Задача 17 варианта КИМ ЕГЭ по МАТЕМАТИКЕ 2016 года (профильный уровень)

(задача с экономическим содержанием)

Кривенко Виктор Михайлович
Старший специалист отдела математики издательства «Легион». Кандидат физико-математических наук, доцент

ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕГИОН
www.legionr.ru

Обобщенный план вариантов КИМ ЕГЭ 2016 года по МАТЕМАТИКЕ

№	Проверяемые требования	Коды по КТ	Коды по КЭС	Уровень	Макс балл	≈ Время
17	Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности	6.1, 6.3.	1.1.1, 1.1.3, 2.1.2.	Повышенный	3(три)	35 мин.

6.1 Анализировать реальные числовые данные, информацию статистического характера; осуществлять практические расчеты по формулам; пользоваться оценкой и прикидкой при практических расчетах;

6.3 Решать прикладные задачи, в том числе социально-экономического и физического характера, на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение скорости и ускорения

1.1.1 – Целые числа

1.1.3 – Дроби, проценты, рациональные числа

2.1.12 – Применение математических методов для решения задач из различных областей науки и практики. Интерпретация результатов, учет реал ограничений

Демоверсия

В опубликованной демоверсии была приведена следующая задача:
31 декабря 2013 г. Сергей взял в банке 9 930 000 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Сергей переводит в банк определённую сумму ежегодного платежа. Какова должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы Сергей выплатил долг тремя равными ежегодными платежами?

1% числа $A = \frac{1}{100}A = \frac{A}{100}$

$p\%$ числа $A = \frac{p}{100}A = \frac{pA}{100}$

Увеличение числа A на $p\%$

$$A + \frac{pA}{100} = A\left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

Уменьшение числа A на $p\%$

$$A - \frac{pA}{100} = A\left(1 - \frac{p}{100}\right)$$

Формулы сложных процентов:

$$A\left(1 + \frac{p}{100}\right)^m, \qquad A\left(1 - \frac{p}{100}\right)^m$$

31 декабря 2014 г. Виталий взял в банке 4 550 000 рублей в кредит под 20% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 20%), затем Виталий переводит в банк определённую сумму ежегодного платежа. Какова должна быть сумма ежегодного платежа (в рублях), чтобы Виталий выплатил долг тремя равными ежегодными платежами?

Решение. Согласно условию получаем, что к концу первого года, следующего за годом получения кредита, долг увеличится на 20% и станет равным $4\,550\,000 \cdot 1{,}2$. Обозначим через x сумму ежегодного платежа. После уплаты этой суммы долг станет равным $4\,550\,000 \cdot 1{,}2 - x$. Аналогично, к концу второго года, следующего за годом получения кредита (после начисления 20% процентов и уплаты x рублей) долг станет равным $(4\,550\,000 \cdot 1{,}2 - x) \cdot 1{,}2 - x$. Наконец, к концу третьего года он будет равным $\left((4\,550\,000 \cdot 1{,}2 - x) \cdot 1{,}2 - x\right) \cdot 1{,}2 - x$.

Найдем такое значение x, что

$$\left((4\,550\,000 \cdot 1{,}2 - x) \cdot 1{,}2 - x\right) \cdot 1{,}2 - x = 0.$$

$$4\,550\,000 \cdot (1{,}2)^3 - x((1{,}2)^2 + 1{,}2 + 1) = 0,$$

$$x = \frac{4\,550\,000 \cdot (1{,}2)^3}{(1{,}2)^2 + 1{,}2 + 1} = \frac{4\,550\,000 \cdot 1{,}728}{3{,}64} = \frac{4\,550\,000 \cdot 1728}{3640} =$$

$$= \frac{4\,550\,000 \cdot 216}{455} = 2\,160\,000.$$

Ответ. 2 160 000.

Пособие


ЕГЭ
Под редакцией
Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова
МАТЕМАТИКА
Задача
с экономическим
содержанием
Профильный
уровень
ЛЕГИОН

Диагностическая работа

Задача 1. Меховая шуба стоит дороже кожаной куртки на 45%. На сколько процентов дешевле стоит кожаная куртка, чем меховая шуба?

Решение. Обозначим через a стоимость кожаной куртки. Так как меховая шуба дороже, чем кожаная куртка на 45%, то ее стоимость равна $a+\frac{45}{100}\cdot a=1{,}45a$. Составим пропорцию:

$$\begin{array}{ccc} 1{,}45a & \text{———————} & 100\% \\ a & \text{———————} & x\% \end{array}$$

Отсюда $x=\frac{a\cdot 100}{1{,}45}=\frac{10000}{145}\approx 68{,}9$. Округляя до целых, получаем $x=69$. Поэтому цена кожаной куртки на 31% (31=100-69) меньше, чем цена меховой шубы.

Ответ. 31.

Другое решение. Пусть b – цена меховой шубы, тогда $b=1{,}45a$. Отсюда $b=\frac{145}{100}a$, $a=\frac{100}{145}b=\frac{20}{29}b\approx 0{,}689b$. Округляя до сотых, получаем $a\approx 0{,}69b$. Значит a составляет 69% от b . Поэтому цена кожаной куртки на 31% (31=100-69) меньше, чем цена меховой шубы.

Задача 2. 15 января планируется взять кредит в банке на 9 месяцев. Условия возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца следующего за месяцем получения кредита долг возрастает на $r\%$ по сравнению с предыдущим месяцем;

– со 2-го по 14-ое число каждого месяца, следующего за месяцем покупки необходимо выплачивать часть долга;

– 15-го числа каждого месяца, следующего за месяцем покупки, долг уменьшается на одну и ту же сумму по сравнению с долгом в предыдущем месяце.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 35% больше, чем сумма кредита. Найдите r.

Решение. Пусть сумма кредита равна K. Тогда по условию долг будет уменьшаться каждый месяц на $\frac{K}{9}$. Поэтому последовательность долгов на 15-ое число каждого месяца, следующего за месяцем покупки,

$\frac{8K}{9}$, $\frac{7K}{9}$, $\frac{6K}{9}$, ………………, $\frac{2K}{9}$, $\frac{K}{9}$, 0 .

Последовательность долгов на 1-ое число каждого месяца, следующего за месяцем покупки, имеет вид:

$$K\left(1+\frac{r}{100}\right), \frac{8K}{9}\left(1+\frac{r}{100}\right), \frac{7K}{9}\left(1+\frac{r}{100}\right), \dots\dots, \frac{3K}{9}\left(1+\frac{r}{100}\right), \frac{2K}{9}\left(1+\frac{r}{100}\right), \frac{K}{9}\left(1+\frac{r}{100}\right).$$

Отсюда следует, что последовательность выплат со 2-го по 14-ое число каждого месяца, следующего за месяцем покупки, имеет вид:

$$\frac{K}{9}+\frac{Kr}{100}, \quad \frac{K}{9}+\frac{8Kr}{9\cdot 100}, \quad \frac{K}{9}+\frac{7Kr}{9\cdot 100}, \dots\dots\dots, \frac{K}{9}+\frac{3Kr}{9\cdot 100}, \quad \frac{K}{9}+\frac{2Kr}{9\cdot 100}, \quad \frac{K}{9}+\frac{1Kr}{9\cdot 100}.$$

Общая сумма выплат :

$$K+\frac{Kr}{900}(9+8+7+\dots+3+2+1)=K+\frac{Kr}{900}\cdot\frac{10\cdot 9}{2}=K+\frac{Kr}{20}=K\left(1+\frac{5r}{100}\right).$$

Согласно условию $K\left(1+\frac{5r}{100}\right)=K\left(1+\frac{35}{100}\right), \frac{5r}{100}=\frac{35}{100}, r=7$.

Ответ: 7.

Задача 3. Вкладчик внес в банк 2 500 000 рублей под 10% годовых. В конце каждого из трех лет вкладчик дополнительно вносил одну и ту же сумму. К концу четвертого года его вклад стал равным 4 024 350 рублей. Какую сумму в рублях вносил вкладчик в конце каждого из трех первых лет?

Решение. Обозначим ту сумму, которую вкладчик вносил в течение первых трех лет через x. Так как вкладчик не вносил в конце четвертого года никакую сумму, то его вклад в конце четвертого года будет равен

$$\Big(\big((2500000 \cdot 1{,}1 + x) \cdot 1{,}1 + x\big) \cdot 1{,}1 + x\Big) \cdot 1{,}1$$

Согласно условию получаем уравнение

$$\Big(\big((2500000 \cdot 1{,}1 + x) \cdot 1{,}1 + x\big) \cdot 1{,}1 + x\Big) \cdot 1{,}1 = 4\,024\,350,$$

$$2500000 \cdot (1{,}1)^4 + x \cdot ((1{,}1)^3 + (1{,}1)^2 + 1{,}1) = 4\,024\,350.$$

$$x = \frac{4\,024\,350 - 2500000 \cdot (1{,}1)^4}{(1{,}1)^3 + (1{,}1)^2 + 1{,}1}.$$

Заметим, что $(1{,}1)^4 = 1{,}4641, (1{,}1)^3 = 1{,}331, (1{,}1)^2 = 1{,}21,$

$$2500000 \cdot (1{,}1)^4 = 3\,660\,250, (1{,}1)^3 + (1{,}1)^2 + 1{,}1 = 3{,}641,$$

$$x = \frac{4\,024\,350 - 3\,660\,250}{3{,}641} = \frac{364\,100}{3{,}641} = 100\,000$$

Ответ. 100 000.

Задача 4. Первичная информация некоторой фирмы распределяется по серверам 1 и 2. С сервера 1 при объеме ω^2 Гбайт входящей в него информации выходит 3ω Гбайт, а с сервера при объеме ω^2 Гбайт входящей в него информации выходит 4ω Гбайт обработанной информации. Определите наибольший общий объем выходящей информации, если общий объем входящей информации равен 400 Гбайт. В ответе укажите число Гбайт.

Решение. Пусть на первый сервер входит x Гбайт, а на второй y Гбайт информации. По условию $x + y = 400, y = 400 - x$. Учитывая зависимость между объемами входящей и выходящей информации с серверов 1 и 2, указанную в условии, получаем, что объем выходящей информации будет равен $\Omega = \Omega(x) = 3\sqrt{x} + 4\sqrt{y} = 3\sqrt{x} + 4\sqrt{400 - x}$.

Найдем наибольшее значение $\Omega(x)$ с помощью производной.

$\Omega'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{4}{2\cdot\sqrt{400-x}}$. $\Omega'(x) = 0$, если $\frac{3}{\sqrt{x}} = \frac{4}{\sqrt{400-x}}, \frac{9}{x} = \frac{16}{400-x}$,

$9 \cdot (400 - x) = 16x$, $9 \cdot 400 = 25x, x = 144$. Заметим, что $\Omega'(x) > 0$ при $x < 144$ и $\Omega'(x) < 0$ при $x > 144$, поэтому в точке $x = 144$ будет наибольшее значение.

$\Omega(144) = 3 \cdot \sqrt{144} + 4 \cdot \sqrt{400 - 144} = 3 \cdot 12 + 4 \cdot \sqrt{256} = 36 + 64 = 100.$

Ответ. 100.

Задача 5. Общая численность персонала завода составляет более двухсот человек. Пятая часть сотрудников персонала работает в заводоуправлении, 33 сотрудника работают в сборочном цехе, а остальные в нескольких цехах, численность в каждом из которых составляет $\frac{1}{9}$ от персонала завода. Чему равна общая численность персонала завода?

Решение. Обозначим через x общую численность персонала завода ($x > 200$), а через k количество всех цехов (кроме сборочного), в которых работают сотрудники персонала. Тогда по условию получаем уравнение

$$x = \frac{1}{5}x + 33 + \frac{kx}{9}, x \cdot \left(1 - \frac{1}{5} - \frac{k}{9}\right) = 33, x \cdot (36 - 5k) = 33 \cdot 45.$$

Отсюда следует, что $36 - 5k > 0,$ поэтому $k \leq 7$. Если k четное число, то $x \cdot (36 - 5k)$ четное число $(\forall x)$ а, $33 \cdot 45$ – нечетное число. Значит k четным быть не может. Поэтому k – нечетное и ≤ 7.

Если $k = 1,$ то $x \cdot 31 = 33 \cdot 45$, что невозможно, так как $33 \cdot 45$ не делится на 31. Если $k = 3,$ то $x \cdot 21 = 33 \cdot 45$, что невозможно, так как 21 делится на 7, а $33 \cdot 45$ не делится на 7. Если $k = 5$, то $x \cdot 11 = 33 \cdot 45$, $x = 135$, что невозможно по условию. Наконец, если $k = 7,$ то $x = 33 \cdot 45 = 1485$.

Так как 1485 делится на 5 и 9, то $x = 1485$ является единственным решением уравнения, удовлетворяющим условию. Но, $33 \cdot 45 = 1485$.

Ответ. 1485.

Задачи на проценты

Задача. Процентное содержание воды в ананасах после сборки составляет 98%, а после их перевозки из Бразилии в Россию составляет 96%. Накануне Нового года в Бразилии было закуплено 12 тонн ананасов. Сколько тонн ананасов останется после перевозки в Россию?

Решение. В 12 тоннах ананасов после сборки 98% воды, а значит 100−98=2 (%) сухого вещества. **2% от 12 тонн =** $\frac{2}{100} \cdot 12 = \frac{24}{100} = 0,24$ тонны. Пусть x- масса ананасов после перевозки (в тоннах), тогда по условию в них содержится 96% воды, а значит 4% сухого вещества. Так как масса сухого вещества при перевозке не изменяется, то **4% от x равно 0,24 тонны**. Получаем, 0,04x=0,24, $x = 6$.

Ответ. 6 .

Задача. Процентное содержание воды в ананасах после сборки составляет 98%, а после их перевозки из Бразилии в Россию составляет $p\%$ $(p \le 98)$. Накануне Нового года в Бразилии было закуплено 12 тонн ананасов.

1) Укажите зависимость между массой $m(p)$ (в тоннах), оставшихся ананасов после перевозки 12 тонн и числом p; 2) При каком наименьшем значении p масса ананасов $m(p)$ не меньше 4 тонн?

Решение.1.В 12 тоннах ананасов после сборки 98% воды, а значит 100–98=2 (%) сухого вещества. **2% от 12 тонн =** $\frac{2}{100} \cdot \mathbf{12} = \mathbf{0,24}$ тонны. По условию в $m(p)$ тоннах содержится $p\%$ воды, а значит $(100 - p)\%$ сухого вещества. Так как масса сухого вещества при перевозке не изменяется, то $(\mathbf{100} - \boldsymbol{p})$**% от** $\boldsymbol{m(p)}$ **равно 0,24 тонны**. Получаем,

$\frac{100-p}{100} \cdot m(p)$ =0,24,

$$m(p) = \frac{0{,}24 \cdot 100}{100 - p} = \frac{24}{100 - p}.$$

2.Решая неравенство $m(p) \ge 4$, получаем $\frac{24}{100-p} \ge 4, p \ge 94$. Наименьшее значение p равно 94. Ответ. 94.

Задачи на кредиты

Задача. 15 января был выдан кредит на приобретение легкового автомобиля. В таблице указан график его погашения. Текущий долг указан в процентах от кредита.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Текущий долг	100%	80%	70%	60%	50%	30%	0%

В конце каждого месяца, начиная с января, долг увеличивается на 5%, а выплаты по погашению кредита происходили в первой половине каждого месяца, начиная с февраля. На сколько процентов общая сумма выплат при таких условиях больше суммы самого кредита?

Решение. Пусть S – сумма кредита; $x_1, x_2, \ldots, x_6$ –выплаты в первой половине февраля, марта и т. д. Так как в конце января долг увеличивается на 5% , то он станет 1,05 S. Но, на 15 февраля долг должен быть уменьшен согласно графику до 80% от S, поэтому получаем уравнение:

$$1,05\,S - x_1 = 0,8\,S.$$

Аналогично, в конце февраля этот долг увеличивается на 5%, а потом до 15 марта уплачивается x_2 так, чтобы получилось 70% от S, поэтому

$$1,05 \cdot 0,8\,S - x_2 = 0,7\,S.$$

Далее,
$$1,05\cdot 0,7\,S-x_3=0,6\,S,$$

$$1,05\cdot 0,6\,S-x_4=0,5\,S,$$

$$1,05\cdot 0,5\,S-x_5=0,3\,S,$$

$$1,05\cdot 0,3\,S-x_6=0.$$

Складывая уравнения, получаем

$$1,05\,S\cdot(1+0,8+0,7+0,6+0,5+0,3)-(x_1+x_2+\cdots+x_6)=$$

$$=S\cdot(0,8+0,7+0,6+0,5+0,3).$$

Отсюда $x_1+x_2+\cdots+x_6=1,05\,S\cdot(1+0,8+0,7+0,6+0,5+0,3)-$

$$-S\cdot(0,8+0,7+0,6+0,5+0,3)=S\cdot(1,05\cdot 3,9-2,9)=S\cdot 1,195$$

Но, 1,195= $(1+0,195)=\left(1+\frac{19,5}{100}\right)$, поэтому переплата составила 19,5%.

Ответ. 19,5.

Задачи на вклады

Задача. Иван Михайлович положил 9000 рублей в банк «Достояние» с хорошей процентной ставкой. По истечении года к его вкладу были причислены процентные деньги, и в то же время он увеличил свой вклад на 1280 рублей. Еще через год после начисления процентов по вкладу он решил снять 1600 рублей, а остальные 10280 рублей положил на новый срок. Чему равна процентная ставка в этом банке?

Решение. Пусть процентная ставка в этом банке равна $p\%$. Тогда ровно через год его вклад будет составлять $9000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$ рублей. После увеличения на 1280 рублей она будет составлять

$$\left(9000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) + 1280\right) \text{ рублей.}$$

Через год вклад будет составлять

$$\left(\left(9000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) + 1280\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)\right) \text{ рублей.}$$

Учитывая последующее снятие 1600 рублей, получаем уравнение

$$\left(9000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) + 1280\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) - 1600 = 10280$$

Отсюда, $\left(9000\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)+\ 1280\right)\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)-11880=0,$

$$9000\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^2+1280\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)-11880=0$$

Пусть $1+\frac{p}{100}=x\ (x>0)$, тогда

$9000\cdot x^2+1280\cdot x-11880=0,\ 225\cdot x^2+32\cdot x-297=0,$

$$x_{1,2}=\frac{-32\pm\sqrt{1024+267300}}{450}=\frac{-32\pm\sqrt{268324}}{450}=\frac{-32\pm 518}{450}$$

$\sqrt{268324}$ находим прикидкой $500^2=250\ 000$ (502, 508, 512, 518).

$x=\frac{486}{450}=1+\frac{36}{450}=1+\frac{4}{50}=1+\frac{8}{100}.$

Отсюда, $p=8$. Ответ. 8%.

Производственные и бытовые задачи

Задача. Производительность первого цеха завода определяется некоторым фиксированным числом аудиоплееров в сутки. Известно, что это число не превосходит 910. Производительность второго цеха завода до реконструкции составляла 0,85 от производительности первого цеха. После реконструкции второй цех увеличил производительность на 40% и стал выпускать более 960 аудиоплееров в сутки. Найдите, сколько аудиоплееров в сутки стал выпускать второй цех после реконструкции, если цех и до, и после реконструкции выпускал целое число аудиоплееров.

Решение. Обозначим через p производительность первого цеха. Тогда производительность второго цеха до реконструкции равна 0,85 p. Так как производительность является целым числом, то число $\frac{85 \cdot p}{100}$ $\left(\frac{85 \cdot p}{100} = \frac{17 \cdot p}{20}\right)$ является целым.

Это значит, что $17 \cdot p$ делится на 20. Но, 17 и 20 взаимно просты, поэтому p делится на 20. Пусть $p = 20\,t\ (t \in N)$.

После реконструкции производительность второго цеха стала равна $0{,}85\,p \cdot 1{,}4 = 1{,}19p = 1{,}19 \cdot 20 \cdot t$ и является целым числом. Это означает, что число $\frac{119 \cdot 20 \cdot t}{100}$ является целым, поэтому $119 \cdot 20 \cdot t$ делится на 100. Но тогда $119 \cdot t$ делится на 5. Учитывая, что 119 и 5 взаимно просты, получаем, что t делится на 5. Пусть $t = 5s\ (s \in N)$, тогда $p = 100s$, т.е. p кратно 100.

Так как $1{,}19p > 960$, то $p \geq 807$. Так как $p \leq 910$ и кратно 100, то $p = 900$, а $1{,}19p = 1071$.

Ответ. 1071.

Задача. Для перевозки риса имеются мешки двух видов: на 60 кг и на 80 кг. Необходимо набрать одну тонну риса таким образом, чтобы все мешки были полными. Какое наименьшее количество мешков при этом может понадобиться?

Решение. Обозначим через x и y количество мешков по 60 и 80 кг соответственно, которые необходимы для наполнения 1000 кг риса. Тогда $60x + 80y = 1000$, $3x + 4y = 50$.

Если $y = 3t$ $(t \in N)$, то $3x + 12t = 50$. Левая часть полученного равенства на 3 делится, а правая нет. Такой случай невозможен.

Если $y = 3t + 1 (t \in N)$, то $3x + 12t = 46$. Опять левая часть полученного равенства на 3 делится, а правая нет. Такой случай невозможен.

Если $y = 3t + 2$ $(t \in N)$, то $3x + 12t = 42$, $x = 14 - 4t$. Так как $14 - 4t \geq 0$, то $0 \leq t \leq 3$. Если $t = 0$, то $x = 14$, а $y = 2$. Если $t = 1$, то $x = 10$, а $y = 5$. Если $t = 2$, то $x = 7$, а $y = 8$. Если $t = 3$, то $x = 2$, а $y = 11$. В последнем случае $x + y = 13$, а во всех других случаях $x + y > 13$. **Ответ.** 13.

Задачи на нахождение экстремума

Задача 1. В пчелиной семье, зимующей в помещении, до дня последней весенней подкормки было 9 тысяч пчел. В каждый k – ый день ($k = 1, 2, 3 \dots$.) после дня подкормки численность пчелиной семьи, зимующей в помещении, становится равной $9 + k^2 - k$ тысяч пчел. Далее, при перевозке пчел на летнюю стоянку численность пчелиной семьи в каждый последующий день возрастает на 25% по сравнению с предыдущим днем. На какой день после дня последней весенней подкормки нужно перевезти пчел на летнюю стоянку, чтобы на 38 день после дня последней весенней подкормки численность пчелиной семьи стала наибольшей? Известно, что у фермера нет возможности поместить пчел на летнюю стоянку сразу же после последней весенней подкормки.

Решение. Пусть x ($x \epsilon N$) – порядковый номер последнего дня содержания пчел в помещении. По условию и формуле сложных процентов на 38 день после дня последней весенней подкормки получим следующую численность пчелиной семьи:

$$(9 + x^2 - x) \cdot (1,25)^{38-x}.$$

Найдем теперь при каком значении x $(x \epsilon N)$ функция

$$f(x) = (9 + x^2 - x) \cdot (1,25)^{38-x}$$

принимает наибольшее значение

Решим неравенство

$$f(x+1) \geq f(x) \qquad (1)$$

во множестве натуральных чисел, больших единицы.

$(9 + (x+1)^2 - (x+1)) \cdot (1,25)^{37-x} \geq (9 + x^2 - x) \cdot (1,25)^{38-x}$.

Разделим обе части на положительное число $(1,25)^{37-x}$, получим равносильное неравенство

$$(9 + (x+1)^2 - (x+1)) \geq (9 + x^2 - x) \cdot 1,25.$$

$$25x^2 - 225x + 225 \leq 0, x^2 - 9x + 9 \leq 0$$

Корнями квадратного трехчлена $x^2 - 9x + 9$ являются числа $\frac{9-\sqrt{45}}{2}$ и $\frac{9+\sqrt{45}}{2}$.

$1 < \frac{9-\sqrt{45}}{2} < 2$ и $7 < \frac{9+\sqrt{45}}{2} < 8$. Поэтому всеми указанными натуральными числами , являющимися решениями неравенства (1) будут числа 2, 3, 4, 5, 6, 7. Значит, $f(2) \le f(3) \le \cdots \le f(7) \le f(8)$.

Кроме того, $f(8) > f(9) > f10 > \cdots > f(37) > f(38)$. Действительно, если бы, например, $f(26) \le f(27)$, то число 26 было бы решением неравенства (1), что неверно. Таким образом, $f(8)$ является наибольшим значением функции, а число 8 искомым.

Ответ. 8.

Задача. Зависимость объема Q (в шт.) купленного у фирмы товара от цены P (в руб. за шт.) выражается формулой $Q = 17000 - P$, $3000 \leq P \leq 17000$. Доход от продажи товара составляет $P \cdot Q$ рублей. Затраты на производство Q единиц товара составляют $4000 \cdot Q + 3500000$ рублей. Прибыль равна разности дохода от продажи и затрат на его производство. Стремясь привлечь внимание покупателей, фирма уменьшила цену продукции на 50%, однако её прибыль не изменилась. На сколько процентов следует увеличить сниженную цену, чтобы добиться наибольшей прибыли?

Решение. 1– ый способ. Согласно условию прибыль $D(P)$ находится по формуле $D(P) = P \cdot (17000 - P) - 4000 \cdot (17000 - P) - 3500000 =$ $= -P^2 + 21\,000P - 71\,500\,000.$

Пусть P_0 – первоначальная цена товара, тогда по условию

$D(P_0) = D\left(\frac{P_0}{2}\right).$

Так как $D(P)$ является квадратичной функцией, то наибольшее значение функция принимает посредине между точками $\frac{P_0}{2}$ и P_0. Но, серединой является точка $\frac{\frac{P_0}{2}+P_0}{2}=\frac{3}{4}P_0$. Осталось выяснить, насколько процентов надо увеличить $\frac{P_0}{2}$, чтобы получить $\frac{3}{4}P_0$. Но, $\frac{3}{4}P_0=\frac{P_0}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{P_0}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{P_0}{2}\cdot\left(1+\frac{50}{100}\right)$, $\frac{P_0}{2}$ надо увеличить на 50%, чтобы получить $\frac{3}{4}P_0$

2−ой способ.

Квадратичная функция $D(P)=-P^2+21\,000P-71\,500\,000$ принимает наибольшее значение при $P=10500$. Так как $D(P_0)=D\left(\frac{P_0}{2}\right)$, то 10500лежит посередине между точками $\frac{P_0}{2}$ и P_0. Значит $\frac{3}{4}P_0=10500$.

Отсюда P_0 =14000, $\frac{P_0}{2}=7000$ и 7000 надо увеличить на 3500, т.е. на 50%, чтобы получить 10500. Ответ. 50.

Итоговые работы

Задача. Бывшие профессиональные велосипедисты Иван и Петр совершают длительные воскресные поездки по живописному парку с оплачиваемой трассой для велосипедистов. Иван въезжает в парк раньше Петра и проезжает 5 км. После этого в парк въезжает Петр и едет со скоростью на 4 км/ч больше, чем Иван. Через некоторое время Петр догоняет Ивана. Затем они поворачивают обратно и со скоростью 16 км/ч одновременно выезжают из парка, заканчивая поездку.

а) При какой скорости Ивана (в км/ч) время его поездки будет наименьшим?

б) Какую сумму придется заплатить при этом Ивану, если аренда велосипедной трассы стоит 128 рублей за один час?

Решение. а) Пусть v (км/ч) – скорость езды Ивана с момента въезда до момента, когда его догоняет Петр. Тогда скорость езды Петра с момента въезда до момента, когда он догоняет Ивана равна $v + 4$ (км/ч).

Пусть t – время, в течение которого Петр догоняет Ивана. Тогда

$$(v+4)\cdot t = 5 + v\cdot t,\ v\cdot t + 4t = 5 + v\cdot t, 4t = 5, t = \frac{5}{4}.$$

Отсюда следует, что расстояние от входа в парк до поворота равно $5+\frac{5}{4}v$.

Это расстояние на обратном пути Иван проезжает за $\frac{5+\frac{5}{4}v}{16} = \frac{5}{16} + \frac{5}{64}v$ часов.

Таким образом, время Ивана, затрачиваемое на весь путь равно

$t(v) = \frac{5}{v} + \frac{5}{4} + \frac{5}{16} + \frac{5}{64}v$. Находим наименьшее значение с помощью

производной. $t'(v) = -\frac{5}{v^2} + \frac{5}{64}$. $t'(v) < 0$ на промежутке $(0;8)$,

$t(v)$ убывает. $t'(v) > 0$ на промежутке $(8;+\infty)$, $t(v)$ возрастает. Отсюда

следует, что $v = 8$ будет точкой минимума.

б) $t(8) = \frac{5}{8} + \frac{5}{4} + \frac{5}{16} + \frac{5}{64}\cdot 8 = \frac{40+80+20+40}{64} = \frac{180}{64}$. $128\cdot\frac{180}{64} = 360$.

Ответ. а) 8; б)360.

Задача. На базе отдыха был приобретен водный мотоцикл за 49600 рублей для катания отдыхающих по живописному озеру. Затраты на x минут катания в день составляют $x^2 + 5x + 8$ рублей. Если брать за 1 мин катания c рублей, то за катание x минут в день будет прибыль $cx - (x^2 + 5x + 8)$ $(c > 5)$ рублей. На базе отдыха есть возможность организовать катание такого количество отдыхающих, которое обеспечивает наибольшую прибыль. При каком наименьшем значении c база отдыха окупит затраты на покупку велосипеда не более, чем за 200 дней катания?

Решение. По условию прибыль $P(x)$ от катания x минут в день находится по формуле

$$P(x) = cx - (x^2 + 5x + 8) = -x^2 + (c - 5)x - 8.$$

Наибольшее значение квадратичная функция принимает при $x = \frac{c-5}{2}$.

$P\left(\frac{c-5}{2}\right) = -\left(\frac{c-5}{2}\right)^2 + (c-5)\frac{c-5}{2} - 8 = \left(\frac{c-2}{2}\right)^2 - 8 = \frac{(c-5)^2}{4} - 8$. Так как надо окупить затраты не более, чем за 200 дней катания, то

$$200\left(\frac{(c-5)^2}{4} - 8\right) \geq 49600,$$

$\frac{(c-5)^2}{4} - 8 \geq 248$, $\frac{(c-5)^2}{4} \geq 256$, $(c-5)^2 \geq 4 \cdot 256$. Так как $c - 5 > 0$, то $c - 5 \geq 32$, $c \geq 37$. Наименьшее значение c равно 37.

Ответ. 37.

Задача. Вкладчик положил в банк некоторую сумму. Укажите такое наименьшее целое число r, чтобы при ставке годовых $r\%$ (это значит, что в каждый последующий год сумма вклада увеличивается на $r\%$ по сравнению с предыдущим значением) через три года сумма вклада стала больше, чем первоначальная сумма вклада, увеличенная в 1,5 раза.

Решение. Пусть S – первоначальная сумма вклада, тогда по формуле сложных процентов через три года сумма вклада будет $S \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^3$.

Составим неравенство согласно условию: $S \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^3 > \frac{3}{2} S$. Разделим на S обе части, получим равносильное неравенство: $\left(1 + \frac{r}{100}\right)^3 > \frac{3}{2}$,

$1 + \frac{r}{100} > \sqrt[3]{1,5}$, $r > 100\left(\sqrt[3]{1,5} - 1\right)$. Находим $\sqrt[3]{1,5}$ подбором.

$$1,1^3 < 1,5, \quad 1,2^3 > 1,5, 1,14^3 < 1,5, 1,15^3 > 1,5$$

$1,14^3 = 1,481544, 1,15^3 = 1,520875$. Тогда $1,14 < \sqrt[3]{1,5} < 1,15$,

$0,14 < \sqrt[3]{1,5} = 1 < 0,15, \quad 14 < 100\left(\sqrt[3]{1,5} - 1\right) < 15$. Поэтомv $r = 15$.

Ответ. 15.

Спасибо за внимание!

Книги можно заказать в нашем интернет-магазине на сайте:
www.legionr.ru

Спрашивайте
в книжных магазинах города!

Издательство регулярно проводит онлайн-семинары авторов пособий с педагогами. По завершении каждого вебинара участники получают электронные сертификаты. Ссылки для участия вы сможете найти на сайте издательства www.legionr.ru

Все вебинары издательства «Легион» носят обучающий характер

legionrus@legionrus.com

Вступайте в группу

«Издательство «Легион»

в социальных сетях:

ВКонтакте

Одноклассники

Facebook

Видео вебинаров смотрите на YouTube.

Адрес для корреспонденции:

344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550