Переход к новому основанию логарифма

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

mathvideourok.moy.su

Теорема: Если а, в, с –положительные числа и

а ≠1 , с ≠ 1, то существует формула перехода к новому основанию

$$\log_a в = \frac{\log_c в}{\log_c a}$$

Например :

$$1)\ \log_3 2 = \frac{\log_5 2}{\log_5 3}$$

$$2)\ \log_7 4 = \frac{\lg 4}{\lg 7}$$

$$3)\ \log_5 8 = \frac{\log_8 8}{\log_8 5} = \frac{1}{\log_8 5}$$

Следствие 1. Если а и в положительные а ≠1 , в ≠ 1, то

$$\log_a в = \frac{1}{\log_в a}$$

$Например:$

$$1)\ \log_2 3 = \frac{1}{\log_3 2}$$

$$2)\ \lg 5 = \frac{1}{\log_5 10}$$

$$3)\ \frac{1}{\log_5 4} = \log_4 5$$

Следствие 2. Если а и в положительные а ≠1 , r ≠1, то

$$\log_{a^r} в^r = \log_a в$$

Например:

$$1)\log_2 3 = \log_4 9 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{3}$$

$$2)\log_{36} 64 = \log_6 8$$

$$3)\log_{\sqrt{5}} \sqrt{2} = \log_5 2$$

Решение задач

1) *Дано*: $\lg 3 = \mathrm{a}, \lg 5 = \textit{в}$

Вычислить: $\log_2 15$

Решение:

$$\log_2 15 = \frac{\lg 15}{\lg 2} = \frac{\lg 3 + \lg 5}{\lg \frac{10}{5}} = \frac{\lg 3 + \lg 5}{\lg 10 - \lg 5} =$$

$$= \frac{a + в}{1 - в}$$

2) Решите уравнение:

$$\log_2 x + \log_4 x = \log_{\sqrt[3]{4}} 3 \qquad ОДЗ: x > 0$$

Перейдем к одному основанию 4

$$\frac{\log_4 x}{\log_4 2} + \log_4 x = \frac{\log_4 3}{\log_4 4^{\frac{1}{3}}}$$

$$\frac{\log_4 x}{\frac{1}{2}} + \log_4 x = \frac{\log_4 3}{\frac{1}{3}}$$

$$2\log_4 x + \log_4 x = 3\log_4 3$$

$$3\log_4 x = 3\log_4 3$$

$$3\log_4 x = 3\log_4 3 / :3$$

$$\log_4 x = \log_4 3$$

$$x = 3$$

$$Так\ как\ y = \log_4 к\ монотонна\ на\ D(y) = (0; +\infty)$$

$$Ответ: 3$$

3) Решите неравенство:

$$2\log_5 x - \log_x 125 < 1 \qquad ОДЗ: x > 0, x \neq 1$$

$$2\log_5 x - \frac{\log_5 125}{\log_5 x} < 1$$

$$2\log_5 x - \frac{3}{\log_5 x} < 1$$

Пусть $\log_5 x = m$

$$2m - \frac{3}{m} < 1$$

$$2m - \frac{3}{m} - 1 < 0 \qquad \frac{2m^2 - m - 3}{m} < 0$$

$$\frac{2m^2 - m - 3}{m} < 0$$

Решим неравенство методом интервала

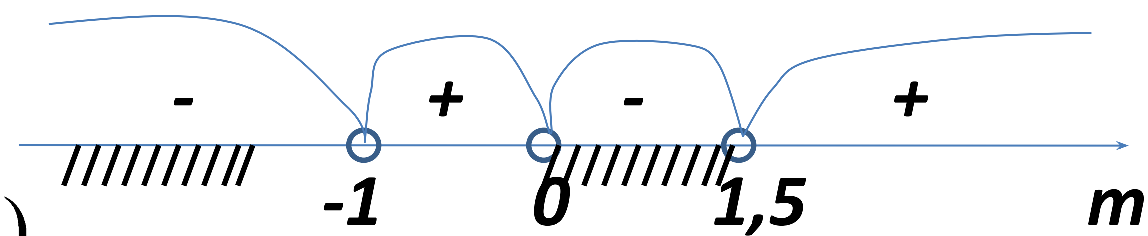
Рассмотрим функцию $y = \dfrac{2m^2 - m - 3}{m}$

$-$*непрерывная на* $D(y) = R,$ *кроме* 0 *функция*

Ее нули $: 2m^2 - m - 3 = 0$

$m_1 = 1,5 \quad m_2 = -1$

Данные точки разбивают область определения на промежутки в каждом из которых функция определена и непрерывна и не обращается в нуль, а значит сохраняет свой знак согласно свойству непрерывности функции.



$$\frac{2(m-1,5)(m+1)}{m}<0$$

$$m\in(-\infty;-1)\cup(0;1,5)$$

$y(-2)<0 \qquad y(1)<0$

$y(-0,5)>0 \qquad y(3)>0$

$$m \in (-\infty; -1) \cup (0; 1,5)$$

1) $m < -1$

$$\log_5 x < -1$$

$$\log_5 x < \log_5 \frac{1}{5}$$

$5 > 1, \mathrm{z} = \log_5 \kappa$

возрастает на

$$D(\mathrm{z}) = (0; +\infty)$$

$$\begin{cases} x > 0, x \neq 1 \\ x < \dfrac{1}{5} \end{cases} \qquad x \in \left(0; \frac{1}{5}\right)$$

2) $0 < m < 1,5$

$$0 < \log_5 x < 1,5$$

$$\log_5 1 < \log_5 x < \log_5 \sqrt{125}$$

$5 > 1, \mathrm{z} = \log_5 \kappa$

возрастает на

$$D(\mathrm{z}) = (0; +\infty)$$

$$\begin{cases} x > 0, x \neq 1 \\ 1 < x < \sqrt{125} \end{cases}$$

$$x \in \left(1; \sqrt{125}\right)$$

Объединяя полученные решения получаем

Ответ : $\left(0; \dfrac{1}{5}\right) \cup \left(1; \sqrt{125}\right)$