Презентация по Математическому Анализу

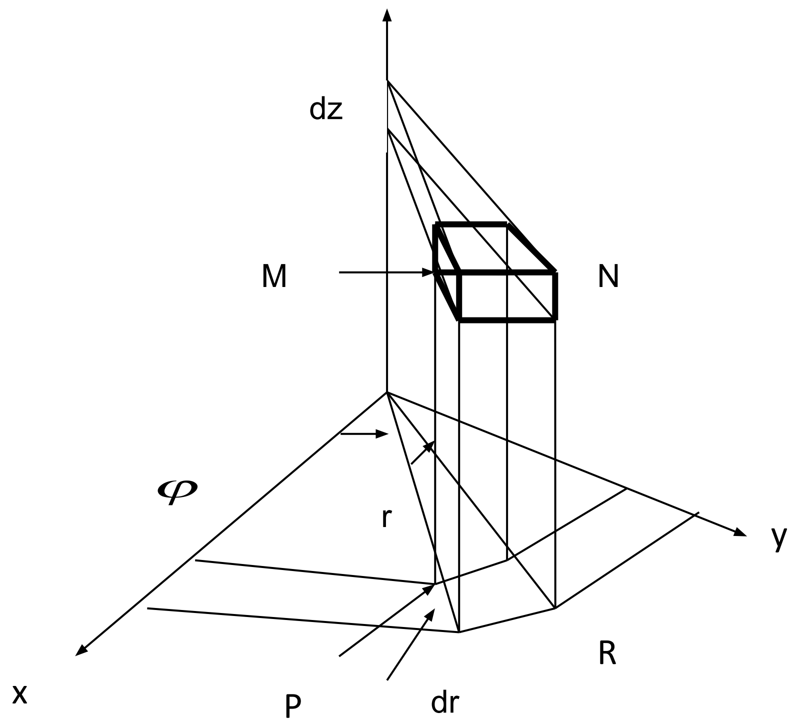
Семинар 32

Вычисление тройных интегралов.

Цилиндрические координаты

Отнесем область ***T*** к системе цилиндрических координат (r, φ, z), в которой положение точки ***M*** в пространстве определяется полярными координатами (r, φ) ее проекции ***P*** на плоскости ***OXY*** и ее аппликатой ***z***.

Выберем взаимное расположение осей координат как указано на следующем рисунке



Связь между декартовыми и цилиндрическими координатами точки следующая:

$$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, z = z \qquad \textbf{(*)}$$

Преобразование интеграла $\iiint\limits_T f(x,y,z)dV$ к цилиндрическим координатам производится совершенно аналогично преобразованию двойного интеграла к полярным координатам.

Для этого нужно в ***f(x, y, z)*** переменные ***x, y, z*** заменить по формулам **(*)**.

Элемент объема положить равным $dV = rdrd\varphi dz$ и вычислить интеграл по T^* области, построенной во вспомогательной системе координат $O_1 r\varphi z$.

<u>Получаем:</u>

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dV = \iiint\limits_{T^*} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)rdrd\varphi dz$$

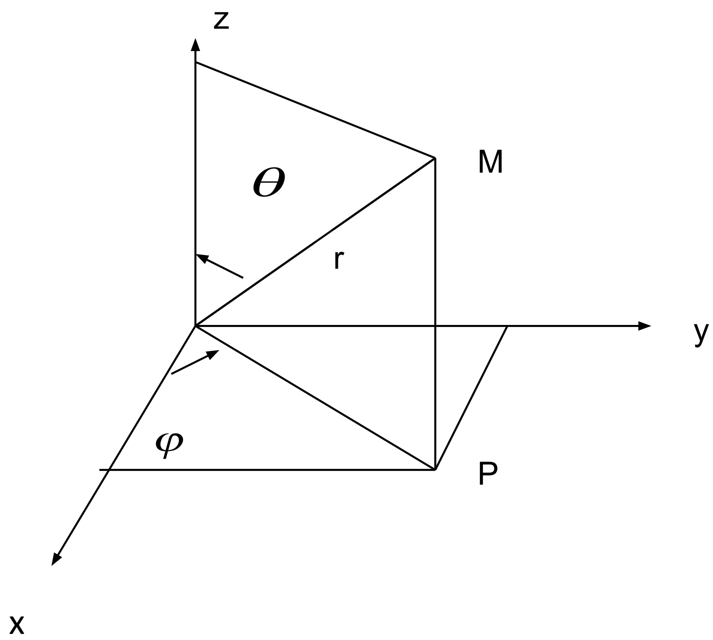
Если рассмотреть в качестве области интегрирования внутреннюю часть прямого цилиндра $r \le R, 0 \le z \le h$, то все пределы интегрирования постоянны

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R rdr \int_0^h f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)dz$$

Сферические координаты

Отнесем область интегрирования ***T*** к сферическим координатам (r,φ,θ).

В этой системе координат положение точки ***M*** пространства определяется ее расстоянием ***r*** от начала координат (длина радиус-вектора точки), углом θ между радиус-вектором точки и осью ***OZ*** и углом φ между проекцией радиус-вектора точки на плоскость ***OXY*** и осью ***OX***.



Установим связь между декартовыми и сферическими координатами.

Из рисунка имеем:

$$z = MP = r\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = r\cos\theta; OP = r\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = r\sin\theta; x = OP\cos\varphi; y = OP\sin\varphi$$

Окончательно:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi; y = r\sin\theta\sin\varphi; z = r\cos\varphi$$

Для элемента объема получаем выражение

$$dV = r^2 \sin\theta \cdot dz \cdot d\varphi \cdot d\theta \qquad \text{(**)}$$

Заменив в тройном интеграле ***x, y, z*** по формулам **(*)** и взяв элемент объема равным **(**)**, получаем

$$\iiint\limits_T f(x, y, z)dV = \iiint f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi)r^2 \sin\theta \cdot dr \cdot d\varphi \cdot d\theta$$

Примеры с решениями:

1. Вычислить $I = \iiint\limits_T x^2\,dxdydz$, если ***T*** – шар $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$

<u>Решение</u>. Перейдем к сферическим координатам. В области ***T*** координаты ρ, φ, θ изменяются так:

$$0 \le \rho \le R, 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le \theta \le \pi$$

Следовательно,

$$I = \iiint\limits_T x^2\,dxdydz = \iiint\limits_T \rho^4 \sin^3\theta \cos^2\varphi\, d\rho d\varphi d\theta = \int_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi d\varphi \int_0^{R} \rho^4 d\rho =$$

$$\frac{R^5}{5\cdot 2}\int_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta \left[\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi R^5}{5}\int_0^{\pi} (\cos^2\theta - 1) d(\cos\theta) = \frac{4\pi R^5}{15}$$

2. Вычислить $I = \iiint\limits_T z\sqrt{x^2 + y^2}\,dxdydz$, если область ***T*** ограничена цилиндром

$x^2 + y^2 = 2x$ и плоскостями ***y=0, z=0, z=a.***

Решение Перейдем к цилиндрическим координатам.

Уравнение цилиндра в этих координатах примет вид:

$$\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = 2\rho\cos\varphi \Rightarrow \rho = 2\cos\varphi$$

В области ***T*** координаты ρ, φ, θ изменяются так:

$$0 \le \rho \le 2\cos\varphi, 0 \le \varphi \le \pi/2, 0 \le z \le a$$

Следовательно,

$$I = \iiint\limits_T z\sqrt{x^2 + y^2}\,dxdydz \iiint \rho^2 d\rho d\varphi dz = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} \rho^2 d\rho z \int\limits_0^a zdz = \frac{1}{2}a^2 \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} \rho^2 d\rho =$$

$$\frac{4}{3}a^2 \int\limits_0^{\pi/2} \cos^3\varphi d\varphi = \frac{4}{3}a^2 \int\limits_0^{\pi/2} (1 - \sin^2\varphi) d(\sin\varphi) = \frac{4}{3}a^2 \left[\sin\varphi - \frac{1}{3}\sin^3\varphi\right]_0^{\pi/2} = \frac{8}{9}a^2$$

3. Вычислить $I = \iiint\limits_T (x^2 + y^2)dxdydz$, если **T** – верхняя половина шара $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$

Решение. Перейдем к сферическим координатам. В области **T** координаты ρ, φ, θ изменяются так:

$$0 \le \rho \le R, 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le \theta \le \pi/2$$

Следовательно,

$$I = \iiint\limits_T (x^2 + y^2)dxdydz = \iiint\limits_T \rho^4 \sin^3\theta d\rho d\varphi d\theta = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^3\theta d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \rho^4 d\rho =$$

$$= \frac{2\pi R^5}{5} \int\limits_0^{\pi/2} (\cos^2\theta - 1)d(\cos\theta) = \frac{2\pi R^5}{15}\left[\frac{1}{3}\cos^3\theta - \cos\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{4}{15}\pi R^5$$

Примеры для самостоятельного решения:

1. Вычислить $I = \iiint\limits_T x \cdot y \cdot z dxdydz$, если область ***T*** ограничена сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и плоскостями ***x=0, y=0, z=0***.
2. Вычислить $I = \iiint\limits_T (x^2 + y + z^2) dxdydz$, если область ***T*** ограничена цилиндром $x^2 + z^2 = 1$ и плоскостями ***y=0, y=1***.
3. Вычислить $I = \iiint\limits_T dxdydz$, если ***T*** – шар $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$
4. Вычислить $I = \iiint\limits_T \sqrt{1 + (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dxdydz$, если ***T*** – шар $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$
5. Вычислить $I = \iiint\limits_T (x^2 + y^2) dxdydz$, где область ***T*** ограничена поверхностями

$$z = (x^2 + y^2)/2, z = 2$$