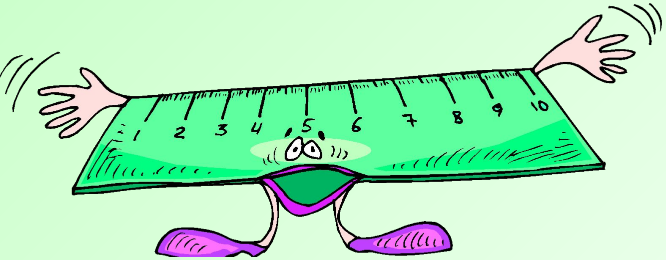
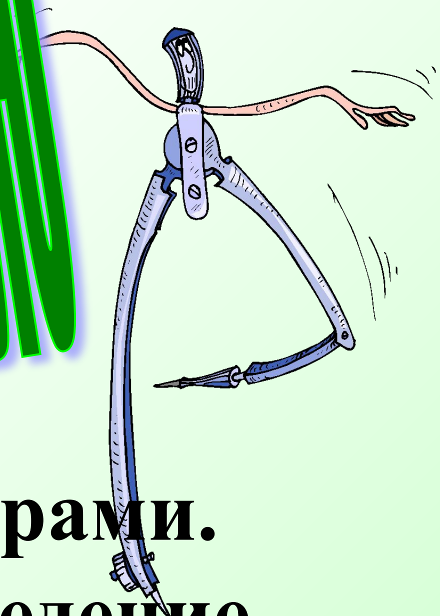


Угол между прямой и плоскостью



Угол между векторами. Скалярное произведение векторов.

11 класс.

Повторяем теорию:

- ***Как находят координаты вектора, если известны координаты его начала и конца?***

$$\overrightarrow{AB}\left\{x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A\right\}$$

- ***Как находят координаты середины отрезка?***

$$\frac{x_A + x_B}{2}; \quad \frac{y_A + y_B}{2}; \quad \frac{z_A + z_B}{2}$$

- ***Как находят длину вектора?***

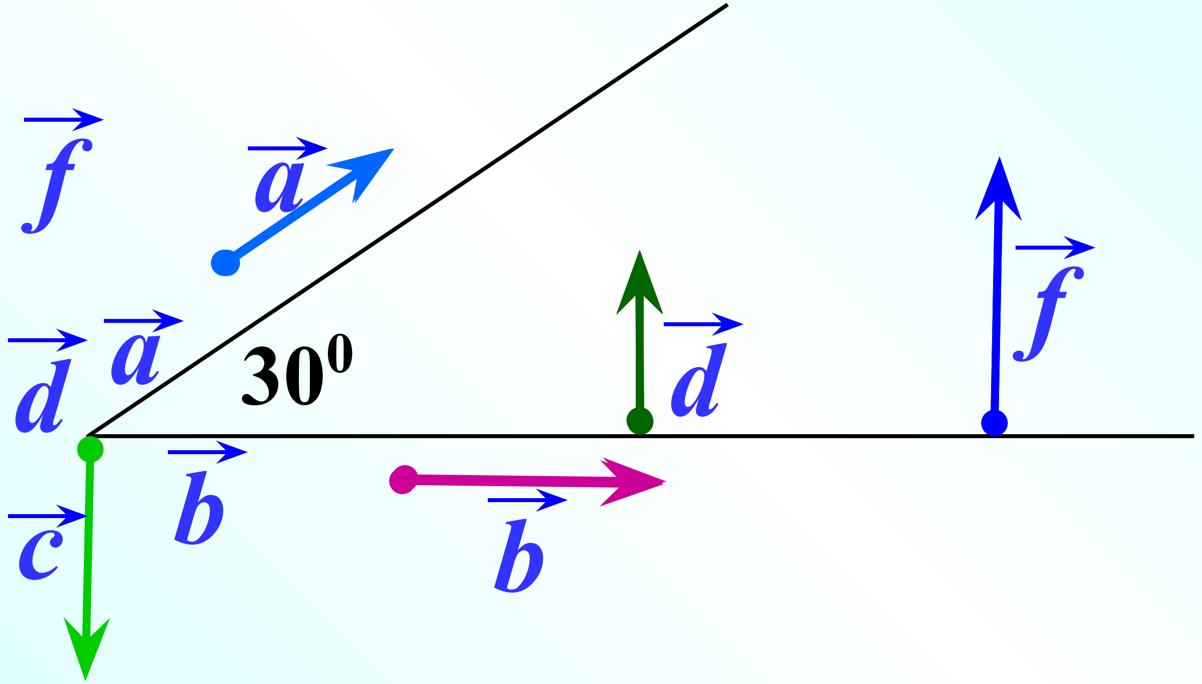
$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

- ***Как находят расстояние между точками?***

$$AB = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2 + \left(z_B - z_A\right)^2}$$

- ***Как вы понимаете выражение «угол между векторами»?***

Найти углы между векторами



$$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 30^\circ$$

$$\widehat{\vec{a}\,\vec{c}} = 120^\circ$$

$$\widehat{\vec{b}\,\vec{c}} = 90^\circ$$

$$\widehat{\vec{d}\,\vec{c}} = 180^\circ$$

$$\widehat{\vec{d}\,\vec{f}} = 0^\circ$$

Два вектора называются
перпендикулярными,
если угол между ними равен 90°.

$$\vec{b} \perp \vec{c} \qquad \vec{b} \perp \vec{d} \qquad \vec{b} \perp \vec{f}$$

Условие коллинеарности векторов: $\dfrac{x_a}{x_b} = \dfrac{y_a}{y_b} = \dfrac{z_a}{z_b}$

Какие векторы называются перпендикулярными?

Два вектора называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90°.

Условие перпендикулярности векторов:

$$x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b = 0$$

Повторяем теорию:

- ***Что называется скалярным произведением век…?***

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\varphi=x_a x_b+y_a y_b+z_a z_b$$

- ***Чему равно скалярное произведение перпендикулярных векторов?*** ***0***

- ***Чему равен скалярный квадрат вектора?***

$$\vec{a}^{\,2}=\left|\vec{a}\right|^2=x_a^2+y_a^2+z_a^2$$

- ***Свойства скалярного произведения?***

$$\overrightarrow{a^2}\ge 0 \qquad \left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}$$ **- распределительный**

$$\vec{a}\vec{b}=\vec{b}\vec{a} \qquad k\cdot\left(\vec{a}\vec{b}\right)=\left(k\vec{a}\right)\cdot\vec{b}$$ **- сочетательный**

переместительный

Косинус угла между векторами

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|} = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}\cdot\sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}}$$

№ 451 (а)

$\vec{a}\{2;-2;0\}$

$\vec{c}\{3;0;-3\}$

$\widehat{\vec{a}\,\vec{c}}$

$$\cos\varphi = \frac{2\cdot 3 + (-2)\cdot 0 + 0\cdot(-3)}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 0^2}\cdot\sqrt{3^2 + 0^2 + (-3)^2}}$$

$$= \frac{6+0+0}{\sqrt{4+4+0}\cdot\sqrt{9+0+9}} = \frac{6}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{18}} =$$

$$= \frac{6}{\sqrt{4\cdot 2\cdot 2\cdot 9}} = \frac{6}{4\cdot 3} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60^\circ$$

$\textit{Ответ}: \varphi = 60^\circ$

№ 453

Дано: $A(1;3;0)$

$B(2;3;-1), C(1;2;-1)$

Найти: $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})$

$$\overrightarrow{CA}=\{x_A-x_C;y_A-y_C;Z_A-Z_C\}$$

$$\overrightarrow{CA}=\{1-1;3-2;0-(-1)\}=\{0;1;1\}$$

$$\overrightarrow{CB}=\{x_B-x_C;y_B-y_C;Z_B-Z_C\}$$

$$\overrightarrow{CB}=\{2-1;3-2;-1-(-1)\}=\{1;1;0\}$$

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{x_ax_b+y_ay_b+z_az_b}{\sqrt{x_a^2+y_a^2+z_a^2}\cdot\sqrt{x_b^2+y_b^2+z_b^2}}$$

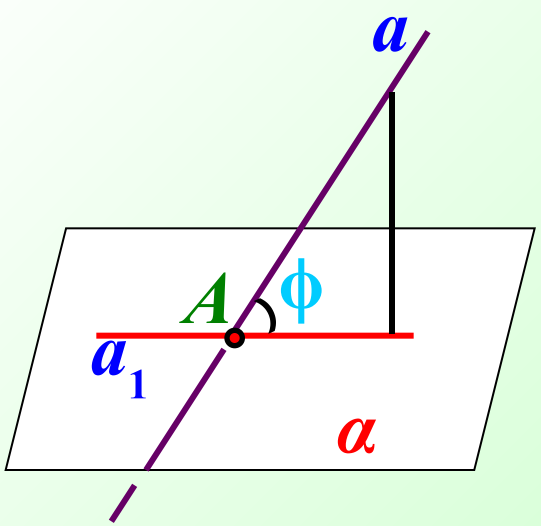
$$\cos(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})=\frac{0\cdot1+1\cdot1+1\cdot0}{\sqrt{0^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+0^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

$$\cos(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})=\frac{1}{2}\Rightarrow(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})=60^\circ$$

Ответ: $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})=60^\circ$

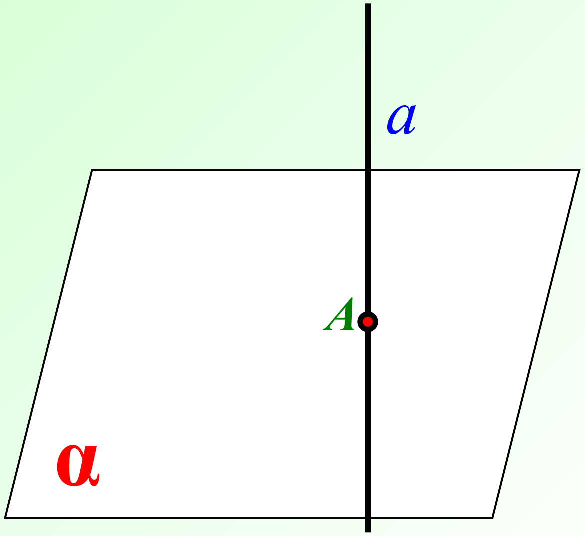
Вычисление углов между прямыми и плоскостями

- **Углом между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярную к ней, называют угол между прямой и её проекцией на плоскость.**

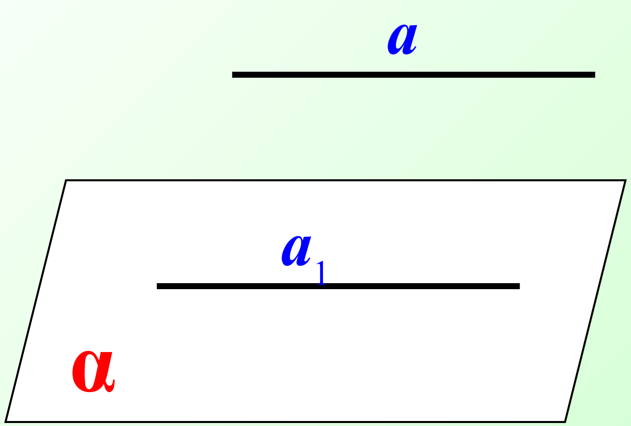


1. **Если $a \perp \alpha$, то проекцией a на α является точка А**

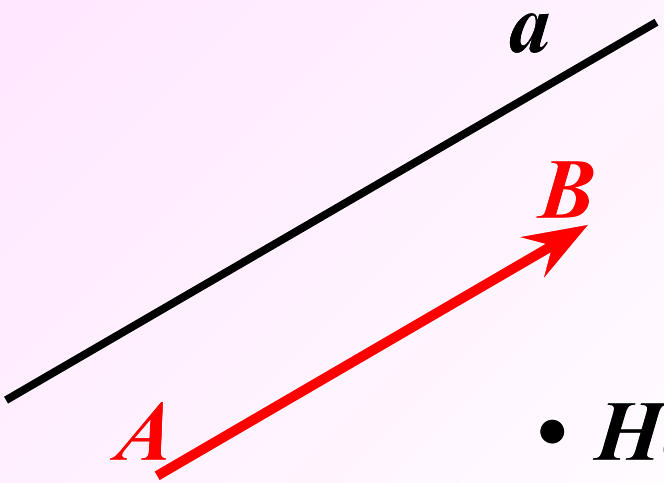
$a \cap \alpha = A$, $(a, \alpha) = 90°$



2. **Если $a \parallel \alpha$, a_1 - проекция a на α, то $a \parallel a_1$, $a_1 \subset \alpha$.**
$(a, \alpha) = 0°$



Направляющий вектор прямой.



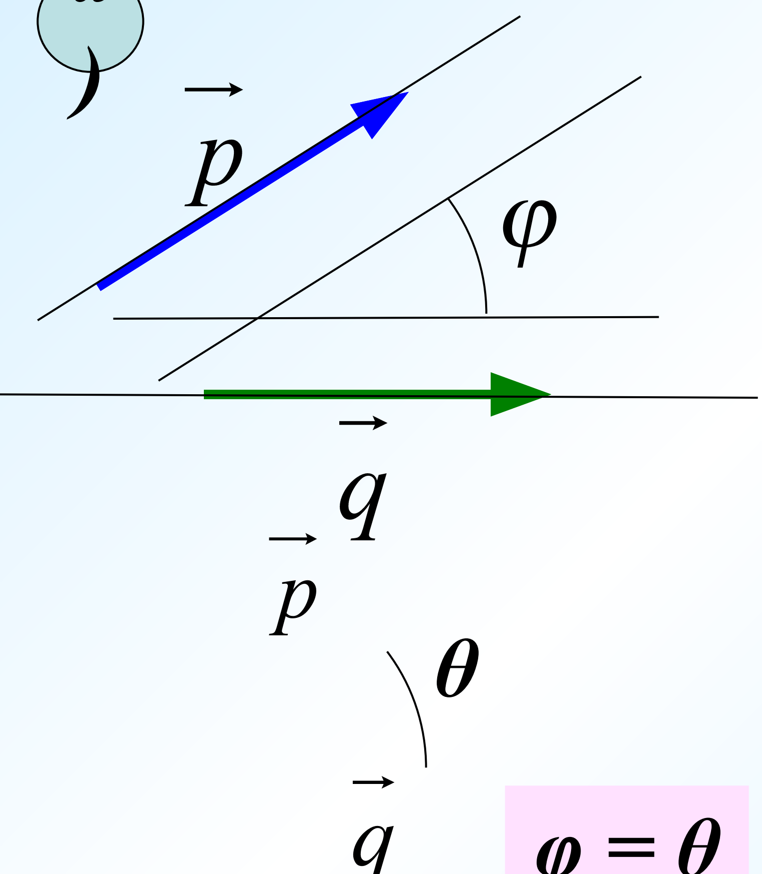
- **Ненулевой вектор называется** ***направляющим вектором*** **прямой, если он лежит на самой прямой, либо на прямой, параллельной ей.**

Визуальный разбор задач из учебника (п.48).

№1. Найти угол между двумя прямыми (пересекающимися или скрещивающимися), если известны координаты направляющих векторов этих прямых.

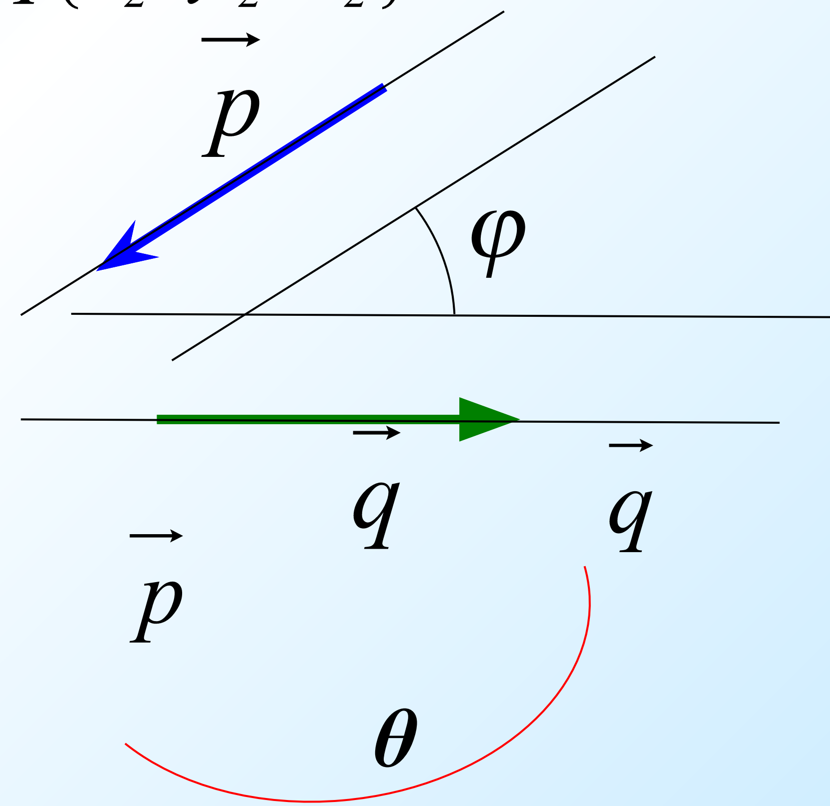
$\vec{p}\{x_1; y_1; z_1\}$ $\quad$ $\vec{q}\{x_2; y_2; z_2\}$

а)



$\varphi = \theta$

б)



$\varphi = 180^0 - \theta$

Ответ:

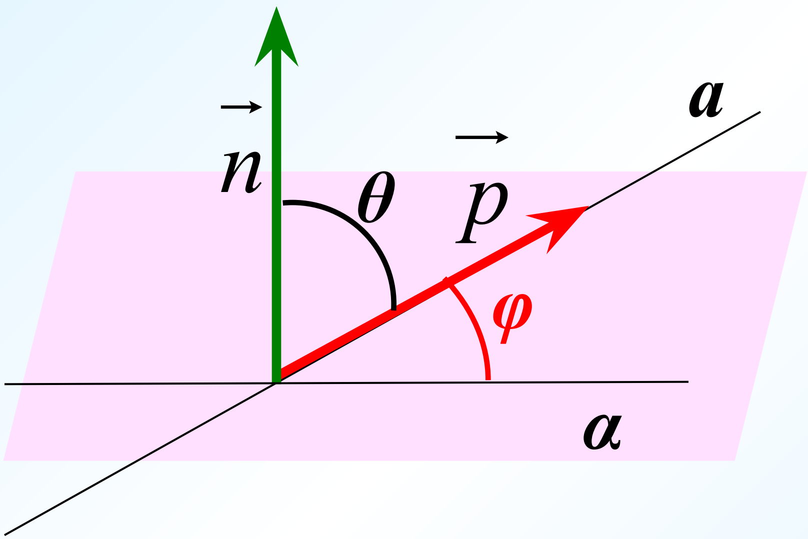
$$\cos\varphi = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

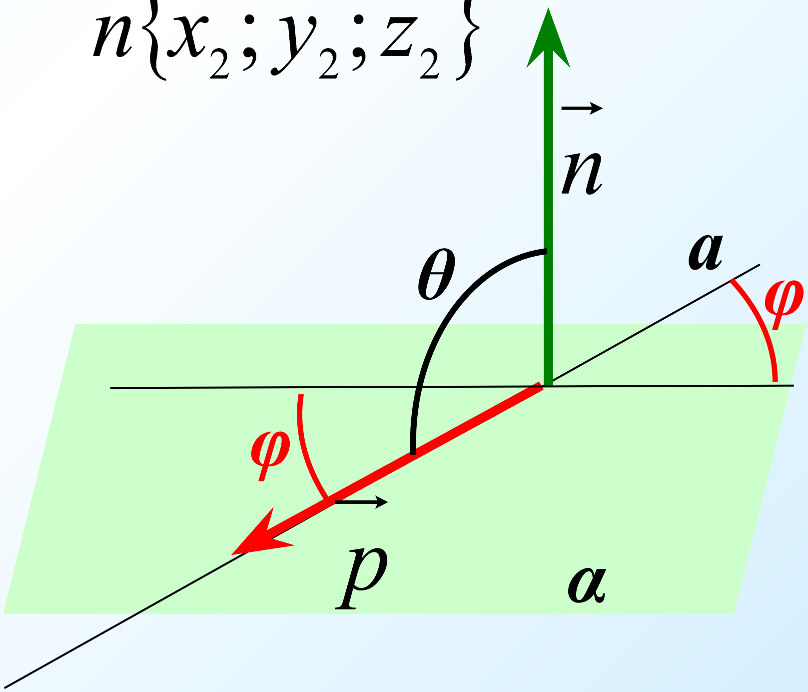
Визуальный разбор задач из учебника (п.48).

№2. Найти угол между прямой и плоскостью, если известны координаты направляющего вектора прямой и координаты ненулевого вектора, перпендикулярного к плоскости..

а) $\vec{p}\{x_1; y_1; z_1\}$

б) $\vec{n}\{x_2; y_2; z_2\}$





Дано: $A(3;-2;4)\ B(4;-1;2)$
$C(6;-3;2)\ D(7;-3;1)$

№ 464 (а)

Найти: угол между прямыми AB и CD.

Ваши предложения…

1. **Найдем координаты векторов** $\overrightarrow{AB}\{1;1;-2\}$ **и** $\overrightarrow{CD}\{1;0;-1\}$

2. **Воспользуемся формулой:**

$$\cos\varphi=\frac{|x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

$$\cos\varphi=\frac{|1\cdot1+1\cdot0+(-2)\cdot(-1)|}{\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{12}}=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow$$

$\varphi = 30^0$

№ 466 (*а*)

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - куб
точка M принадлежит AA_1
$AM : MA_1 = 3 : 1$; N – середина BC

Вычислить косинус угла между прям. MN и DD_1

1. Введем систему координат.
2. Рассмотрим DD_1 и MN.
3. Пусть $AA_1 = 4$(←почему), то

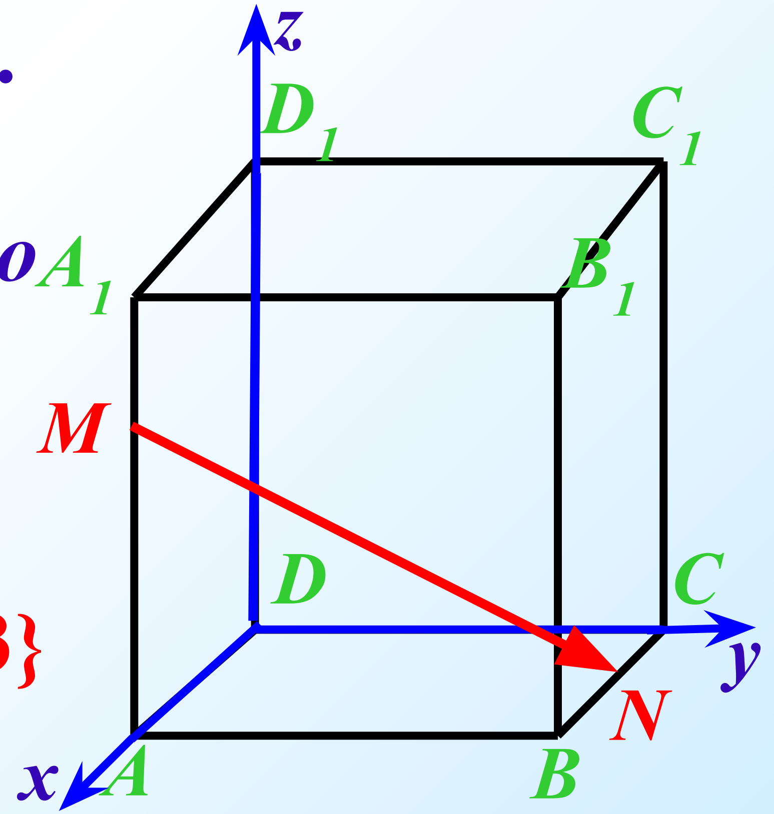
   $M\ (4; 0; 3)$ $N\ (2; 4; 0)$

4. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{DD_1}$ и $\overrightarrow{MN}$.

   $\overrightarrow{DD_1}\ \{0; 0; 4\}$, $\overrightarrow{MN}\ \{-2; 4; -3\}$

5. По формуле найдем cosφ.

$$\cos\varphi = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$



Ответ: $\frac{3}{\sqrt{29}}$

Задача *Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед; $DA = 1$; $DC = 2$; $DD_1 = 3$*

Найти угол между прямыми CB_1 и D_1B

Ваши предложения…

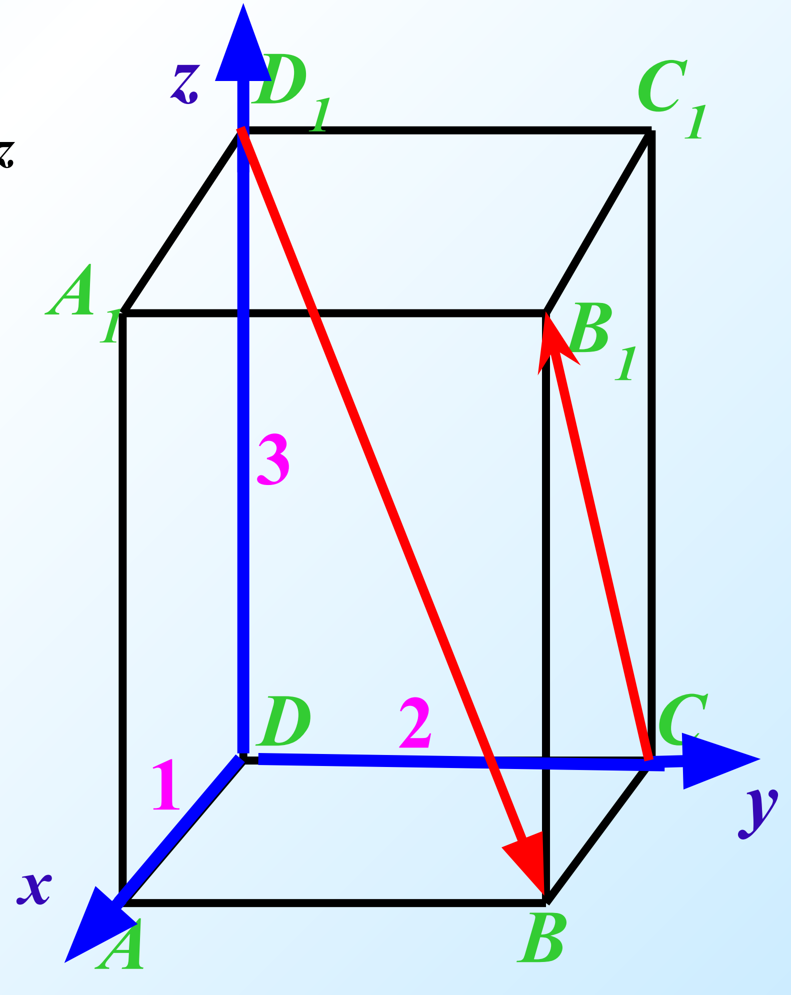
1. *Введем систему координат D_{xyz}*
2. *Рассмотрим направляющие прямых D_1B и CB_1.*

$$\overrightarrow{CB_1}\{1;0;3\} \quad \overrightarrow{D_1B}\{1;2;-3\}$$

3. *По формуле найдем cosφ.*

$$\cos\varphi = \frac{4}{\sqrt{35}}$$

$$\varphi \approx 47^0 28'$$



№ 467 (а)

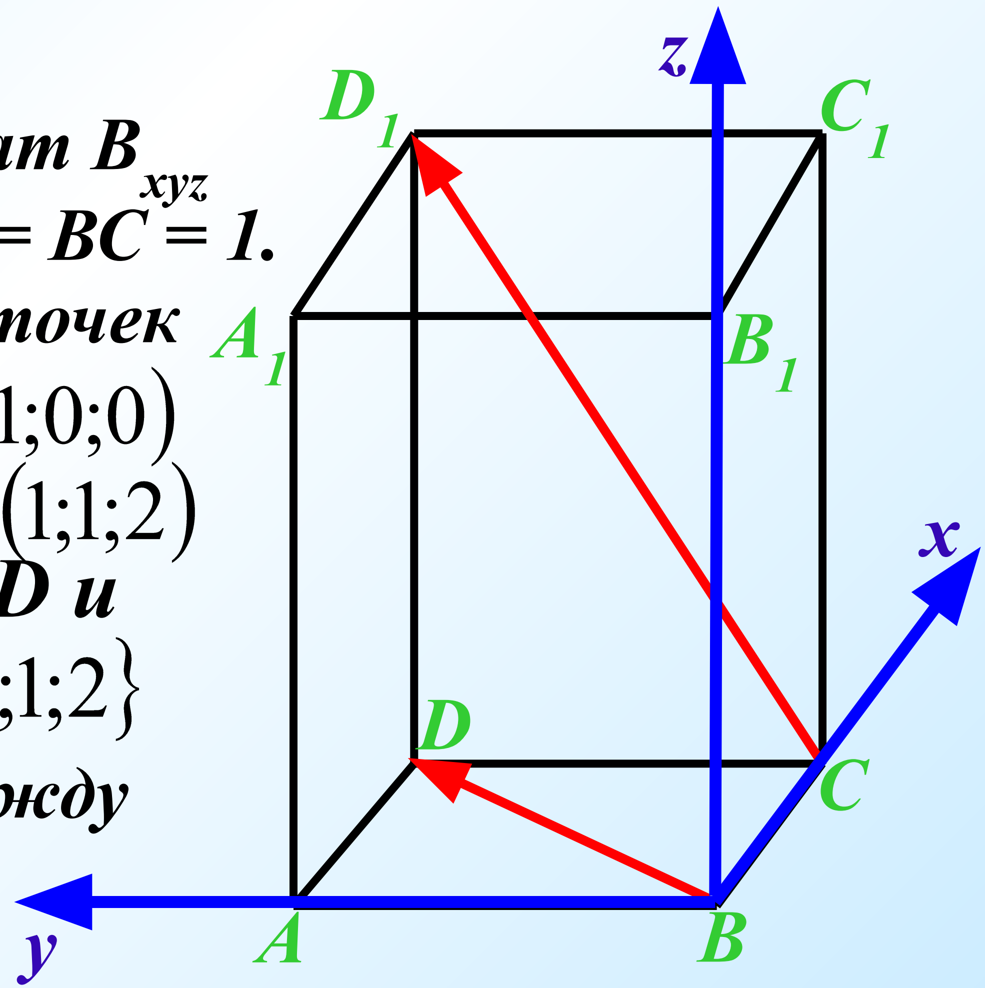
Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - прямоугольный парал-д

$AB = BC = ½\ AA_1$

Найти угол между прямыми BD и CD_1.

1 способ:

1. Введем систему координат B_{xyz}
2. Пусть $AA_1 = 2$, тогда $AB = BC = 1$.
3. Определим координаты точек B, C, D и D_1: $B(0;0;0)$, $C(1;0;0)$ $D(1;1;0)$, $D_1(1;1;2)$
4. Координаты векторов BD и CD_1: $\overrightarrow{BD}\{1;1;0\}$ $\overrightarrow{CD_1}\{0;1;2\}$
5. Находим косинус угла между прямыми: $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$



№ 467 (а)

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - прямоугольный парал-д

$AB = BC = ½ AA_1$

Найти угол между прямыми BD и CD_1.

2 способ:

1. Т.к. $CD_1 \parallel BA_1$, то углы между BD и BA_1; BD и CD_1 – равны.

2. В ΔBDA_1: $BA_1 = \sqrt{5}$, $A_1D = \sqrt{5}$

3. ΔBDA: по теореме Пифагора

$$BD = \sqrt{AD^2 + AB^2} \quad BD = \sqrt{2}$$

4. По теореме косинусов:

$$A_1D^2 = A_1B^2 + BD^2 - 2A_1B \cdot BD \cdot \cos\varphi$$

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{10}}}$$