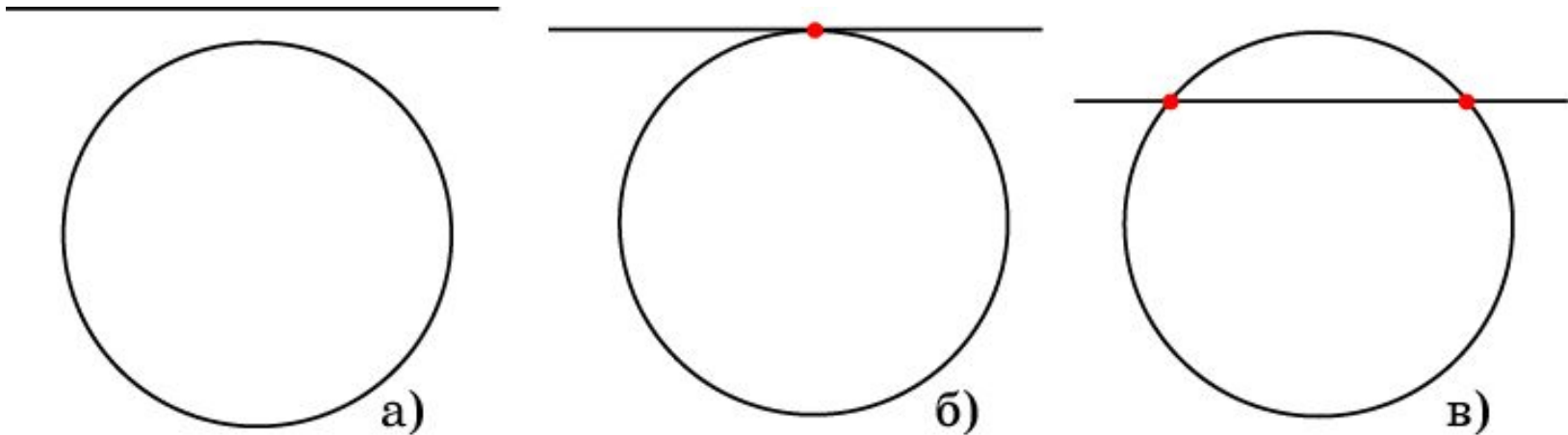


# Прямая и окружность

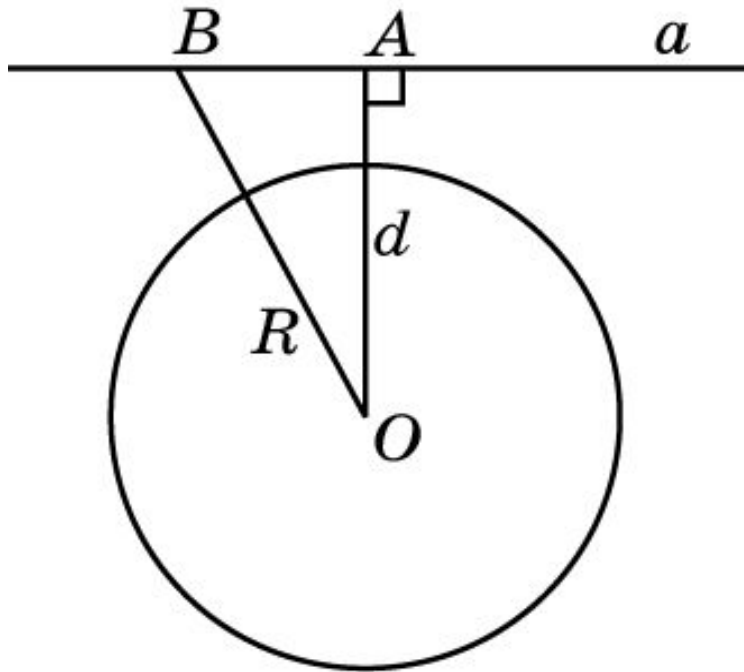


Прямая и окружность могут: а) не иметь общих точек; б) иметь только одну общую точку. В этом случае прямая называется **касательной** к окружности.

Общая точка называется **точкой касания**;  
в) иметь две общие точки. В этом случае говорят, что прямая **пересекает** окружность.

# Теорема 1

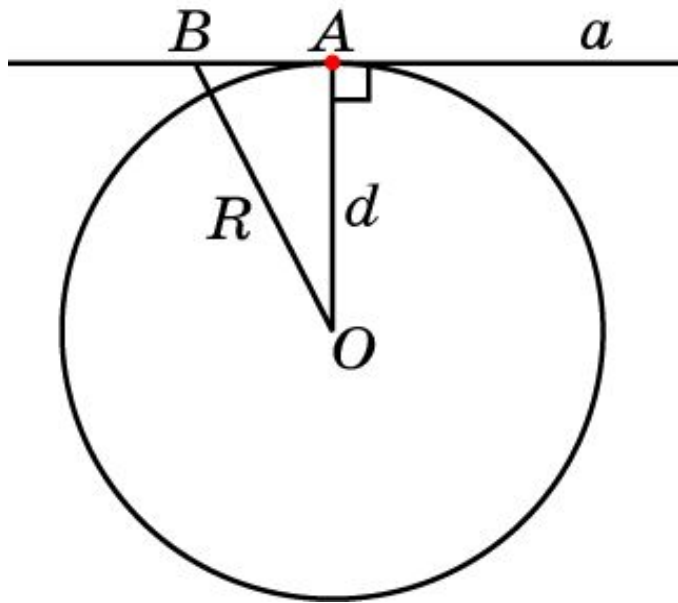
Если расстояние от центра окружности до прямой больше радиуса окружности, то эта прямая и окружность не имеют общих точек.



**Доказательство.** Пусть расстояние от центра  $O$  окружности до прямой  $a$  больше радиуса  $R$  окружности. Опустим из центра  $O$  перпендикуляр  $OA$  на эту прямую. Тогда  $OA > R$ . Для любой другой точки  $B$  на прямой  $a$  наклонная  $OB$  будет больше перпендикуляра  $OA$  и, следовательно, больше  $R$ . Таким образом, расстояние от любой точки прямой  $a$  до центра  $O$  больше  $R$ . Значит, прямая  $a$  и окружность не имеют общих точек.

## Теорема 2

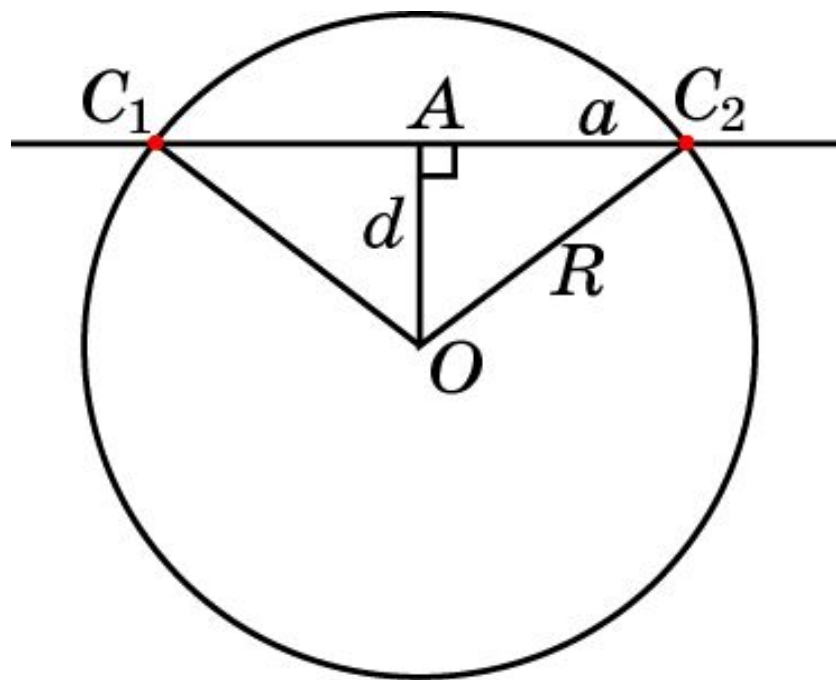
Если расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу окружности, то эта прямая является касательной к окружности.



**Доказательство.** Пусть расстояние от центра  $O$  окружности до прямой  $a$  равно радиусу  $R$  окружности. Опустим из центра  $O$  перпендикуляр  $OA$  на эту прямую. Тогда  $OA = R$ . Для любой другой точки  $B$  на прямой  $a$  наклонная  $OB$  будет больше перпендикуляра  $OA$  и, следовательно, больше  $R$ . Таким образом, расстояние от любой точки прямой  $a$ , отличной от  $A$ , до центра  $O$  больше  $R$ . Значит, прямая  $a$  и окружность имеют одну общую точку  $A$ , т.е. прямая касается окружности.

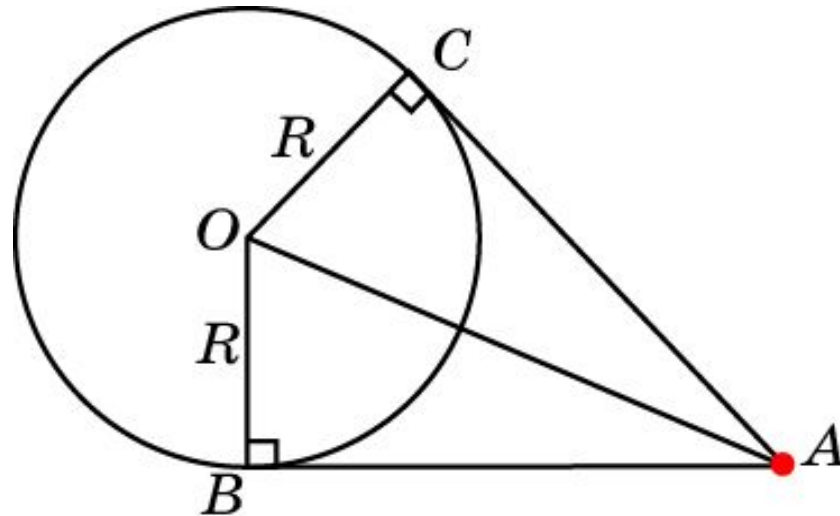
## Теорема 3

Если расстояние от центра окружности до прямой меньше радиуса окружности, то прямая и окружность пересекаются.



## Теорема 4

Отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки, равны.



**Доказательство.** Рассмотрим две касательные к окружности с центром в точке  $O$ , проведенные из точки  $A$  и касающиеся окружности в точках  $B$  и  $C$ . Треугольники  $AOB$  и  $AOC$  прямоугольные,  $OB=OC$  и сторона  $AO$  общая. По признаку равенства прямоугольных треугольников (по катету и гипотенузе), они равны. Следовательно,  $AB=AC$ .

# Вопрос 1

Какая прямая называется касательной к окружности?

**Ответ:** Касательной к окружности называется прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку.

## Вопрос 2

Какая прямая называется пересекающей окружность?

**Ответ:** Прямая пересекает окружность, если она имеет с окружностью две общие точки.

## Вопрос 3

В каком случае прямая и окружность не имеют общих точек?

**Ответ:** Если расстояние от центра окружности до прямой больше радиуса окружности.



## Вопрос 4

В каком случае прямая касается окружности?

**Ответ:** Если расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу окружности.

## Вопрос 5

Какой угол образуют касательная к окружности и радиус, проведенный в точку касания?

Ответ:  $90^\circ$ .

## Вопрос 6

В каком случае прямая и окружность пересекаются?

**Ответ:** Если расстояние от центра окружности до прямой меньше радиуса окружности.

## Вопрос 7

Что можно сказать об отрезках касательных к окружности, проведенных из одной точки?

**Ответ:** Они равны.

# Упражнение 1

Сколько касательных к данной окружности можно провести через данную точку на окружности?

Ответ: Одну.

## Упражнение 2

Сколько касательных к данной окружности можно провести через данную точку, расположенную: а) внутри окружности; б) вне окружности?

**Ответ:** а) Ни одной;  
б) две.

## Упражнение 3

Сколько можно провести окружностей, касающихся данной прямой?

**Ответ:** Бесконечно много.

## Упражнение 4

Сколько можно провести окружностей, касающихся данной прямой в данной точке?

**Ответ:** Бесконечно много.



## Упражнение 5

Сколько можно провести окружностей данного радиуса, касающихся данной прямой в данной точке?

Ответ: Две.

## Упражнение 6

Может ли прямая иметь с окружностью три общие точки?

Ответ: Нет.

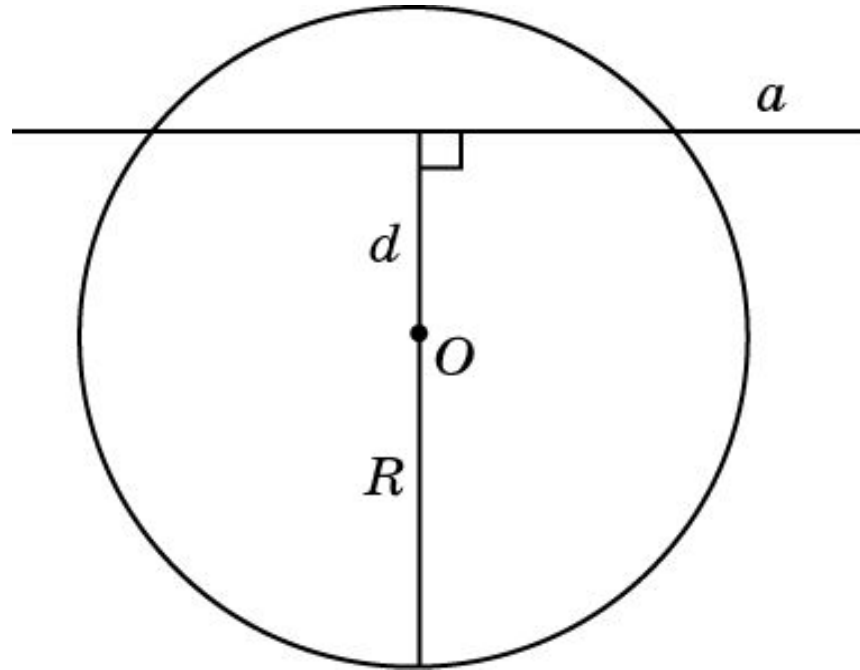
## Упражнение 7

Каково взаимное расположение прямой и окружности, если радиус окружности равен 3 см, а расстояние от центра окружности до прямой равно: а) 4 см; б) 3 см; в) 2 см?

**Ответ:** а) Не имеют общих точек;  
б) касаются;  
в) пересекаются.

## Упражнение 8

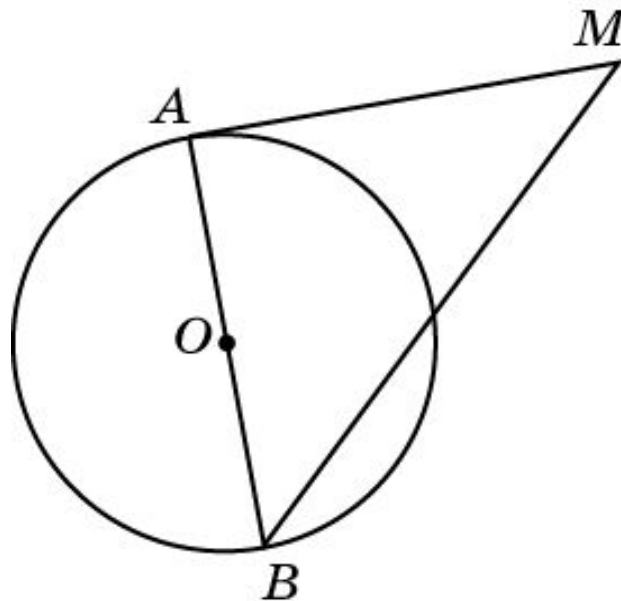
Расстояние  $d$  от центра окружности до прямой меньше радиуса  $R$  этой окружности. Найдите наибольшее расстояние от точек данной окружности до прямой.



Ответ:  $R + d$ .

## Упражнение 9

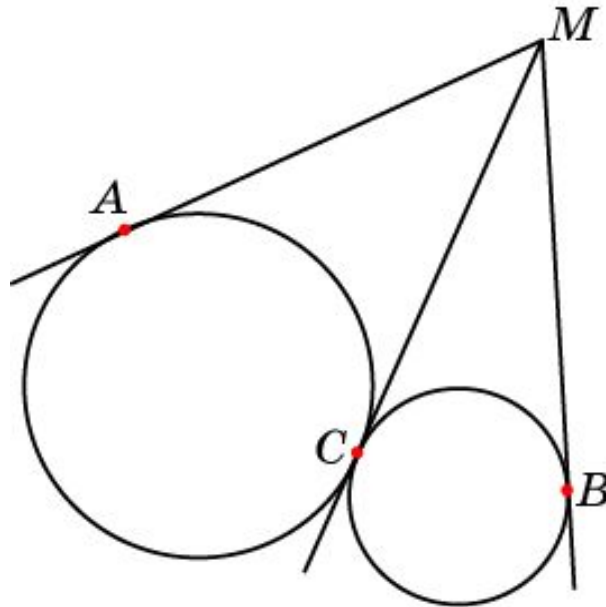
Определите вид треугольника, изображенного на рисунке, если  $MA$  – отрезок касательной, проведенной к данной окружности.



**Ответ:** Прямоугольный.

## Упражнение 10

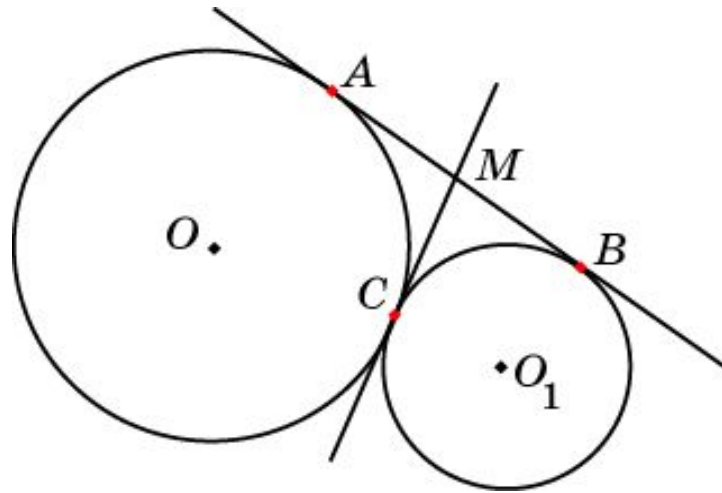
На рисунке  $MA$ ,  $MB$ ,  $MC$  - касательные. Верно ли, что  $MA = MB$ ?



Ответ: Да.

## Упражнение 11

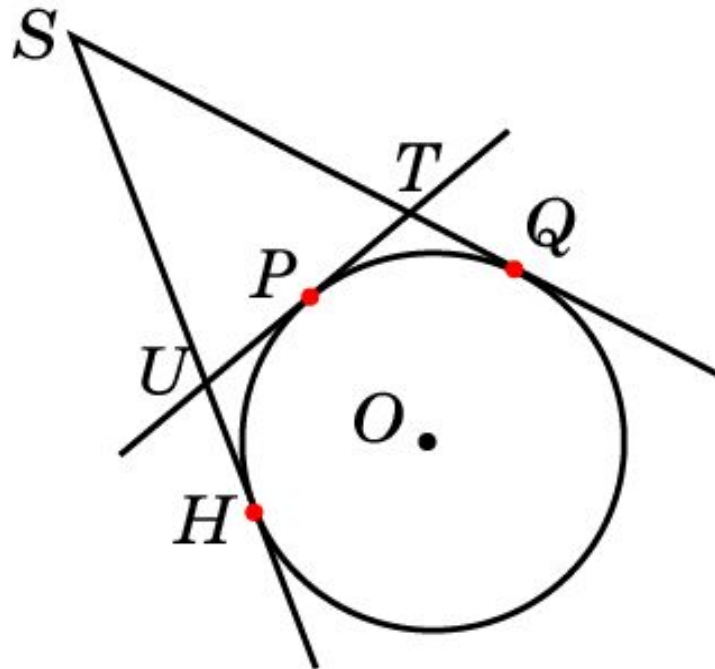
На рисунке  $MA$ ,  $MB$ ,  $MC$  - касательные. В каком отношении делит точка  $M$  отрезок  $AB$ ?



Ответ: 1:1.

## Упражнение 12

На рисунке  $SH$  и  $SQ$  - отрезки касательных, сумма которых равна 36 см. Найдите периметр треугольника  $STU$ , где  $TU$  – касательная к данной окружности.

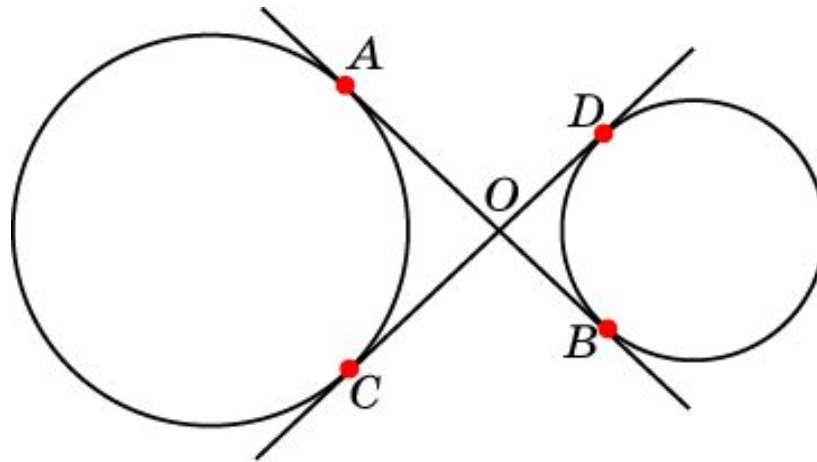


**Ответ:** 36 см.



## Упражнение 13

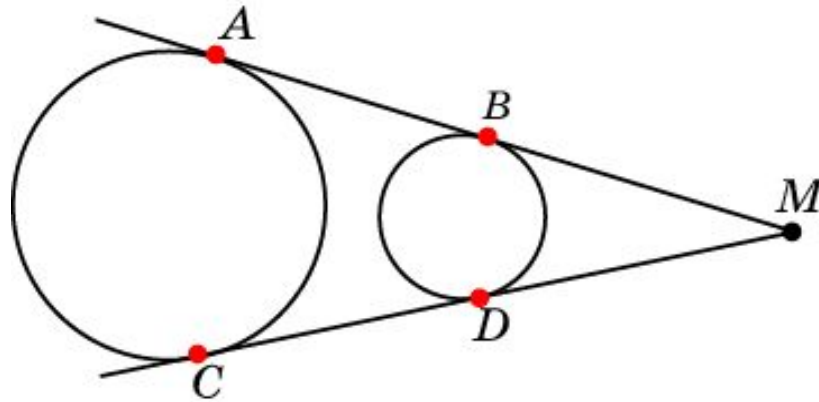
Докажите, что отрезки  $AB$  и  $CD$  общих внутренних касательных к двум окружностям, равны.



**Решение:**  $OA = OC$ ,  $OB = OD$ , как отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки. Следовательно,  $AB = CD$ .

## Упражнение 14

Докажите, что отрезки  $AB$  и  $CD$  общих пересекающихся внешних касательных к двум окружностям, равны.



**Решение:**  $MA = MC$ ,  $MB = MD$ , как отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки. Следовательно,  $AB = CD$ .