

МЕТОД ПОИСКА ГАРМОНИИ



Постановка задачи поиска глобального экстремума функции многих переменных

Дана целевая функция $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определенная на множестве допустимых решений $D \subseteq R^n$.

Требуется найти глобальный условный минимум функции $f(x)$ на множестве D , т.е. такую точку $x^* \in D$, что

$$f(x^*) = \min_{x \in D} f(x), \quad (1)$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $D = \{x \mid x_i \in [a_i, b_i], i = 1, 2, \dots, n\}$.

Задача поиска максимума целевой функции $f(x)$ сводится к задаче поиска минимума путем замены знака перед функцией на противоположный:

$$f(x^*) = \max_{x \in D} f(x) = -\min_{x \in D} [-f(x)]. \quad (2)$$

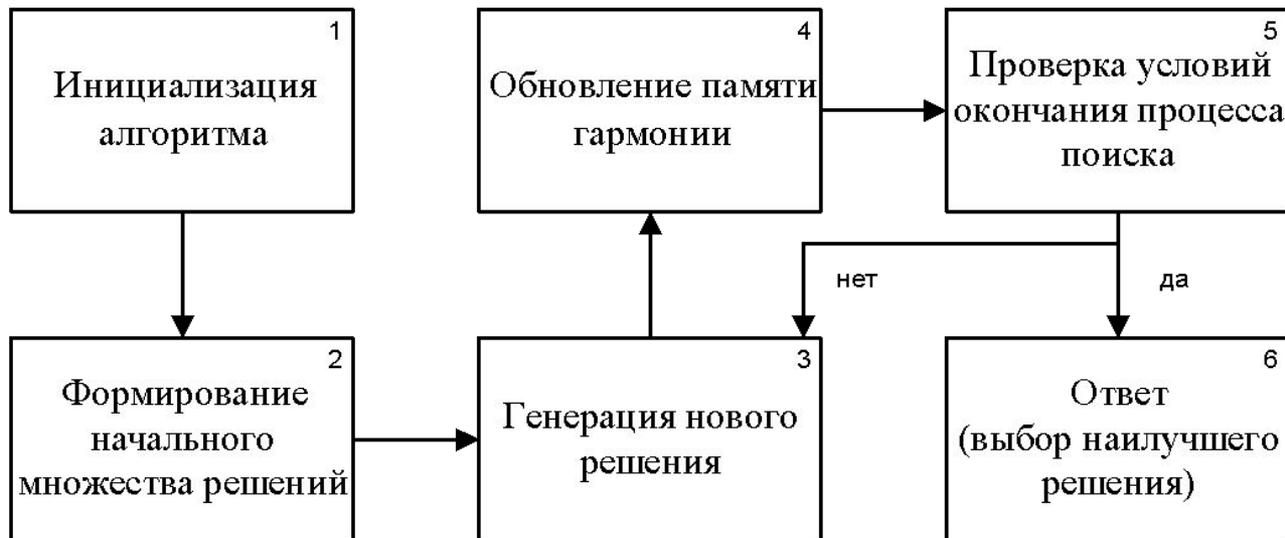
СТРАТЕГИЯ ПОИСКА РЕШЕНИЯ

Метод имитирует процесс импровизации музыканта-исполнителя. В процессе исполнения музыкант подбирает нужную ноту с целью достижения наилучшей гармонии. В процессе поиска каждое решение из множества допустимых порождает значение функции с целью достижения глобального экстремума. При этом используются идеи метода имитации отжига, метода частиц в стае, стохастического градиента.

На множестве D генерируется определенное количество решений. Для каждого решения подсчитывается значение целевой функции. Все координаты решения и соответствующее значение функции помещаются в матрицу (по строкам), называемую памятью гармонии (*НМ* – Harmony Memory). Среди всех решений, имеющих в памяти, выбирается наихудшее. Далее генерируется новое решение, которое затем сравнивается с наихудшим в памяти. Если оно лучше по величине целевой функции, то это решение помещается в память вместо наихудшего. После описанной замены в памяти заново находится наихудшее решение для последующего сравнения. Процесс поиска завершается по достижении максимального числа итераций.

Координаты нового решения генерируются независимо друг от друга. Для получения значения очередной координаты x_i с некоторой вероятностью выбирается соответствующая координата решения, выбранного случайным образом из памяти или выбирается случайное значение на промежутке $[a_i, b_i]$. Если значение координаты взято из памяти, то с заданной вероятностью оно корректируется с помощью небольшого приращения.

Если корректировка не произошла, то далее используется нескорректированное значение. Описанная процедура генерирования нового решения позволяет выйти из области притяжения локального экстремума. Она связана с поиском новой гармонии и называется процессом импровизации.



Общая схема алгоритма метода поиска гармонии

Алгоритм

Шаг 1. Задать параметры метода:

hms – размер памяти гармонии;

$hmcr$ – вероятность выбора значений из памяти гармонии;

par – вероятность выбора соседнего значения;

fw – вектор максимального изменения приращения;

K – максимальное число итераций;

Положить число итераций $k = 0$.

Шаг 2. На множестве допустимых решений случайным образом генерировать hms решений x^1, \dots, x^{hms} . Найти соответствующие значения целевой функции $f(x^1), \dots, f(x^{hms})$. Сохранить их в памяти гармонии (HM):

$$HM = \left(\begin{array}{ccc|c} x_1^1 & \boxtimes & x_n^1 & f(x^1) \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ x_1^{hms} & \boxtimes & x_n^{hms} & f(x^{hms}) \end{array} \right).$$

Найти наихудшее решение в памяти x^{worst} .

Шаг 3. Генерировать новый вектор x^{new} . Для всех $i = 1, \dots, n$:

Шаг 3.1. Получить значения x'_i следующим образом:

- с вероятностью $hmcr$ выбрать элемент из памяти HM с номером $\text{int}[u(0,1) \cdot hms] + 1$: $x'_i = x_i^{\text{int}[u(0,1) \cdot hms] + 1}$, где $u(0,1)$ – равномерно распределенное число от 0 до 1; $\text{int}[\cdot]$ – операция нахождения целого числа;
- с вероятностью $1 - hmcr$ выполнить:
выбрать значение внутри промежутка $[a_i, b_i]$: $x'_i \in [a_i, b_i]$.

Шаг 3.2. Если значение x'_i выбрано из памяти, то

- с вероятностью par найти:

$$x_i^{new} = x'_i + fw_i \cdot u(-1, 1),$$

где $u(-1, 1)$ – равномерно распределенное число на $[-1, 1]$;

- с вероятностью $1 - par$ положить

$$x_i^{new} = x'_i.$$

Шаг 4. Если новое решение x^{new} лучше наихудшего решения x^{worst} в памяти, то заменить x^{worst} на x^{new} . Иначе – не заменять.

Шаг 5. Проверка условий окончаний процесса поиска:

- если $k < K$, положить $k = k + 1$ и перейти к шагу 3;
- если $k = K$, процесс завершить, найти наилучшее решение x^{best} в памяти, положить $x^* = x^{best}$.

Таблица 1. Подбор параметров метода поиска гармонии для квадратичной функции

Параметры метода				\bar{f}	$f_{\text{наим}}$	$\bar{\sigma}_f$
K	hms	$hmcr$	par			
10000	10	0,4	0,85	0,002943514	1,93179E-05	0,002702464
1000	10	0,4	0,85	0,027247111	3,43551E-05	0,026084377
100000	10	0,4	0,85	0,000274696	3,27650E-06	0,000247988
10000	3	0,4	0,85	0,002932090	1,49061E-05	0,002818456
1000	3	0,4	0,85	0,025831668	0,000347885	0,029662467
10000	50	0,4	0,85	0,002293080	8,65570E-05	0,002299195
10000	10	0,1	0,85	0,002760062	2,65557E-05	0,003069772
1000	10	0,1	0,85	0,026935300	0,000112797	0,021595678
10000	10	0,95	0,85	0,002932009	1,86389E-05	0,002900334
1000	10	0,4	0,4	0,026552048	0,000246770	0,026921385
1000	10	0,4	0,1	0,026930606	0,000128002	0,027611901
1000	10	0,4	0,99	0,028018098	0,000138044	0,027625406

Таблица 2. Подбор параметров метода поиска гармонии для функции Растригина

Параметры метода				\bar{f}	$f_{\text{наим}}$	$\bar{\sigma}_f$
K	hms	$hmcr$	par			
10000	10	0,4	0,85	0,002563379	8,36130E-05	0,002466247
1000	10	0,4	0,85	0,026888890	3,77970E-05	0,025179228
100000	10	0,4	0,85	0,000269817	9,30278E-07	0,000239757
10000	3	0,4	0,85	0,002535393	1,13471E-05	0,002612085
1000	3	0,4	0,85	0,028119705	0,000247494	0,024635476
10000	50	0,4	0,85	0,002458867	1,04012E-05	0,002716362
10000	10	0,1	0,85	0,003484080	1,66764E-06	0,003259575
1000	10	0,1	0,85	0,034185768	0,001311550	0,041471775
10000	10	0,95	0,85	0,002421522	7,95737E-05	0,002946608
1000	10	0,4	0,4	0,030282838	0,000587158	0,034647381
1000	10	0,4	0,1	0,055008649	0,000456842	0,056075622
1000	10	0,4	0,99	0,044622224	0,000895756	0,044030401

Таблица 3. Подбор параметров метода поиска гармонии для функции Розенброка

Параметры метода				\bar{f}	$f_{\text{наим}}$	$\bar{\sigma}_f$
K	hms	$hmcr$	par			
10000	10	0,4	0,85	0,00434964	1,21219E-05	0,004239015
1000	10	0,4	0,85	0,047929646	0,001088067	0,042397477
100000	10	0,4	0,85	0,000458685	1,90596E-06	0,000444053
10000	3	0,4	0,85	0,004250418	3,70535E-05	0,004095237
1000	3	0,4	0,85	0,044996609	0,000733928	0,045716875
10000	50	0,4	0,85	0,005336208	1,56097E-05	0,005604512
10000	10	0,1	0,85	0,004543177	6,89751E-05	0,004903563
1000	10	0,1	0,85	0,045137520	0,000263366	0,042779171
10000	10	0,95	0,85	0,002430700	1,51412E-05	0,002760214
1000	10	0,4	0,4	0,054965083	3,86282E-06	0,054861458
1000	10	0,4	0,1	0,046451330	1,31411E-06	0,051964165
1000	10	0,4	0,99	0,059364281	0,000266510	0,053457727