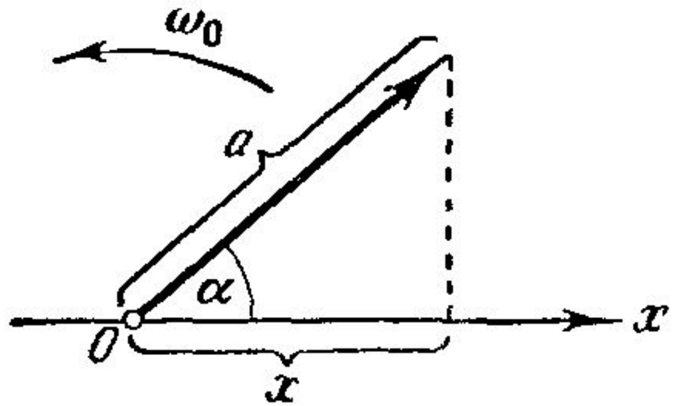
ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ВЫСОКИХ ТЕХНОЛОГИЙ (ЧАСТЬ 3)

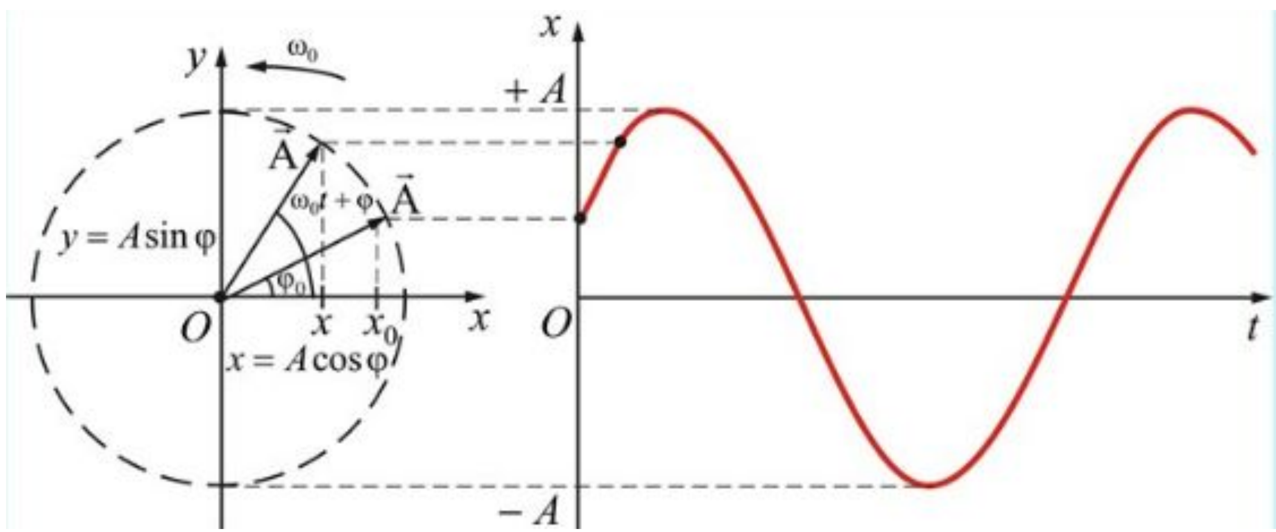
(Колебания и волны)

- Графическое изображение гармонических колебаний
- Сложения колебаний одного направления
- Биения
  - Частота биений
  - Амплитуда биений
- Сложения взаимно перпендикулярных колебаний
- Фигуры Лиссажу

Векторная диаграмма



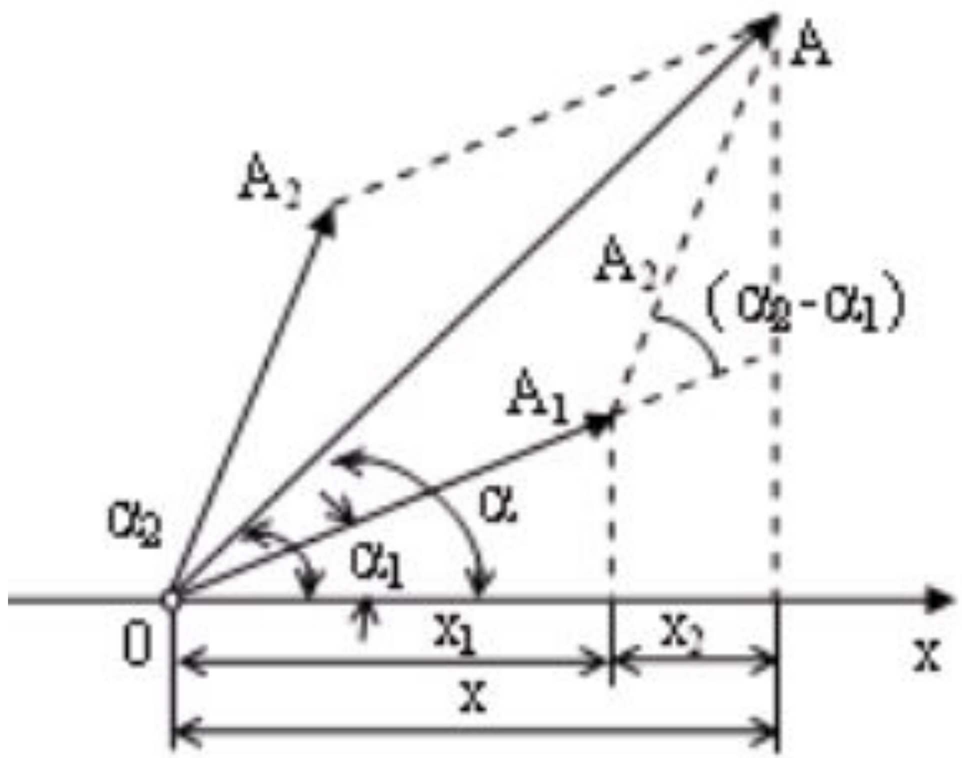
$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \alpha)$$



Сложение гармонических колебаний.

- Под сложением колебаний понимают нахождение закона результирующих колебаний системы в тех случаях, когда система одновременно участвует в нескольких колебательных процессах.
- Различают два предельных случая:
  - Сложение колебаний одинакового направления
  - Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

Сложение колебаний одного направления



$$x_1(t) = A_1\cos(\omega_0 t + \alpha_1)$$
$$x_2(t) = A_2\cos(\omega_0 t + \alpha_2)$$

$$x = x_1 + x_2$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos[\pi - (\alpha_2 - \alpha_1)] =$$
$$= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\alpha_2 - \alpha_1)$$

$$\tan\alpha = \frac{A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2}{A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2}$$

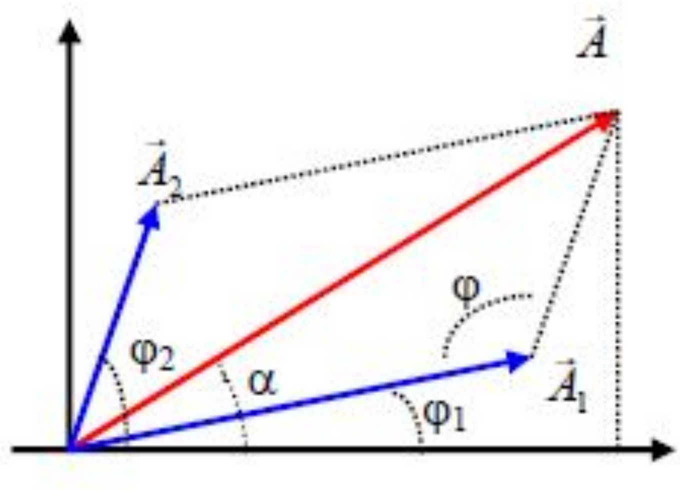
Сложение колебаний одного направления

- Сумма двух гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты есть гармоническое колебание в том же направлении и с той же частотой, что и складываемые колебаний.
- Амплитуда результирующего колебаний зависит от разности фаз складываемых колебаний:
  - $\alpha_2 - \alpha_1 = \pm 2m\pi$, где (m=0,1,2…), тогда $A = A_1 + A_2$
  - $\alpha_2 - \alpha_1 = \pm (2m+1)\pi$, где (m=0,1,2…), тогда $A = |A_1 - A_2|$
- Если $\alpha_2 - \alpha_1 = \pm 2m\pi$, то говорят, что складываемые колебания синфазны (находятся в одной фазе),

  а при $\alpha_2 - \alpha_1 = \pm (2m+1)\pi$, складываемые колебания находятся в противофазе.

Биения

- Рассмотрим колебания одного направления, но частоты которых ω_1 и ω_2 различны, так как разность их фаз, равная $(\omega_2 - \omega_1)t + (\alpha_2 - \alpha_1)$ непрерывно изменяется с течением времени. Следовательно, из векторной диаграммы видно, что A_1 и A_2 вращаются с разной скоростью, и поэтому при их сложении возникают *пульсации*. При этом частота результирующего колебания непостоянна. Таким образом, в результате сложения получаем негармоническое колебание.



Биения

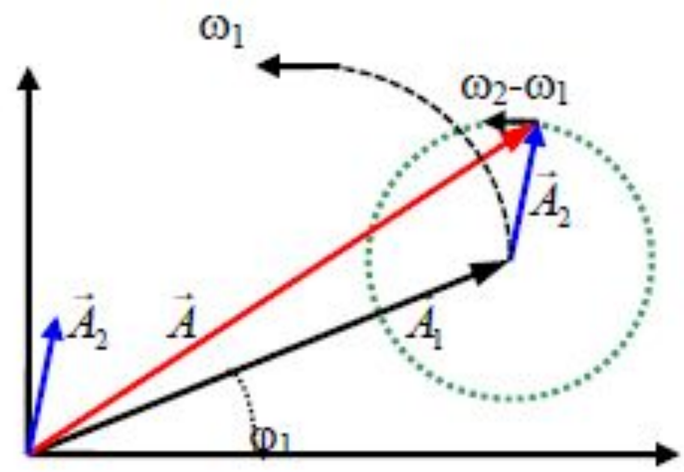
- Наибольший интерес вызывает случай, когда разность частот складывающихся колебаний $\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega$ мала:

$$\Delta\omega << \omega_1,\ \omega_2$$

- Имеем 2 колебания:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1)$$
$$x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2)$$

- Пусть для определенности $A_1 > A_2$ и система координат вращается вместе с вектором A_1 с угловой скоростью ω_1.



- Пусть для определенности $A_1 > A_2$ и система координат вращается вместе с вектором A_1 с угловой скоростью ω_1.
- Тогда в некоторый момент времени имеем следующую картину:
  - A_1 находится под углом φ_1 к горизонтальной оси, а вектор A_2 вращается вокруг конца вектора A_1 с угловой скоростью $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ то есть достаточно медленно.

Биения

- Для простоты пусть амплитуды складывающихся колебаний равны $A_1 = A_2$, и начало отсчета введем в момент времени t, когда $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ (всегда можно перенести момент отсчета времени).
- Таким образом, будем складывать следующие колебания:

$$x_1 = A\cos\omega t$$
$$x_2 = A\cos(\omega + \Delta\omega)t$$

- Складываем

$$x = x_1 + x_2 = A\left[\cos\omega t + \cos(\omega + \Delta\omega)t\right] =$$
$$= 2A\cos\frac{(\omega + \Delta\omega)t - \omega t}{2}\cos\frac{(\omega + \Delta\omega)t + \omega t}{2}$$

- так как $\Delta\omega \ll \omega$

$$x = \left(2A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cos\omega t$$

Биения

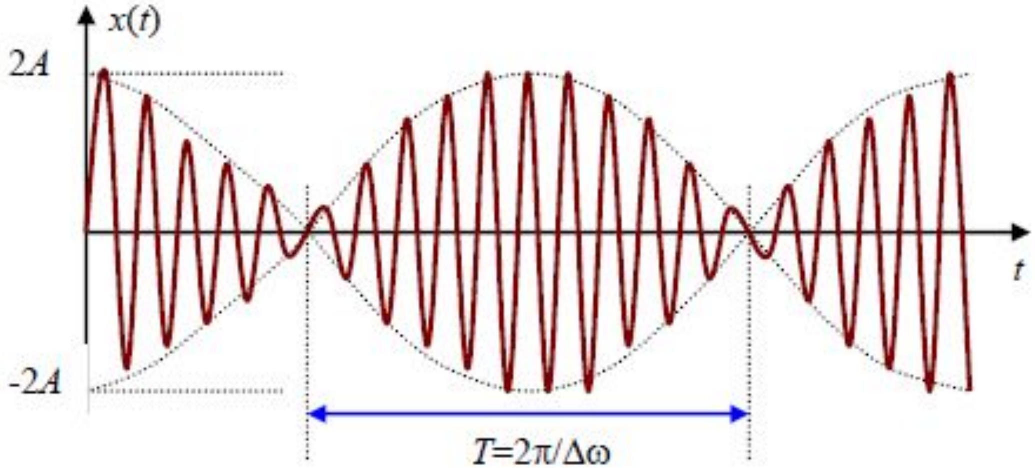
$$x = \left(2A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cos\omega t$$

- Фаза ω*t* меняется значительно быстрее, чем Δ*t*/2, и поэтому медленно меняющийся косинус $\cos\frac{\Delta\omega}{2}t$ можно отнести к амплитуде. Таким образом, получаем амплитуду, пульсирующую во времени:

$$a(t) = 2A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t$$

- Эта амплитуда вырезает область пространства (*x*-ов), которая заполняется колебаниями с частотой близкой к ω.
- Это *биения*

Частота биений



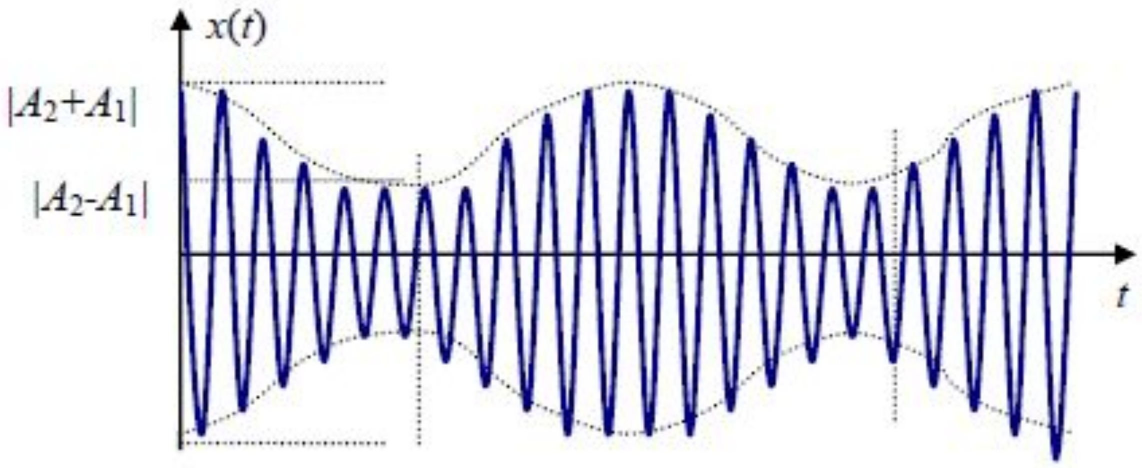
Период биений

- Максимальное значение амплитуды биений равно $2A$, минимальное – 0.
- Частота биений – медленная частота – определяется соотношением:

$$\Omega = |\omega_2 - \omega_1| = \Delta\omega$$

Амплитуда биений

- Если амплитуды складывающихся колебаний не одинаковы $A1 \neq A2$, тогда амплитуда биений не обращается в 0, а достигает своего минимального $|A2-A1|$ и максимального $|A2+A1|$ значений.



Краткий итог

- Складываемые колебания

$$x_1 = A\cos\omega t \qquad \Delta\omega << \omega$$

$$x_2 = A\cos(\omega + \Delta\omega)t$$

- Результирующее колебание

$$x = \left(2A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cos\omega t$$

- Амплитуда колебаний

$$a(t) = 2A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t$$

- Период биений

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{1}{|1/T_2 - 1/T_1|}$$

- Настройщики музыкальных инструментов часто используют явление биений, чтобы настроить, например, струну пианино. Настройщик дергает струну и одновременно ударяет по камертону. Если два источника – струна пианино и камертон – воссоздадут заметные биения, то их частоты не идентичны.
- Настройщик регулирует натяжение струны и повторяет процесс, пока биения не пропадут. По мере приближения частоты колебаний струны к частоте колебаний камертона, частота биений уменьшается, пока не достигает 0 Гц. Если биения более не слышны – это означает, что струна пианино настроена. В ходе этого процесса настройщик сравнивает частоты колебаний струн пианино с частотами колебаний стандартного набора камертонов.

Видео

- Биения на камертонах
  - https://www.youtube.com/watch?time_continue=75&v=gfC3HXepxgE
- Биения на осциллографе
  - https://www.youtube.com/watch?time_continue=121&v=-sjLkrjJkxU
  - https://www.youtube.com/watch?v=EnFerU0eiWo

Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

- Рассмотрим сложение 2-х колебаний, направленных вдоль осей *x* и *y*. Результирующая траектория – плоская кривая, ее форма зависит от частот складывающихся колебаний и от разности их фаз $\Delta\varphi$.
- Рассмотрим случай одинаковых частот $\omega_1 = \omega_2$

$$x = A\cos\omega t$$

$$y = B\cos(\omega t + \varphi)$$

где φ – разность фаз обоих колебаний.

- Данные выражения представляют собой заданное в параметрической форме уравнение траектории, по которой движется тело, участвующее в обоих колебаниях.
- Чтобы получить уравнение траектории в обычном виде, нужно исключить из уравнений параметр *t*.

$$x = A\cos\omega t$$
$$y = B\cos(\omega t + \varphi)$$

- Из первого уравнение ($x = A\cos\omega t$) получаем:

$$\cos\omega t = \frac{x}{A},\ \sin\omega t = \sqrt{1-\cos^2\omega t} = \sqrt{1-x^2/A^2}$$

- Подставляем во втрое уравнение ($y = B\cos(\omega t + \varphi)$) для y предварительно его разложив

$$y = \cos(\omega t + \varphi) = B(\cos\omega t \cdot \cos\varphi - \sin\omega t \cdot \sin\varphi)$$

$$y = B\left(\frac{x}{A}\cos\varphi - \sqrt{1-\frac{x^2}{A^2}}\sin\varphi\right)$$

- Преобразуем

$$\frac{x}{A}\cos\varphi - \frac{y}{B} = \sin\varphi\sqrt{1-\frac{x^2}{A^2}}$$

- Возводим в квадрат и получаем

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}-\frac{2xy}{AB}\cos\varphi=\sin^2\varphi$$

- Как известно из аналитической геометрии это уравнение есть уравнение эллипса, оси которого ориентированы относительно осей x и y произвольно. Ориентация эллипса и величина его полуосей зависят довольно сложным образом от амплитуд А и В и разности фаз φ.
- Исследуем форму траектории в некоторых частных случаях.

  1) Разность фаз равна нулю φ=0.

$$\left(\frac{x}{A}-\frac{y}{B}\right)^2=0$$

Откуда получает уравнение прямой

$$y=\frac{B}{A}x$$

$$y = \frac{B}{A}x$$

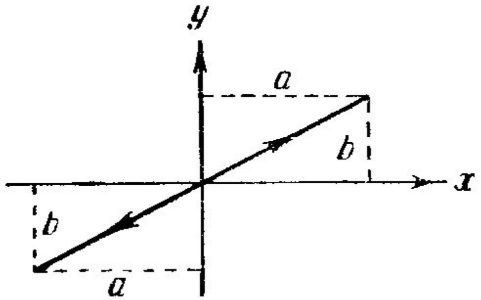
- Колеблющаяся точка перемещается по этой прямой, причем расстояние ее от начала координат равно

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- Подставляя *x* и *y* и учитывая, что φ=0, получим закон, по которому *r* изменяется со временем

$$r = \sqrt{A^2 + B^2}\cos\omega t$$

- Видно, что результирующее движение является гармоническим колебанием вдоль прямой с частотой ω и амплитудой $\sqrt{A^2 + B^2}$

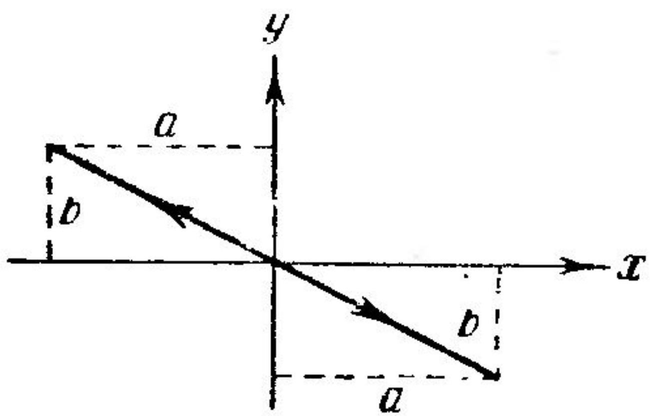


$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}-\frac{2xy}{AB}\cos\varphi=\sin^2\varphi$$

2) Разность фаз равна нулю φ=±π

Получаем тоже прямую линию и гармоническое колебание с той же амплитудой, но только прямая проходит через другие квадранты

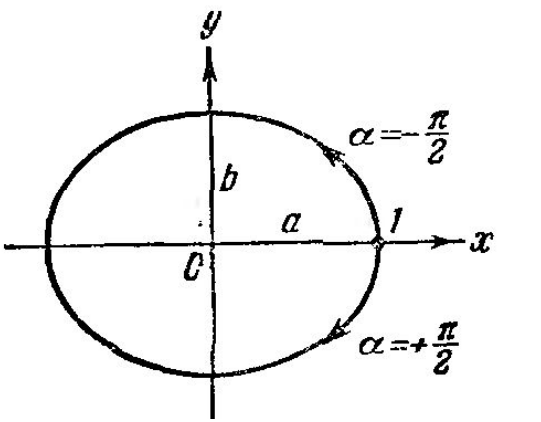
$$\left(\frac{x}{A}+\frac{y}{B}\right)^2=0 \qquad y=-\frac{B}{A}x$$



$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}-\frac{2xy}{AB}\cos\varphi=\sin^2\varphi$$

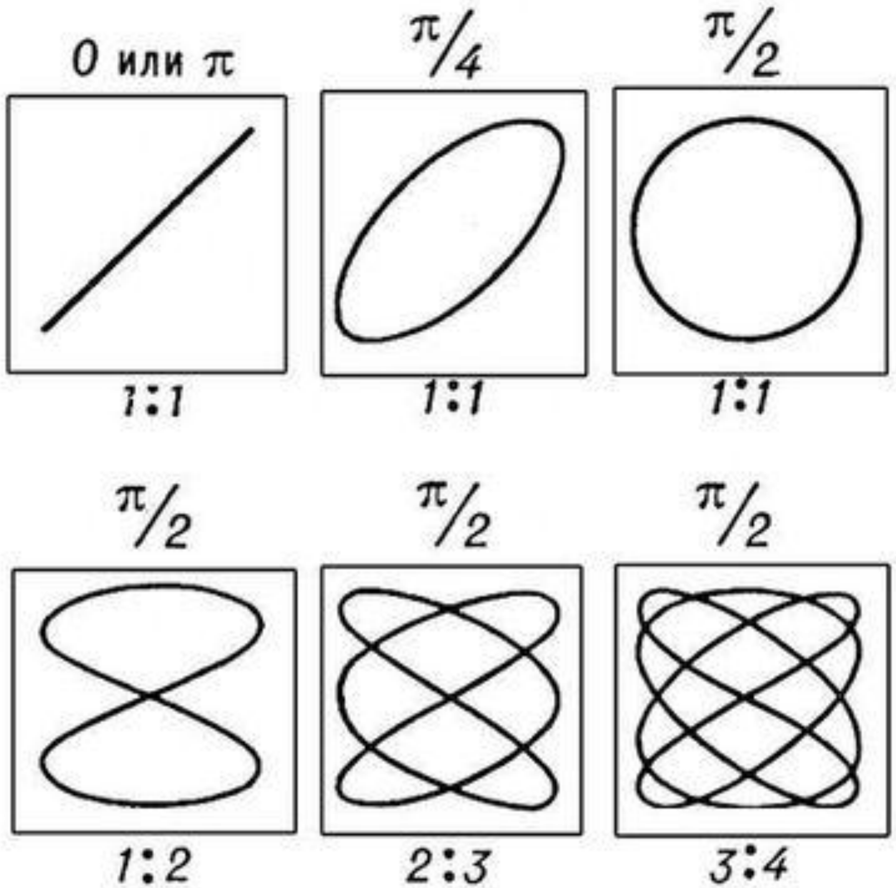
3) разность фаз равна φ = ±π/2, тогда получаем эллипс, ориентированный по осям *x* и *y*

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1$$



- При этом движение колеблющегося тела (траектория маятника) совершается по часовой стрелке при разности фаз φ = π/2, и против часовой стрелки при φ = -π/2 . При такой разности фаз и одинаковых амплитудах складывающихся взаимно перпендикулярных колебаний получаем равномерное движение по окружности.
- При равенстве амплитуд эллипс вырождается в окружность

- При сложении взаимно перпендикулярных колебаний, частоты которых кратны между собой (например $\omega_1 : \omega_2 = 1/2, 2/3$ и т.д., т.е. равно *m*/*n*, где *m* и *n* – целые числа), колеблющееся тело описывает сложные кривые, которые носят название фигур Лиссажу (*Жюль Антуан Лиссажу, французский физик, 1822–1880*).
- Отношение частот складываемых колебаний равно отношению числа пересечений фигур Лиссажу с прямыми, параллельными осям координат ($\omega_y : \omega_x = n_y : n_x$). По виду фигур можно определить неизвестную частоту по известной или определить отношение частот складываемых колебаний.


0 или π
π/4
π/2
1:1
1:1
1:1
π/2
π/2
π/2
1:2
2:3
3:4

Видео

- https://youtu.be/hUu653khUlE

Блиц-опрос

- **От каких величин зависит период колебаний пружинного маятника?**

  1) длины пружины　2) массы тела, которое колеблется

  3) жесткости пружины　4) температуры тела, которое колеблется

- **Период колебания математического маятника зависит от…**

  1) от частоты колебаний　2) от длины маятника

  3) от массы груза　4) от ускорения свободного падения

- **Период колебаний маятника 0,02 с. Определите линейную частоту колебаний.**

  1) 0,02 Гц　2) 500 Гц

  3) 50 Гц　4) 20 Гц

- **Как изменится период колебаний груза на пружине, если массу груза уменьшить?**

  1) увеличится в 4 раза　2) уменьшится в 2 раза

  3) увеличится в 2 раза　2) уменьшится в 4 раза

Блиц-опрос

- **Частота свободных колебаний нитяного маятника зависит от…**

  1) амплитуды колебаний 2) периода колебаний

  3) длины нити 4) от температуры

- **На рисунке приведен график зависимости смещения гармонически колеблющегося тела от времени. Какое из нижеприведенных уравнений соответствует данному колебанию?**

  1) $X = 4 \sin(\pi t)$

  2) $X = 4 \cos(\pi t)$

  3) $X = 4 \sin(2\pi)$

  4) $X = 4 \cos(2\pi t)$

  5) $X = -4 \sin(2\pi t)$

  6) $X = -4 \cos(\pi t)$