Уральский федеральный университет

Специальные главы математики

Лекция 11

Классификация особых точек функции

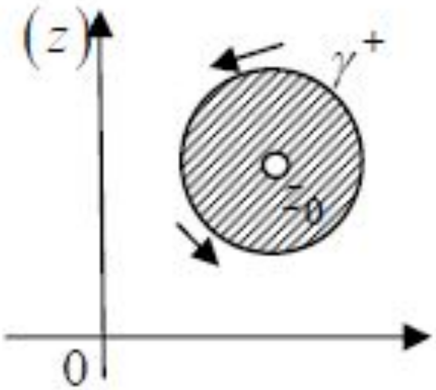
$f(z)$, z_0 – ОТ (в z_0 нарушена аналит-ть $f(z)$)

z_0 ОТ	$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$	число отриц. степеней в р. Лорана
УОТ	конечен	нет
полюс П(k)	∞	конечно и = порядок полюса $= k$
СОТ	$\nexists$	∞

§ 10. Вычеты функции в ее особых точках

Вычетом функции $f(z)$ в ее изолированной особой точке z_0 называется число

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{(\gamma^+)} f(z)\,dz,$$



где γ^+ − положительно ориентированная граница окрестности точки z_0, не содержащая других особых точек функции (рис.)

Принято также другое обозначение вычета: $\operatorname*{Выч}_{z=z_0} f(z).$

Способы вычисления вычетов

1. Вычисление вычета через коэффициенты ряда Лорана.

$O_\varepsilon(z_0)$

Разложим функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности ее особой точки z_0, проинтегрируем по положительно ориентированной окружности γ^+ с центром в точке z_0 и воспользуемся тем, что

$$\oint\limits_{(\gamma^+)} (z-z_0)^n\,dz = \begin{cases} 2\pi i, & n=-1, \\ 0, & n\neq -1, \end{cases}$$

1) $$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n \Rightarrow$$

2) $$\underbrace{\oint_{(\gamma^+)} f(z)dz}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \oint_{(\gamma^+)} (z-z_0)^n dz=\underbrace{c_{-1}\cdot 2\pi i} \Rightarrow \; : 2\pi i$$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{(\gamma^+)} f(z)\,dz=c_{-1}.$$

Таким образом, $\boxed{\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=c_{-1}.}$

2. Вычет в устранимой особой точке.

В окрестности устранимой особой точки z_0 ряд Лорана функции не содержит отрицательных степеней $(z - z_0)$, следовательно, $c_{-1} = 0$.

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0)^1 + \frac{f''(z_0)}{2!}\cdot(z-z_0)^2 + \ldots$$

Таким образом, в устранимой особой точке

$$\boxed{\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = 0. \quad z=z_0 \text{ - УОТ}}$$

Уральский федеральный университет

3. Вычисление вычета в полюсе первого порядка.

Если z_0 – П(1) функции $f(z)$, то разложение функции в ряд Лорана в окрестности точки z_0 имеет вид:

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \ldots$$

Умножим это равенство на $(z - z_0)$:

$$f(z)\cdot(z - z_0) = c_{-1} + c_0(z - z_0) + c_1(z - z_0)^2 + c_2(z - z_0)^3 + \ldots$$

Переходя к пределу при $(z \to z_0)$, получим:

$$\lim_{z \to z_0} \left(f(z)\cdot(z - z_0)\right) = c_{-1} = \operatorname*{Res}_{z = z_0} f(z),$$

т.е. в полюсе первого порядка

$$\boxed{\operatorname*{Res}_{z = z_0 - \Pi(1)} f(z) = \lim_{z \to z_0} \left(f(z)\cdot(z - z_0)\right).}$$

4. Вычисление вычета функции $f = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, если

$$\varphi(z_0) \neq 0,\ \psi(z_0) = 0,\ \psi'(z_0) \neq 0.$$

$$f = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$$

z_0 – от порядки нуля

$$\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{0 \quad z_0 \text{ – не нуль}}{1 \quad z_0 \text{ – нуль 1 пор}} = \text{нуль (–1) пор} \Rightarrow \text{П}(1)$$

Таким образом,

пункт 3

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z \to z_0} \left(\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} \cdot (z - z_0) \right) = \lim_{z \to z_0} \left(\frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z) - \psi(z_0)}{(z - z_0)}} \right) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

$\psi(z_0) = 0$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Логарифмический вычет

5. Вычисление вычета в полюсе k-го порядка.

Если z_0 – П(k) функции $f(z)$, то разложение функции в ряд Лорана в окрестности точки z_0 имеет вид:

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k} + \ldots + \frac{c_{-1}}{(z-z_0)} + c_0 + c_1(z-z_0) + \ldots \quad (c_{-k} \neq 0)$$

Умножим это равенство на $(z - z_0)^k$

$$f(z)\cdot(z-z_0)^k = \cancel{c_{-k}} + \cancel{c_{-k+1}}(z-z_0) + \ldots + c_{-1}(z-z_0)^{k-1} +$$
$$+c_0(z-z_0)^k + c_1(z-z_0)^{k+1} + \ldots,$$

и продифференцируем $(k-1)$ раз:

$$\left[f(z)\cdot(z-z_0)^k\right]^{(k-1)}=c_{-k}\cdot 0+c_{-k+1}\cdot 0+\ldots+c_{-1}\cdot(k-1)!+$$

$c_{-1}(z-z_0)^{k-1}$

$c_{-1}(z-z_0)^{k-1}$

$$+c_0\cdot k!(z-z_0)+c_1\frac{(k+1)!}{2}(z-z_0)^2+\ldots$$

Переходя к пределу при $(z\to z_0)$, получим

$$\lim_{z\to z_0}\left[f(z)\cdot(z-z_0)^k\right]^{(k-1)}=c_{-1}\cdot(k-1)!=\operatorname*{Res}_{z=z_0}f(z)\cdot(k-1)!.$$

Таким образом, в полюсе k-го порядка

$$\boxed{\operatorname*{Res}_{z=z_0 - \Pi(k)}f(z)=\frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to z_0}\left[f(z)\cdot(z-z_0)^k\right]^{(k-1)}.}$$

6. Вычет в точке ∞.

Определение. Будем говорить, что функция $f(z)$ аналитична в точке $z_0 = \infty$, тогда $\overset{\Longleftrightarrow}{\text{и}}$ только тогда, когда $f(z) = f\left(\frac{1}{\xi}\right)$ аналитична в точке $\xi = 0$.

Разложим функцию $f(z) = f\left(\frac{1}{\xi}\right)$ в ряд Лорана в окрестности нуля: $\xi = 0$

$$f\left(\frac{1}{\xi}\right) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n \xi^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{\xi^n}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{1}{\underset{\xi}{\underset{\parallel}{z}}}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \left(\frac{1}{\underset{\xi}{\underset{\parallel}{z}}}\right)^{-n} = c_0 + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{-n}}_{\text{прав.}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^n}_{\text{глав}}.$$

по смыслу

Классификация ОТ ∞.

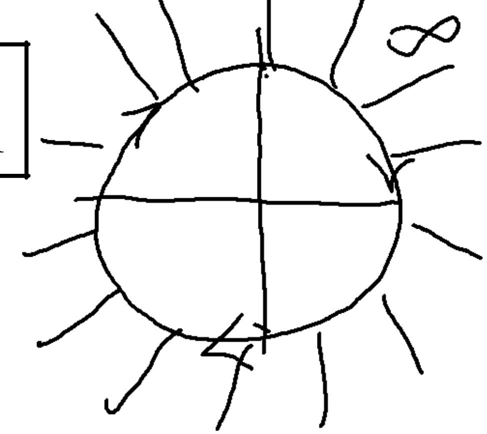
$$f\left(\frac{1}{\xi}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\xi^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{\xi^n}=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\left(\frac{1}{z}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}\left(\frac{1}{z}\right)^{-n}=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n z^{-n}+\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}z^n$$

$\lim\limits_{z\to\infty}$

ОТ ∞	$\lim\limits_{z\to\infty} f$	число полож. степ.
УОТ	конеч.	—
П(k)	∞	конеч. число = k
СОТ	$\nexists$	∞

Определение. Вычетом в бесконечно удаленной точке назовем число, равное $\operatorname{Res} f(\infty)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma} f(z)dz,$ где γ – окрестность точки бесконечность (окружность большого радиуса), проходимая *по часовой стрелке*. Поэтому

$$\boxed{\operatorname{Res} f(\infty)=-c_{-1}}$$



Пример. $f(z)=\dfrac{3z^3-2z-4}{z}=3z^2-2-\dfrac{4}{z}.$

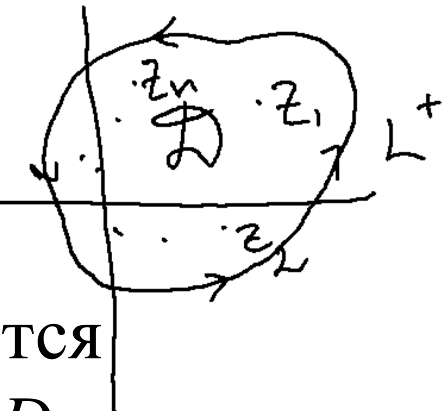
По положительной степени можно определить, что $z=\infty$ – полюс 2 порядка. П(2)

При этом $\operatorname{Res} f(\infty)=-c_{-1}=4.$

§11. Применение вычетов к вычислению интегралов

1. $\oint\limits_{(L)} f(z)dz$

1) L
2) $f(z) \Rightarrow$ ОТ
3) ОТ $\in D$
4) Res ОТ



Теорема 1. Пусть функция $f(z)$ является аналитической в замкнутой области D с положительно ориентированной границей L^+ за исключением изолированных особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$, лежащих внутри D. Тогда

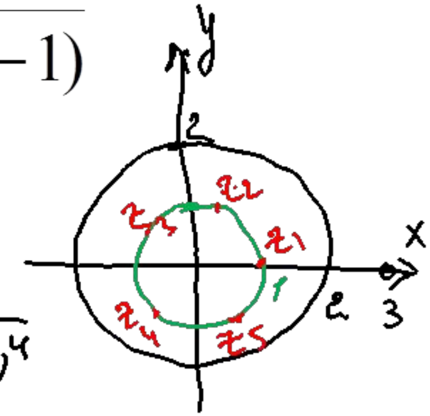
$$\boxed{\oint\limits_{(L^+)} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z).}$$

Следствие. Если функция $f(z)$ является аналитической всюду, кроме конечного множества особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$, , то сумма вычетов этой функции во всех особых точках и вычета в бесконечности равна нулю,

L^+ L^+

т.е. $$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)}_{J} + \underbrace{\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)}_{-J} = 0.$$ (осн. теор. о вычетах)

Пример. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{dz}{(z-3)(z^5-1)}$



$f(z) = \dfrac{1}{(z-3)(z^5-1)}$

ОТ: $z_1 = 3 \notin D$ $\quad z^5-1=0$

$z = \sqrt[5]{1} = \{z_1, \dots, z_5\}$

1 способ: по Т1: $\oint\limits_{|z|=2} \dots = 2\pi i \sum\limits_{k=1}^{5} \operatorname{Res}\limits_{z_k} f \quad \left(\sqrt[5]{1} = e^{\frac{2\pi k}{5} i}\right)_{k=\overline{0,4}}$

2 способ: расширим плоскость, добавив т. ∞. ($\overline{\mathbb{Z}}$-плоскость)

по. Следствию Т1: $\oint\limits_{|z|=2} = 2\pi i \left(\sum\limits_{k=1}^{5} \operatorname{Res}\limits_{z_k} f\right) = \left[\sum\limits_{k=1}^{5} \operatorname{Res}\limits_{z_k} f + \operatorname{Res}\limits_{z=3} f + \operatorname{Res} f(\infty) = 0\right] =$

$= 2\pi i \left(-\operatorname{Res}\limits_{z=3} f - \operatorname{Res} f(\infty)\right)$ (*)

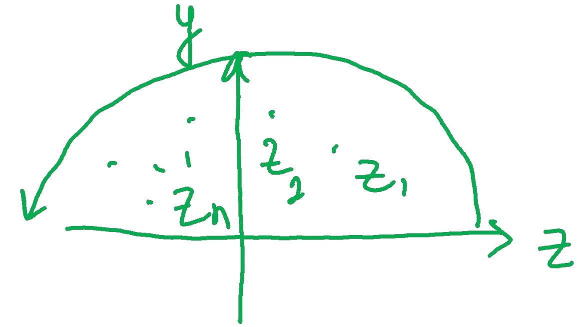
1) $z=3$ для $\dfrac{1}{(z-3)(z^5-1)}$ $\quad$ П(1) $\Rightarrow \operatorname{Res}\limits_{z=3} f = \lim\limits_{z\to 3} f\cdot(z-3) = \dfrac{1}{3^5-1} = \dfrac{1}{242}$

2) $z=\infty$ Разложим f по z: $\dfrac{1}{z-3}\cdot\dfrac{1}{z^5-1} = \dfrac{1}{z\left(1-\frac{3}{z}\right)}\cdot\dfrac{1}{z^5\left(1-\frac{1}{z^5}\right)} =$

$= \dfrac{1}{z^6}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{3^n}{z^n}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{z^{5n}}$ $\quad \operatorname{Res} f(\infty) = -C_{-1} = 0$

Т.О. $\oint = 2\pi i\left(-\dfrac{1}{242}\right) = \dfrac{-\pi i}{121}$

2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ (интеграл от ФДП)



Теорема 2. Пусть

1) функция $f(x)$ совпадает с $f(z)$ и непрерывна на $(-\infty; +\infty)$

2) функция $f(z)$ является аналитической в верхней полуплоскости, за исключением изолированных особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$,

3) существуют положительные числа M, R_0, δ такие, что

$$|f(z)| \le \frac{M}{|z|^{1+\delta}}$$ при условии, что $|z| = R \ge R_0$,

Тогда $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{Res} f(z_k)$, где $\operatorname{Im} z_k > 0$.

Следствие. Пусть функция $f(z) = \dfrac{P_k(z)}{Q_n(z)}$ есть отношение двух многочленов $(n - k > 1)$ и $z_1, z_2, \ldots, z_N$ есть нули знаменателя $Q_n(z)$, лежащие в верхней полуплоскости. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \operatorname{Res} f(z_k).$$

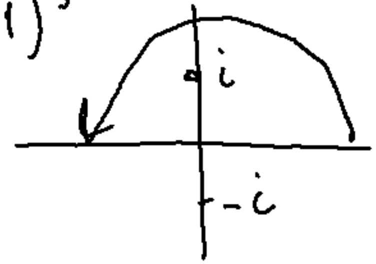
Пример. Вычислить $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3} = J$

чет

$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^3}$

О.Т. $f(z) = \frac{1}{(z+i)^3(z-i)^3}$

$z = \pm i$ П(3); $z = i \in \{\mathrm{Im}\, z > 0\}$



$J = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=i} f = \pi \cancel{i} \cdot \frac{3}{16 \cancel{i}} = \frac{3\pi}{16}$ Отв.

$\operatorname*{Res}_{z=i \,-\, П(3)} f(z) = \frac{1}{2!} \lim\limits_{z\to i} \left(f\cdot(z-i)^3\right)'' = \frac{1}{2} \lim\limits_{z\to i} \left((z+i)^{-3}\right)'' = \frac{1}{2} \lim\limits_{z\to i} \frac{3\cdot 4}{(z+i)^5} =$

$= 6 \cdot \frac{1}{(2i)^5} = \frac{3}{16i}$

3. $$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{i\lambda x} dx,$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(\lambda x) dx, \; I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(\lambda x) dx.$$

Так как $e^{i\lambda x} = \cos(\lambda x) + i \sin(\lambda x)$, то

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{i\lambda x} dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(\lambda x) dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(\lambda x) dx = I_2 + i\, I_3.$$

Следовательно, $I_2 = \operatorname{Re} I_1, \quad I_3 = \operatorname{Im} I_1.$

Теорема 3. Пусть

1) функция $f(x)$ совпадает с $f(z)$ и непрерывна на $(-\infty; +\infty)$

2) функция $f(z)$ является аналитической в верхней полуплоскости, за исключением изолированных особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$,

3) $|f(z)| \le \varepsilon(R)$ на полуокружности $\gamma_R : \begin{cases} |z| = R, \\ \operatorname{Im}(z) \ge 0, \end{cases}$

причем $\varepsilon(R) \to 0$ при $R \to \infty$.

Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\lambda x}\, dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} \left(f(z) e^{i\lambda z} \right), \quad \text{где} \quad \operatorname{Im} z_k > 0, \lambda > 0.$$

Следствие. Пусть функция $f(z)=\dfrac{P_k(z)}{Q_n(z)}$ есть отношение двух многочленов , где $k < n$, и $z_1, z_2,\ldots, z_N$ есть нули знаменателя $Q_n(z)$, лежащие в верхней полуплоскости.

Тогда $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{i\lambda x}dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{N}\operatorname*{Res}_{z=z_k}\left(f(z)e^{i\lambda z}\right), \lambda>0.$$

Пример 1. Вычислить $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\, e^{ix}\, dx}{x^2 - 2x + 5}$.

4. $\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)\,dx.$ (интеграл от ФДП)

Замена: $e^{ix} = z$. Тогда отрезок интегрирования [0; 2π] отображается в окружность комплексной плоскости $|z| = 1$, при этом

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) = \frac{z^2 - 1}{2iz},$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z}, \quad dx = \frac{dz}{iz}.$$

$$\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)\,dx = \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z^2 - 1}{2iz}, \frac{z^2 + 1}{2z}\right)\frac{dz}{iz}.$$

Пример 1. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{2\pi} \frac{2+\cos t}{5+\sin t}\,dt.$

Уральский
федеральный
университет