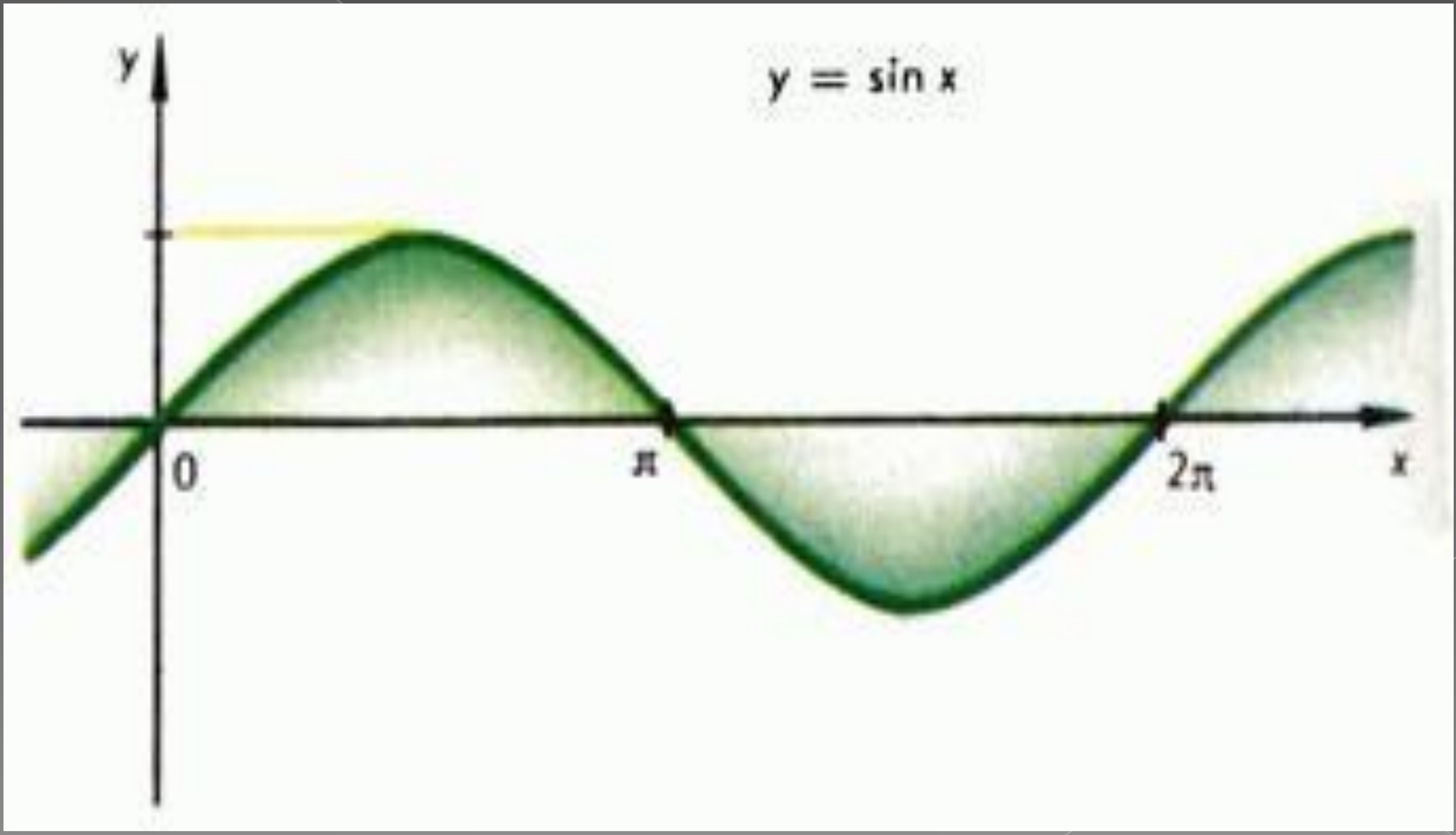
- Точку x_0 называют **точкой минимума** функции *y = f(x)*, если для всех x из ее окрестности справедливо неравенство $f(x_0) \geq f(x)$. Значение функции в точке минимума называют **минимумом функции** и обозначают y_{min}.

  Под окрестностью точки x_0 понимают интервал $(x_0 - e; x_0 + e)$, где e – достаточно малое положительное число.



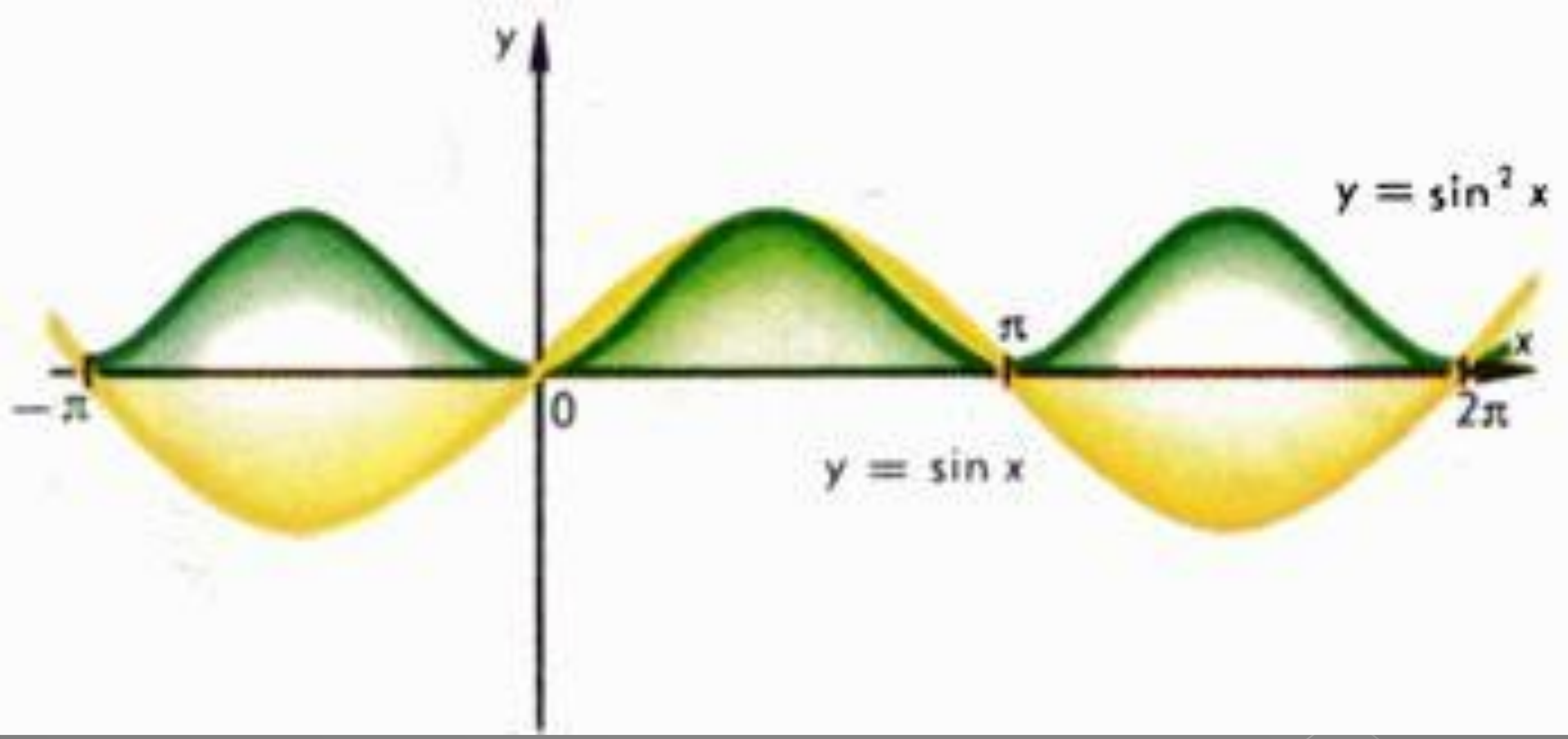
Синим обозначены минимумы функции
Красным обозначены максимумы функции
Зеленым – точки минимума
Желтым – точки максимума

Функция y=sinx – периодическая с периодом



- Заметим, что если число *T* является периодом функции f(x) , то и число *2T* также будет ее периодом, как и *3T* , и *4T* и т.д., т.е. у периодической функции бесконечно много разных периодов. Если среди них имеется наименьший (не равный нулю), то все остальные периоды функции являются кратными этого числа.

Функция $y=sin^2$ x имеет наименьший положительный период, в 2 раза меньший, чем функция $f(x)=sin$ x



Задача

- Пусть φ и ψ - непрерывные периодические функции, определенные при $x \in R$ и $\lim_{x \to \infty} (\varphi(x) - \psi(x)) = 0$. Доказать, что $\varphi(x) \equiv \psi(x)$, $x \in R$.

Решение

- Пусть T_1 - период функции φ, а T_2 - период функции ψ. Предположим, что $\varphi(x) \neq \psi(x)$, т. е. существует такая точка $x = t$, что

  $|\varphi(t) - \psi(t)| = M > 0$. (1)
- Возьмем $\varepsilon > 0$ произвольное, но меньше $M/2$. В силу непрерывности функции φ в точке $x = t$, для указанного $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

  $|\varphi(t) - \varphi(t + h)| < \varepsilon$, (2)

  как только $|h| < \delta$.

- Согласно условию, существует такое натуральное число k, что $|\varphi(t + kT_2) - \psi(t + kT_2)| < \varepsilon$, а тогда имеем

  $$|\varphi(t + mkT_2) - \psi(t + mkT_2)| < \varepsilon. \quad (3)$$

- Из неравенств (2), (3) и периодичности функций φ и ψ следует неравенство

  $$|\varphi(t) - \psi(t)| = |\varphi(t) - \varphi(t + mkT_2) + \varphi(t + mkT_2) - \psi(t + mkT_2)| \le |\varphi(t) - \varphi(t + mkT_2)| + |\varphi(t + mkT_2) - \psi(t + mkT_2)| =$$

  $$= |\varphi(t) - \varphi(t + mkT_2 - nT_1)| + |\varphi(t + mkT_2) - \psi(t + mkT_2)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon, \quad (4)$$

если только

$$|mkT_2 - nT_1| < \delta. \quad (5)$$

- Но мы выбрали такое число ε, что $2\varepsilon < M$. Таким образом, неравенство (4) противоречит равенству (1). Источник противоречия - в предложении существования точки $x = t$, в которой

  $$|\varphi(t) - \psi(t)| = M > 0.$$

- Следовательно, такой точки не существует, т. е.

$\varphi(x) \equiv \psi(x)$, $-\infty < x < +\infty$.