

**ОТ ПОРЯДКА К ХАОСУ.**

**СЦЕНАРИИ ПЕРЕХОДА К ХАОСУ**

Как известно, в уравнениях ДС обычно присутствуют параметры – величины, которые считаются постоянными во времени, но от задания которых может зависеть характер реализующегося в системе режима. Можно представить себе, что система заключена в черный ящик, на котором имеется несколько ручек настройки. Предположим, что при одном положении ручек наблюдается регулярный режим динамики, например, периодические колебания, а при другом – хаос. Если мы плавно меняем настройку так, чтобы перейти от первой ситуации ко второй, то возникает вопрос: какой будет на пути к хаосу последовательность бифуркаций – событий, состоящих в качественном изменении характера наблюдаемого режима?



Об этой последовательности бифуркаций принято говорить как о *сценарии перехода к хаосу*. При этом подразумевается, что имеется сравнительно немного сценариев, являющихся в определенном смысле слова типичными, так что проблема их классификации и изучения не является сложной.

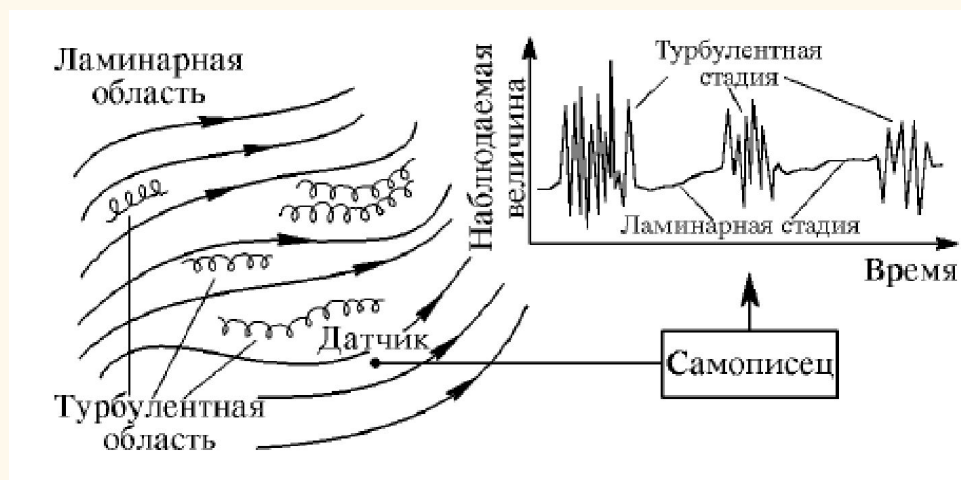
Первый из сценариев развития хаоса был предложен Л.Д. Ландау в 1944 г. и независимо от него Э. Хопфом в связи с попытками объяснить возникновение турбулентного поведения жидкости при увеличении числа Рейнольдса, основного управляющего параметра в гидродинамических задачах. Согласно предложенному сценарию, получившему название *сценария* Ландау-Хопфа, первичное течение теряет устойчивость по отношению к колебательному возмущению на некоторой частоте, затем возникшее осциллирующее течение в свою очередь становится неустойчивым по отношению к возмущению на другой частоте и т.д. В результате большого числа бифуркаций, которые сопровождаются возникновением все новых и новых частот, находящихся в иррациональных отношениях, возникает сложный режим – турбулентность.

Применительно к диссипативным ДС возникновение все новых и новых несоизмеримых частот приводит к многочастотному квазипериодическому режиму, соответствующему многомерному тору в фазовом пространстве ДС. Если число бифуркаций велико, то спектр процесса с учетом флуктуаций, всегда присутствующих в реальных системах, становится достаточно широкополосным, как и спектр хаотических колебаний. Однако многочастотные квазипериодические колебания, даже в присутствии шума, могут оставаться устойчивыми по Ляпунову. Перемешивание в такой системе будет связано только с шумом, а не с детерминированным оператором эволюции. Таким образом, сценарий Ландау-Хопфа не предполагает обязательного перехода к хаотической динамике и, строго говоря, не является сценарием развития хаоса.

Идея развития турбулентности через квазипериодические колебания в начале 1970-х г. была переработана с новых позиций Д. Рюэлем, Ф. Такенсом и С. Ньюхаусом. Согласно их утверждению, после рождения первых трех составляющих с несоизмеримыми частотами может возникать странный аттрактор, который характеризуется неустойчивостью принадлежащих ему фазовых траекторий. По Рюэлю и Такенсу, странный аттрактор и есть математический образ турбулентного движения. Ситуация, когда имеет место большее число бифуркаций, практически невероятна. Однако данное предположение оказалось справедливым, хотя и для другого сценария – перехода к хаосу через каскад (бесконечную последовательность) бифуркаций удвоения периода. Около 1976 г. американский физик Митчел Фейгенбаум обнаружил ряд замечательных закономерностей, сопровождающих этот тип перехода к хаосу. О нем говорят теперь как о *сценарии Фейгенбаума*. Он первым обнаружил присущие этому сценарию свойства *универсальности* и *скейлинга* (масштабного подобия) и разработал их теоретическое обоснование – метод *ренормализационной группы* (сокращенно ренормгруппы или РГ).

Сущность концепции универсальности состоит в том, что имеется обширное множество нелинейных диссипативных систем различной природы (*класс универсальности*), которые не просто демонстрируют одну и ту же последовательность бифуркаций, но проявляют у порога возникновения хаоса одни и те же количественные закономерности скейлинга с присущими данному классу универсальности определенными значениями масштабных констант.

В 1980 г. появилось сообщение французских исследователей И. Помо и П. Манневилля, положившее начало изучению группы сценариев перехода к хаосу через перемежаемость. В гидродинамике давно известна так называемая перемежающаяся турбулентность, когда течение в определенных пространственных областях имеет плавный, ламинарный характер, но они чередуются с областями нерегулярного, турбулентного течения. Благодаря тому, что турбулентные области перемещаются, меняют форму, возникают и исчезают, перемежающийся характер носит также зависимость наблюдаемых величин от времени в фиксированной точке пространства.



Помо и Манневилль указали несколько возможных ситуаций, когда в ДС может возникнуть перемежаемость, и наметили классификацию, введя в рассмотрение три типа перемежаемости.

Таким образом, существует три основных сценария перехода ДС к хаосу:

- 1) через каскад бифуркаций удвоения периода;
- 2) через перемежаемость;
- 3) через квазипериодические режимы.

Обсудим, почему типичными оказываются именно перечисленные выше сценарии и в каком отношении друг другу они находятся.

Предположим сначала, что в системе реализуется простейший устойчивый периодический режим динамики, т. е. предельный цикл. Чтобы увидеть, что с ним может произойти при изменении параметров, воспользуемся методом сечения Пуанкаре. Пусть для простоты цикл «живет» в трехмерном фазовом пространстве, тогда имеем двумерное отображение Пуанкаре

$$x' = f(x, y), \quad y' = g(x, y). \quad (40)$$

Точка, где предельный цикл протыкает поверхность сечения, есть неподвижная точка этого отображения:  $x_0 = f(x_0, y_0)$ ,  $y_0 = g(x_0, y_0)$ . Исследование на устойчивость заключается в том, что мы подставляем в (40)  $x = x_0 + \tilde{x}$ ,  $y = y_0 + \tilde{y}$  и, удерживая члены первого порядка, получаем

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}' \\ \tilde{y}' \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{J}} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}, \quad (41)$$

где

$$\hat{\mathbf{J}} = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0), & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0), & g_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

— матрица Якоби. Рассмотрим задачу на собственные векторы и собственные значения этой матрицы:

$$\mu_s \begin{pmatrix} \tilde{x}_s \\ \tilde{y}_s \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{J}} \begin{pmatrix} \tilde{x}_s \\ \tilde{y}_s \end{pmatrix}, \quad s = 1, 2. \quad (42)$$

Если ввести след и детерминант матрицы  $\hat{\mathbf{J}}$ , соответственно,

$$\begin{aligned} S &= f_x(x_0, y_0) + g_y(x_0, y_0), \\ J &= f_x(x_0, y_0)g_y(x_0, y_0) - f_y(x_0, y_0)g_x(x_0, y_0), \end{aligned} \quad (43)$$

то собственные числа получаются как корни квадратного уравнения

$$\mu^2 - S\mu + J = 0. \quad (44)$$

Именно,

$$\mu_{1,2} = \frac{S}{2} \pm \sqrt{\frac{S^2}{4} - J}. \quad (45)$$



Произвольный вектор возмущения представляется в виде линейной комбинации двух собственных векторов. При каждом обходе предельного цикла возмущение, отвечающее каждому собственному вектору, умножается на соответствующее собственное число — мультипликатор  $\mu$ . Поэтому цикл устойчив, если оба мультипликатора по модулю меньше единицы, и неустойчив, если хотя бы один мультипликатор по модулю больше единицы. Две пограничные линии области устойчивости на плоскости  $(S, J)$  можно получить из (44), полагая  $\mu = 1$  или  $\mu = -1$ , что дает, соответственно,

$$1 - S + J = 0 \quad (46)$$

или

$$1 + S + J = 0. \quad (47)$$

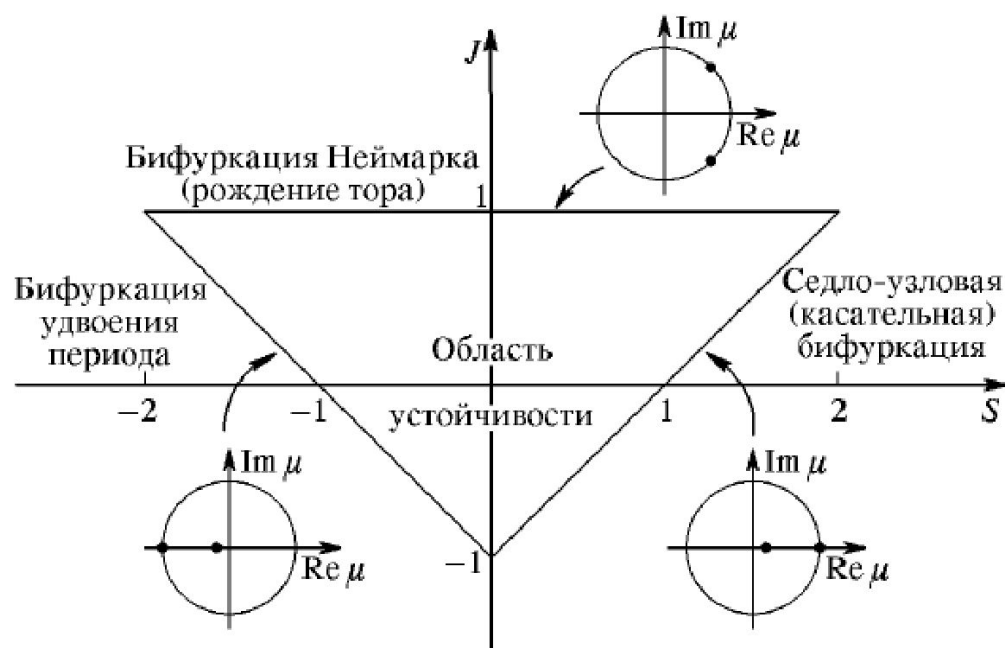
Третья пограничная линия находится из соотношения (45): если под знаком квадратного корня стоит отрицательное число, то модуль мультипликатора будет единичным при

$$J = 1. \quad (48)$$

Область внутри треугольника, образованного линиями (46) - (48), есть область устойчивости.

Предположим, что наша система содержит параметр  $A$ . Когда мы варьируем этот параметр, будут изменяться координаты неподвижной точки  $x_0, y_0$ , и, соответственно, след и детерминант матрицы Якоби:  $S = S(A), J = J(A)$ . При этом на плоскости  $(S, J)$  мы будем двигаться вдоль некоторой кривой. Ясно, что типичным надо признать выход из треугольника устойчивости через одну из его сторон (рис. ).





Предположим сначала, что выход осуществляется через левую границу треугольника. На пороге потери устойчивости мультипликатор равен минус единице. Это значит, что при однократном обходе цикла малое возмущение меняет знак (рис. ). Чтобы траектория замкнулась, нужно совершить еще один обход, так что период вновь возникшего движения оказывается вдвое больше, чем у исходного.



Если присущая системе нелинейность такова, что при увеличении амплитуды возмущения происходит его стабилизация, то результатом бифуркации будет рождение цикла с периодом, вдвое большим исходного. Это бифуркация удвоения периода. Очень часто при дальнейшем изменении параметра за ней вновь следуют бифуркации такой же природы. Последовательность бифуркационных значений параметра накапливается к определенному пределу, критической точке, которая является в определенном смысле границей хаоса. Это сценарий перехода к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода — сценарий Фейгенбаума.

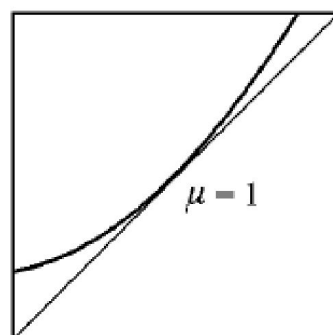
Пусть теперь выход из треугольника устойчивости осуществляется через правую сторону. Тогда на пороге потери устойчивости мультипликатор обращается в плюс единицу. При однократном обходе цикла возмущенная траектория почти замыкается (рис. ). Чтобы выяснить, как трансформируется динамика, оказывается необходимым обязательно учитывать нелинейность. Когда мы движемся к точке бифуркации, к устойчивому предельному циклу приближается неустойчивый цикл; в точке бифуркации оба цикла сливаются и исчезают. Таким образом, в рассматриваемой области фазового пространства вообще не остается периодических орбит.



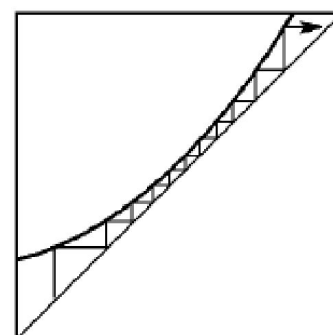
Для одномерного отображения бифуркация состоит в слиянии и исчезновении пары неподвижных точек. В момент бифуркации график касается биссектрисы, что определяет ее название — *касательная бифуркация*. После бифуркации на месте исчезнувшей пары неподвижных точек остается узкий «коридор», прохождение которого изображающей точкой требует тем большего числа итераций, чем ближе мы находимся к точке бифуркации. После прохождения «коридора» траектория уходит в удаленные области фазового пространства. ]



До бифуркации



Момент бифуркации



После бифуркации

Если динамика в этих удаленных областях характеризуется неустойчивостью по отношению к возмущению начальных условий и если обеспечена реинжекция, т. е. через некоторое время траектория оказывается вновь на входе в «коридор», то наблюдается переход к хаосу через перемежаемость типа I по Пома и Манневиллю. Прохождение через «коридор» интерпретируется как ламинарная стадия процесса, а блуждание в удаленных областях фазового пространства как турбулентная стадия.

Наконец, третий вариант выхода из треугольника устойчивости отвечает пересечению его верхней границы  $J = 1$ . При этом пара комплексно-сопряженных мультипликаторов  $\mu$  и  $\mu^*$  переходит через единичную окружность. Возмущенная траектория извивается вокруг теряющего устойчивость предельного цикла (рис. 10), причем угол поворота за один обход определяется аргументом комплексного числа  $\mu$ . Как видно из соотношения (45),  $\mu_{1,2} = S/2 \pm i(1 - S^2/4)^{1/2}$ , так что аргумент зависит от того, в какой именно точке мы пересекаем сторону треугольника. Если величина  $(\arg \mu)/2\pi$  выражается рациональным числом  $p/q$ , то возмущенная орбита замыкается после  $q$  обходов.





Если нелинейность в системе способствует стабилизации возмущения, то происходит бифуркация рождения тора, если  $(\arg \mu)/2\pi$  - иррациональное число, или периодической орбиты – резонансного цикла на торе, если оно рациональное. Области периодичности имеют вид языков, подходящих сверху к линии  $J = 1$ , а в промежутках между языками реализуются квазипериодические режимы. Бифуркация рождения тора из предельного цикла носит название *бифуркации Неймарка-Сакера*. Дальнейшая эволюция аттрактора при изменении управляющего параметра может быть разнообразной и сложной, но в общем можно сказать, что реализуется та ситуация, о которой говорят как о переходе к хаосу через квазипериодичность.

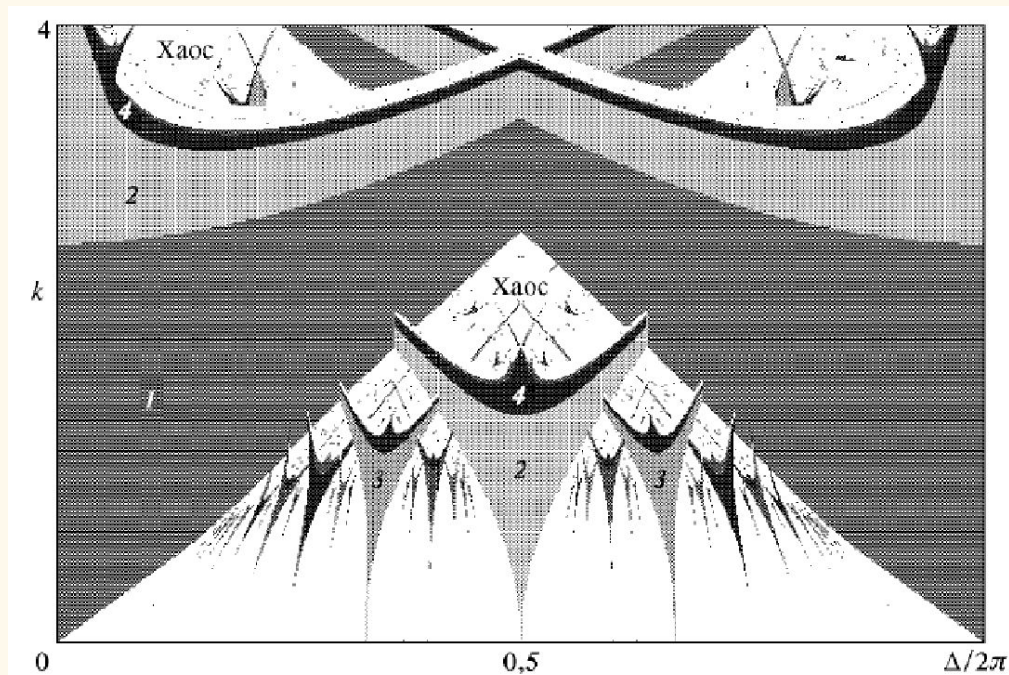
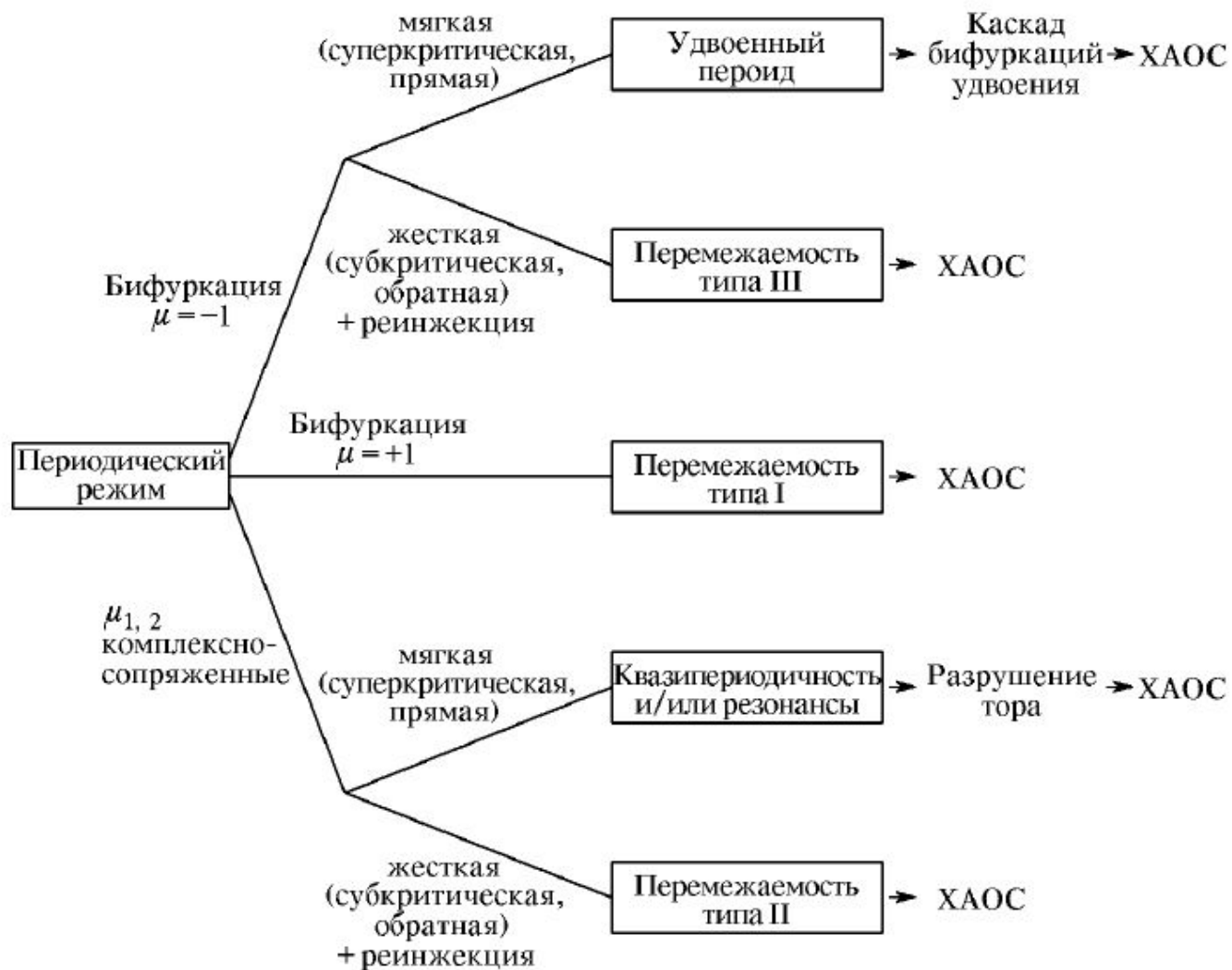


Рис. 5.11. Карта динамических режимов на плоскости параметров отображения Заславского (5.11) при  $d = 0,3$ . Цифрами указаны значения периода внутри некоторых языков Арнольда. Белым цветом обозначены квазипериодические (в нижней части рисунка) и хаотические (в верхней части) режимы



Различные пути потери устойчивости предельного цикла и ассоциирующиеся с ними сценарии возникновения хаоса

## Переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода. Универсальность Фейгенбаума.

### Каскад бифуркаций удвоения в логистическом отображении

$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n). \quad (2)$$

Логистическое отображение (также известное как квадратичное отображение, или отображение Фейгенбаума) является полиномиальным отображением, которое широко используется в качестве типичного примера того, как сложное, хаотическое поведение может возникать из очень простых нелинейных уравнений. Данное отображение было введено еще в 1845 г. П.Ф. Ферхюльстом для описания динамики популяции в замкнутой среде. Относительная численность особей  $x_{n+1}$  в  $(n + 1)$ -й год пропорциональна численности особей в предыдущий год ( $x_n$  принимает значения от 0 до 1 и отражает численность популяции в  $n$ -м году), а также свободной части жизненного пространства, которая пропорциональна  $(1 - x_n)$ , т.е.  $x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n)$ .

Положительный параметр  $\mu$  характеризует скорость роста популяции.

Другой отличительной особенностью, которая обусловила известность логистического отображения, явилось то, что это одномерное отображение послужило примером для демонстрации и изучения формирования хаотического аттрактора в результате бесконечной последовательности бифуркаций удвоения периода циклов. При каждой такой бифуркации период возрастает вдвое, что соответствует «уполовиниванию» частоты, т.е. появлению субгармоники в спектре колебаний. По этой причине такую последовательность бифуркаций называют также **субгармоническим каскадом**.

Сценарий перехода к хаосу через каскад удвоения периода очень часто наблюдается в динамических системах с непрерывным временем и является одним из основных механизмов развития хаоса. На примере одной из самых простейших дискретных одномерных систем можно очень наглядно пронаблюдать и проанализировать данный каскад. А все его свойства и закономерности будут в точности проявляться и в более сложных дискретных и непрерывных системах.

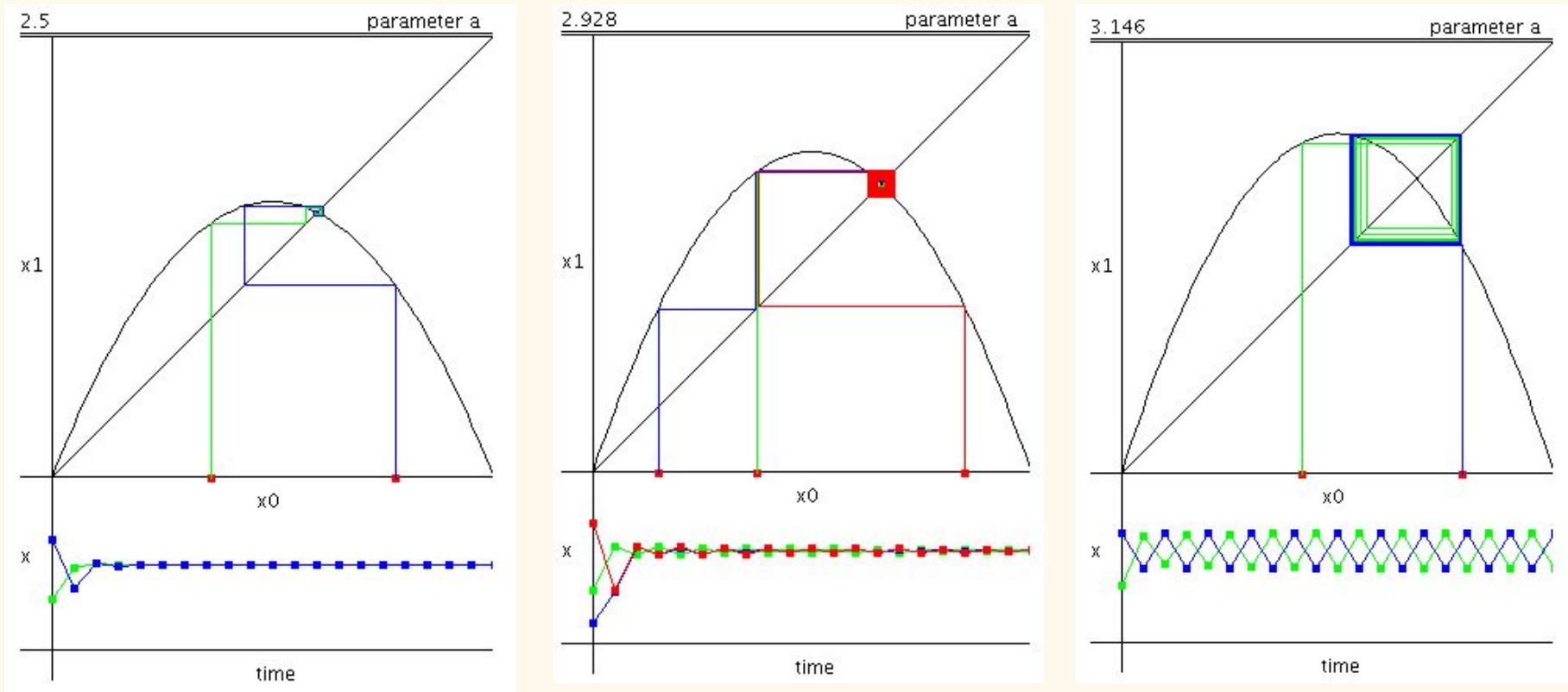
Теория перехода к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода была развита на базе модельных одномерных отображений М. Фейгенбаумом, поэтому сам данный бифуркационный механизм получил название **сценария Фейгенбаума**.



## Механизм последовательного увеличения периода циклов отображения (2)

Как мы уже показывали, при  $1 < \mu < 3$  отображение (2) имеет неподвижную точку (цикл периода 1)  $x^* = 1 - 1/\mu$ . Она устойчива, если ее мультипликатор  $|\rho| = |f'(x^*)| = |2 - \mu| < 1$ .

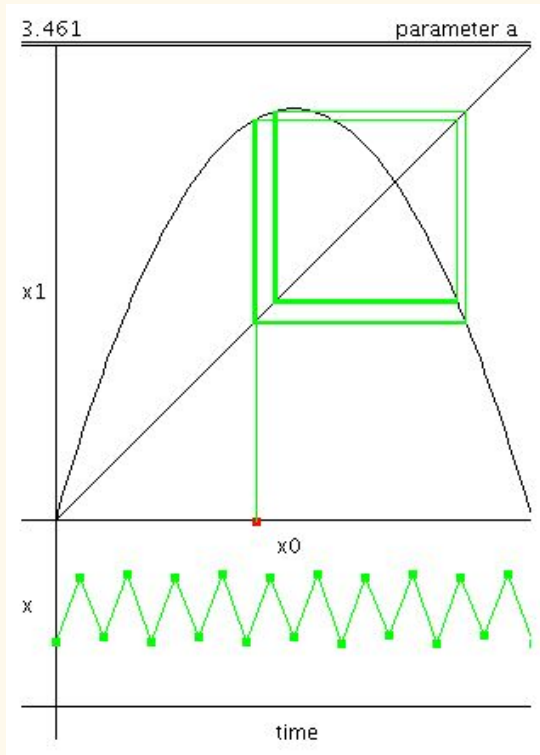
При  $\mu_1 = 3.0$  мультипликатор принимает значение  $\rho = -1$ . Неподвижная точка теряет свою устойчивость и происходит **бифуркация удвоения периода**.



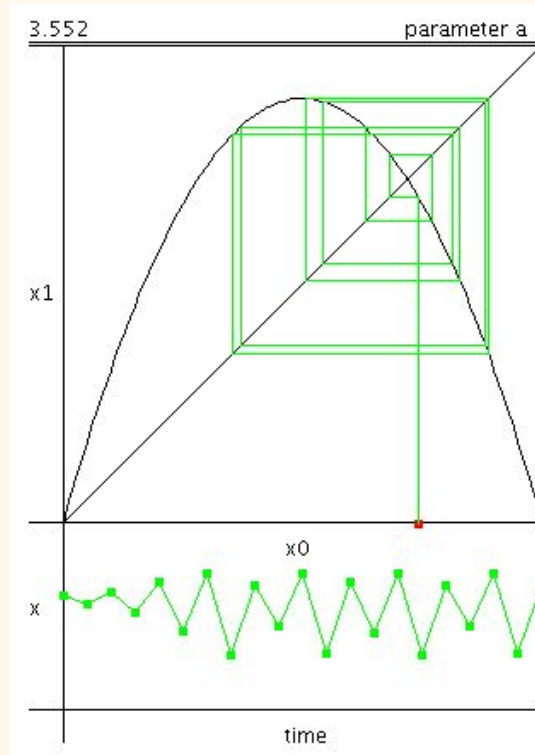
2-цикл устойчив в области значений параметра  $3.0 < \mu < 1 + \sqrt{6} = 3.44949\dots$

При  $\mu_2 = 3.44949\dots$  точки  $x^*_1$  и  $x^*_2$  цикла одновременно теряют устойчивость, когда их мультипликаторы ( $f^{(2)'(x^*_1)}$  и  $f^{(2)'(x^*_2)}$ ) в свою очередь достигают значения -1. После бифуркации удвоения образуется **цикл периода 4** отображения (2).

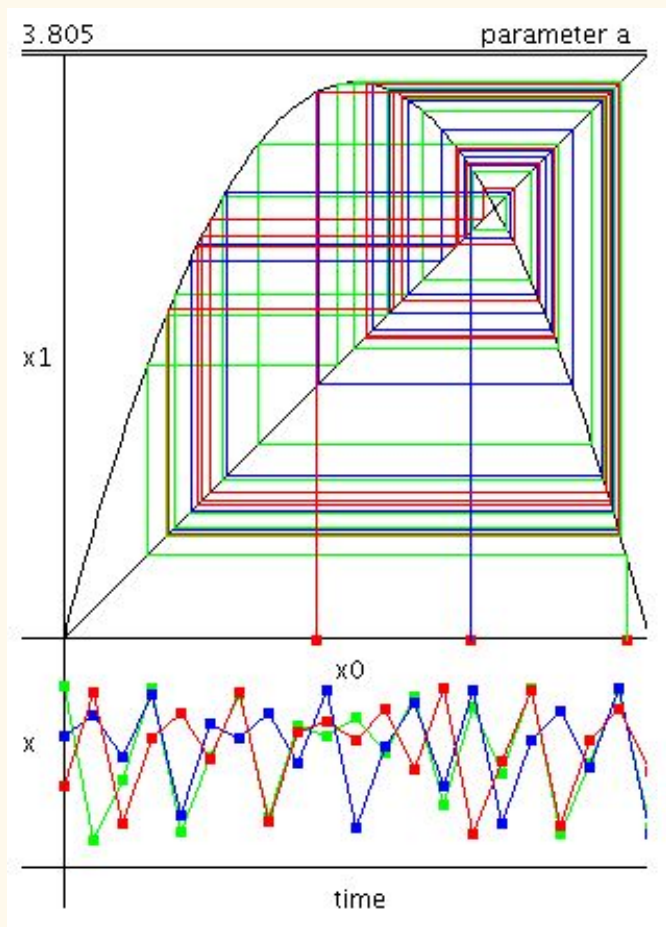
Цикл  
периода 4



Цикл  
периода 8



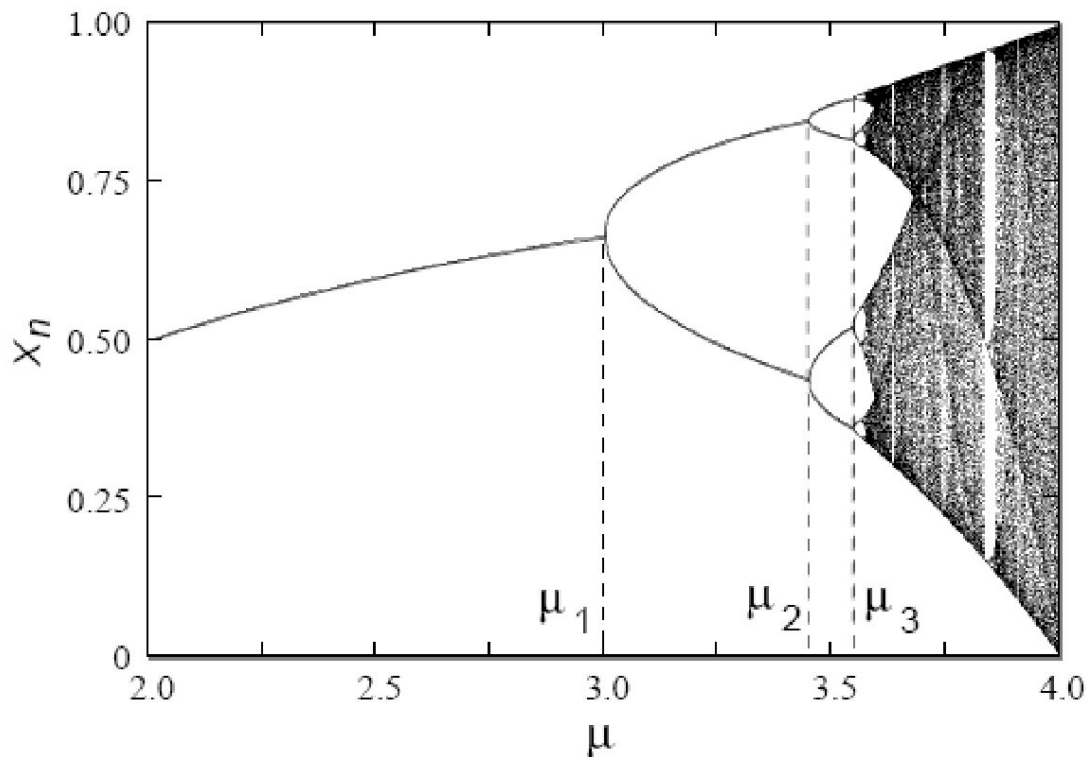
Наблюдается последовательность бифуркаций удвоения и появление циклов периода  $2^n$ .



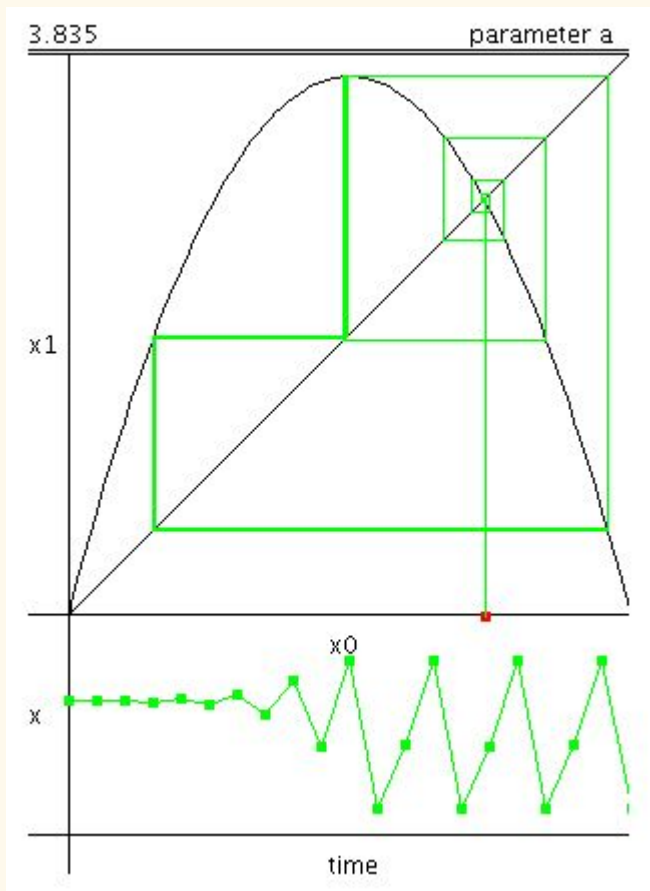
При значении  $\mu$  приблизительно равном 3.57, начинается хаотическое поведение, а каскад удвоений заканчивается. Колебания больше не наблюдаются. Небольшие изменения в начальных условиях приводят к несопоставимым отличиям дальнейшего поведения системы во времени, что является основной характеристикой хаотического поведения.

## Бифуркационная диаграмма логистического отображения

Чтобы увидеть весь процесс усложнения циклов отображения (2) по мере роста параметра  $\mu$ , строится **однопараметрическая бифуркационная диаграмма**, по горизонтальной оси которой отложены значения  $\mu$ , а по вертикальной – значения  $x_n$ , принадлежащие установившемуся режиму (время  $n$  должно быть достаточно большим). Бифуркационным точкам, где происходит смена устойчивого режима, соответствуют точки ветвления диаграммы. Оценив их положение на диаграмме, можно определить тем самым области устойчивости циклов.



$$\begin{aligned}\mu_1 &= 3.0 \\ \mu_2 &= 3.449490 \dots \\ \mu_3 &= 3.544090 \dots \\ \mu_4 &= 3.564407 \dots \\ \mu_5 &= 3.568759 \dots \\ \mu_6 &= 3.569692 \dots \\ \mu_7 &= 3.569891 \dots \\ \mu_8 &= 3.569934 \dots\end{aligned}$$



Большинство значений  $\mu$ , превышающих 3.57, демонстрируют хаотическое поведение, однако существуют узкие, изолированные «окна» значений  $\mu$ , при которых система ведет себя регулярно. Обычно их называют «окнами периодичности». К примеру, начиная со значения  $1 + \sqrt{8}$  (приблизительно 3.83), существует набор значений параметров  $\mu$ , при которых наблюдаются колебания между тремя значениями, а для больших значений  $\mu$  - между 6, потом 12 и т.д. Фактически, в системе можно найти периодические колебания с любым количеством значений – периодов циклов. Последовательность смены количества значений удовлетворяет порядку Шарковского.

При  $\mu = 4$ , значения отображения покидают единичный интервал и расходятся при любых начальных условиях.

## «Окна периодичности»

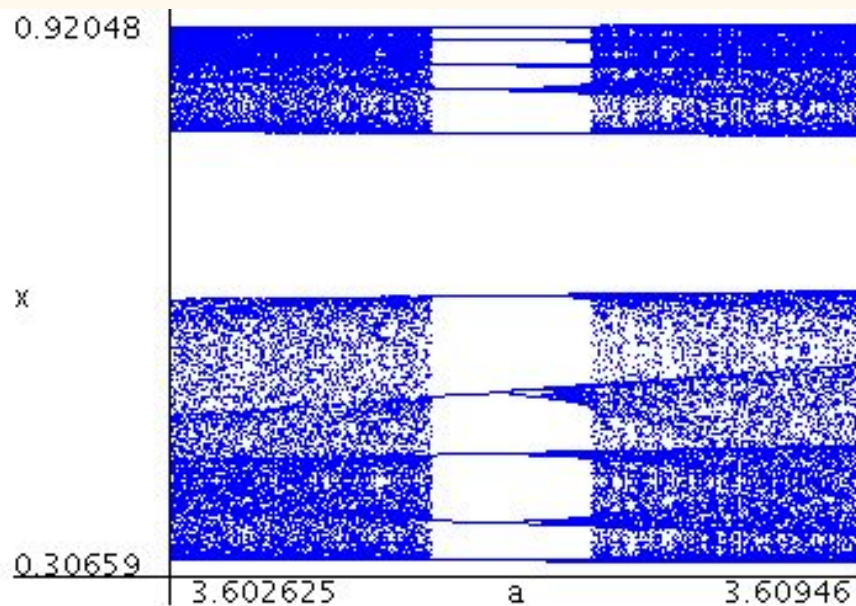
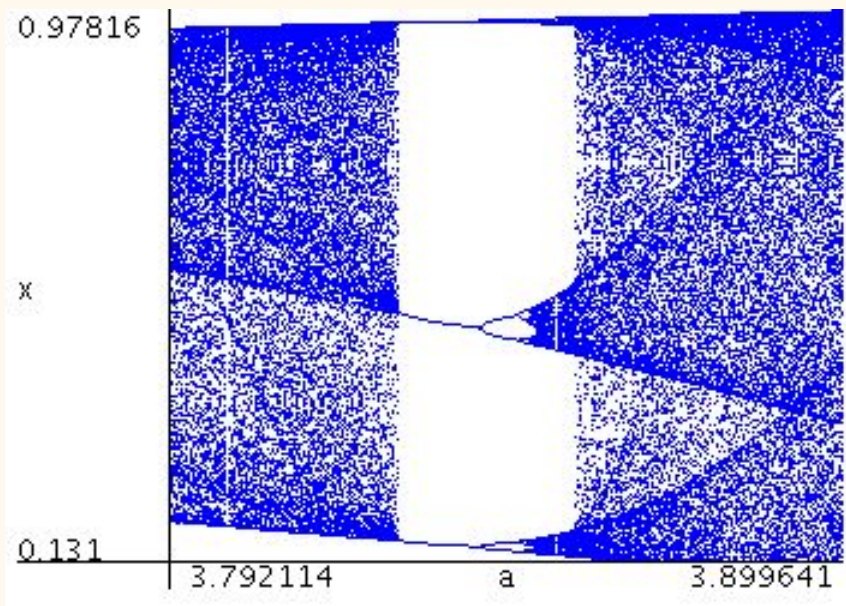
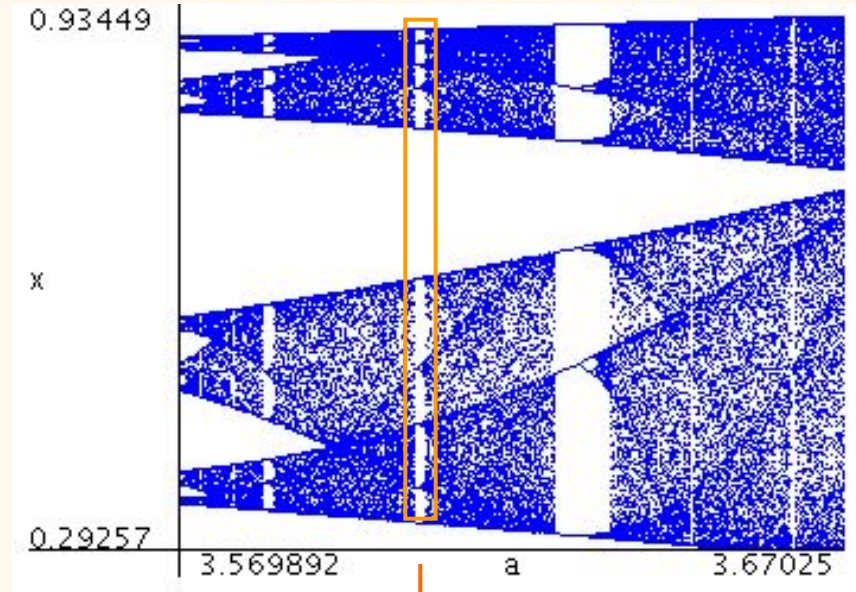
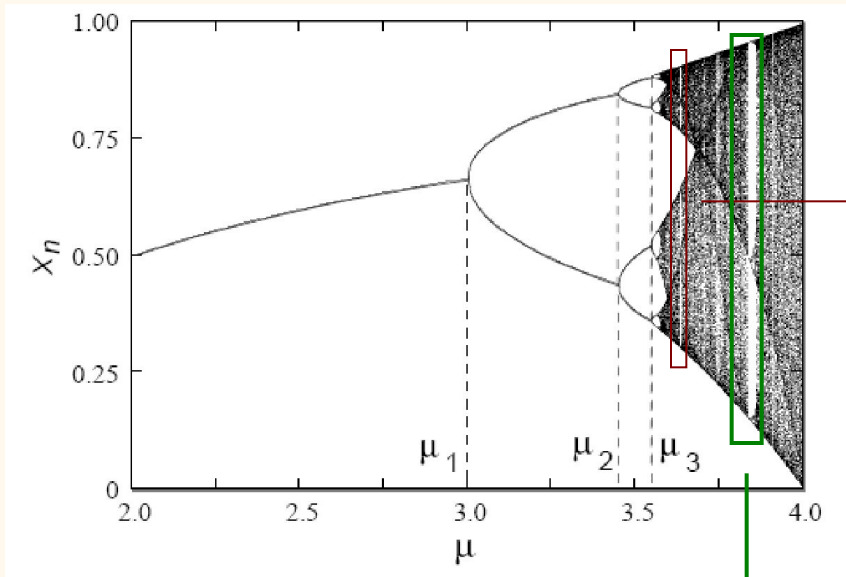
Кроме хаотических траекторий, логистическое отображение имеет в закритической области множество периодических траекторий с различными периодами. В работе А.Н. Шарковского устанавливается иерархия циклов гладкого необратимого отображения отрезка. Цикл периода  $M$  считается сложным, чем цикл периода  $N$ , если из существования  $M$ -цикла следует существование  $N$ -цикла. Говорят, что между периодами существует отношение  $M \rightarrow N$ . Согласно теореме Шарковского, это отношение упорядочивает циклы следующим образом (так называемый *порядок Шарковского*):

$$3 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 * 2 \rightarrow 5 * 2 \rightarrow 7 * 2 \rightarrow \dots \rightarrow 3 * 2^2 \rightarrow \\ \rightarrow 5 * 2^2 \rightarrow 7 * 2^2 \rightarrow \dots \rightarrow 2^3 \rightarrow 2^2 \rightarrow 2 \rightarrow 1.$$

Самым сложным в смысле Шарковского оказывается цикл периода 3. Из его существования следует существование циклов любого периода.

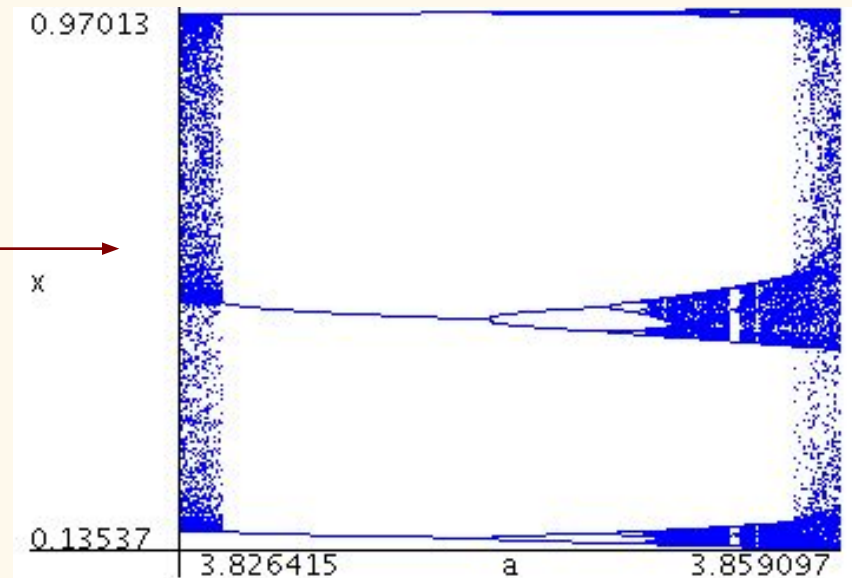
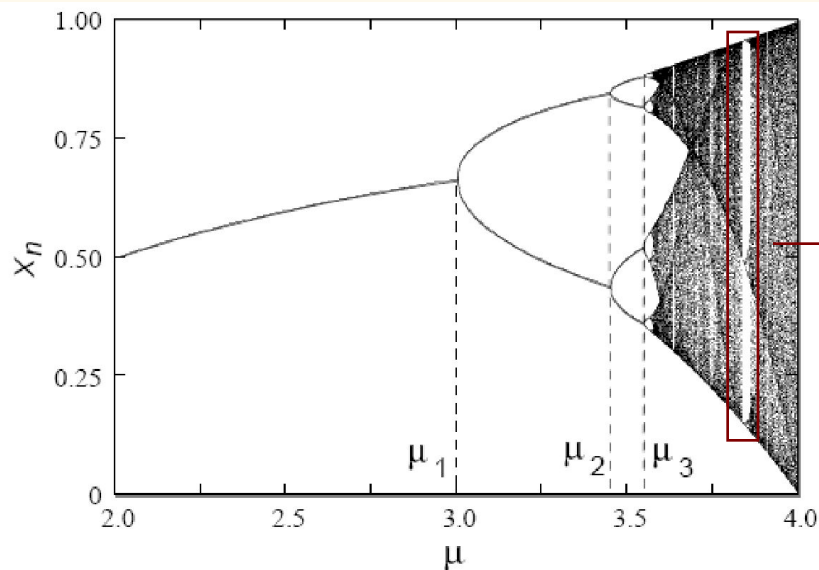
Было также доказано, что из существования у отображения цикла периода 3 следует существование хаотических последовательностей.







Расположение области устойчивости (*окон периодичности*) циклов различного периода в закритической области подчиняется следующей закономерности: 6, 5, 3, 6, 5, 6, 4, 6, 5, 6 ... Наиболее широкое окно устойчивости соответствует циклу периода 3, который возникает в результате касательной бифуркации и с ростом параметра претерпевает последовательность бифуркаций удвоения периода с образованием хаоса. Аналогично возникают и эволюционируют в окнах устойчивости циклы с другими периодами. Вообще говоря, в закритической области в сколь угодно малой окрестности любого значения параметра существует окно устойчивости какого-либо цикла. Период цикла может быть столь велик, а окно устойчивости столь узко, что цикл невозможно наблюдать даже в численных экспериментах.



Если проанализировать последовательность бифуркационных значений параметра  $\mu$ , соответствующих бифуркациям удвоения, то можно увидеть, что они сходятся к некоторому пределу, который обозначим как  $\mu_\infty$ . При  $\mu = \mu_\infty$  число периодических точек становится бесконечным, а за пределами этого (конечного) значения  $\mu$  поведение итераций для большинства  $\mu$  хаотично. Предположим, что значения  $\mu_k$  сходятся по закону геометрической прогрессии. Тогда мы можем оценить параметры сходимости, записав ее в следующем виде

$$\mu_\infty - \mu_k = c / \delta^k, \quad (49)$$

где  $c$  и  $\delta$  - постоянные, по величине больше 1:  $c, \delta = \text{const} > 1$ .

Так как напрямую рассчитать  $\mu_\infty$  затруднительно, выразим  $\delta$  для конечных  $k$ :

$$\mu_\infty - \mu_{k-1} = c / \delta^{k-1}, \quad (50)$$

$$\mu_\infty - \mu_k = c / \delta^k, \quad (51)$$

$$\mu_\infty - \mu_{k+1} = c / \delta^{k+1}. \quad (52)$$

Вычтем (51) из (50) и (52) из (51):

$$\frac{\mu_k - \mu_{k-1}}{c} = \delta^{1-k} - \delta^{-k}, \quad (53)$$

$$\frac{\mu_{k+1} - \mu_k}{c} = \delta^{-k} - \delta^{-k-1}. \quad (54)$$

Поделим теперь (53) на (54) и получим следующее соотношение:

$$\frac{\mu_k - \mu_{k-1}}{\mu_{k+1} - \mu_k} = \frac{\delta^{1-k} - \delta^{-k}}{\delta^{-k} - \delta^{-k-1}} = \delta. \quad (55)$$

Данное соотношение позволяет оценить  $\delta$  из результатов расчета  $\mu_k$ . Зная  $\delta$ , можно получить оценку для  $c$ , а затем и для  $\mu_\infty$ . Результаты расчетов дают

$$\delta = 4.669209\dots, \quad c = 2.637\dots, \quad \mu_\infty = 3.5699457\dots$$

Таким образом, при  $k \rightarrow \infty$  скорость сходимости бифуркационных значений  $\mu_k$  стремится к некоторому конечному пределу, равному  $\delta = 4.669209\dots$ , которая называется **универсальной константой Фейгенбаума**. Как показали численные исследования, величина  $\delta$  не зависит от конкретного вида отображения. Главное, чтобы оно было унимодальным (имело один экстремум) и чтобы экстремум был квадратичным.

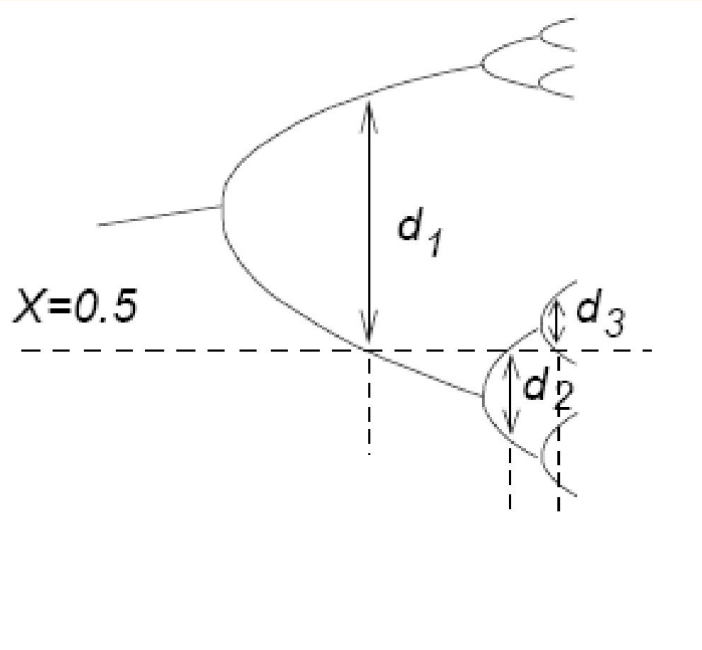
## Универсальные константы Фейгенбаума

Скорость схождения бифуркационных значений параметра  $\mu$  к критическому значению  $\mu_\infty$  определяется *универсальной константой Фейгенбаума*  $\delta$ . Значения переменной отображения  $x_n$  также демонстрируют самоподобную структуру, и их эволюция также характеризуется универсальной константой, отражающей закономерность в процессе дробления масштабов амплитуд.

Чтобы определить эту константу, введем в рассмотрение значение параметра  $\square\mu_k$ , соответствующее суперустойчивым циклам. Заметим, что каждый  $2^k$  – цикл логистического отображения рождается при  $\mu_k$ , имея собственное значение, равное  $+1$ , и теряет устойчивость при  $\mu_{k+1}$  по мере достижения собственным значением величины  $-1$ . Таким образом, при некотором  $\mu_k < \square\mu_k < \mu_{k+1}$  устойчивость  $2^k$  – цикла максимальна:

$$\left| \frac{df^{2k}(\bar{\mu}_k, x_i)}{dx} \right| = \prod_{j=0}^{2^k-1} |f'(\mu_k, x_i)| = 0, \quad (56)$$

где  $x_i$  – любая точка, принадлежащая суперциклу. Данное условие означает, что хотя бы одна точка, принадлежащая суперциклу, должна лежать на экстремуме функции  $f(\mu, x)$ , где производная обращается в нуль. Для отображения (2) это точка  $\square x \equiv 1/2$  :  $\rho = f'(x^*) = 2 - \mu = 0$ , производная обращается в нуль при  $\mu = 2$ . Подставляем этой значению в выражение для координаты неподвижной точки  $x^* = 1 - 1/\mu$  и получаем суперустойчивую точку  $\square x = 1/2$ .



Относительно уровня суперустойчивой точки  $x = 0.5$  определим расстояния между подобными точками ветвей бифуркационной диаграммы, соответствующих бифуркациям удвоения. На рисунке они обозначены как  $d_k$ . Можно заметить, что  $d_k$  располагаются попеременно то выше, то ниже линии  $x = 0.5$ . Это соответствует знакопеременности  $d_k$  с ростом  $k$ .

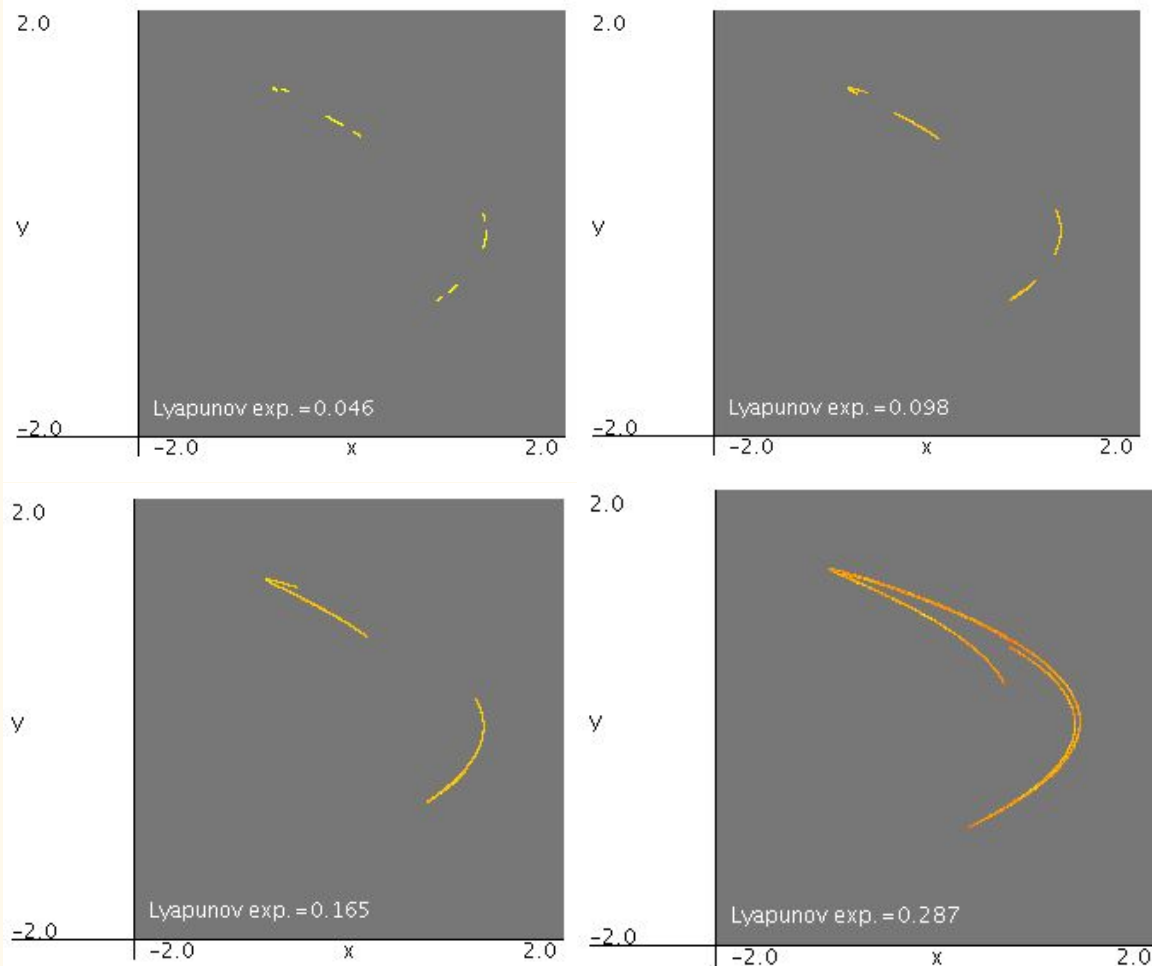
Процесс дробления масштабов с ростом параметра  $\mu$  продолжается бесконечно (последовательность удвоений периода) и демонстрирует универсальные свойства, которые заключаются в следующем:

$$a = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d_k}{d_{k+1}} = -2.5029\dots \quad (57)$$

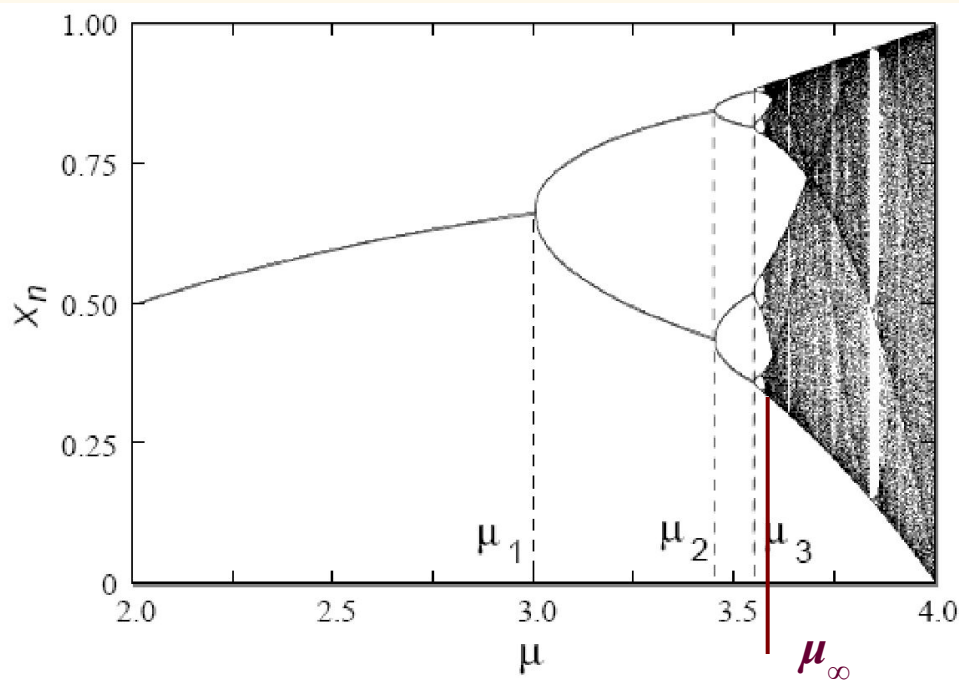
Масштабный множитель в пределе сходится к некоторому значению, которое называется *универсальным масштабным множителем*  $a$ .

## Каскад бифуркаций связанности

За критической точкой (значение параметра  $\mu \approx 3.57$ , соответствующее возникновению хаотического поведения) в системах с фейгенбаумовским сценарием развития хаоса наблюдается **каскад бифуркаций связанности**. Бифуркация *связанности* представляет собой объединение частей (лент) хаотического аттрактора, посещаемых изображающей точкой в определенном порядке.



Обозначим значения параметра, соответствующие бифуркациям связности как  $\mu_i^c$  (индекс  $i = 1, 2, \dots$  возрастает с приближением к критической точке справа налево). Расположение на оси значений параметра интервалов существования периодических аттракторов  $2^i$  (- период цикла отображения) до критической точки и  $2^i$  – связанных хаотических множеств за критической точкой обладает симметрией относительно критической точки. Фрагменты многосвязанных хаотических множеств в соответствующих точках каждого отрезка обладают свойством подобия с масштабными множителями, стремящимися к универсальной константе  $a$ . Скорость накопления значений  $\mu_i^c$  к критической точке равна универсальной константе Фейгенбаума  $\delta$ .

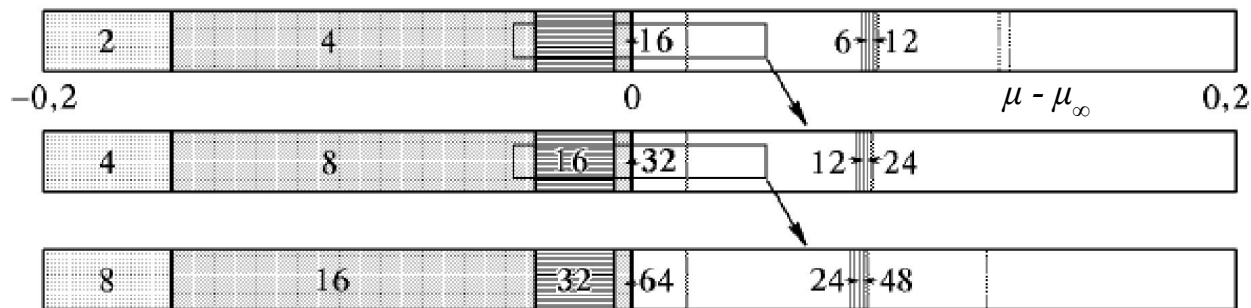




## Скейлинг

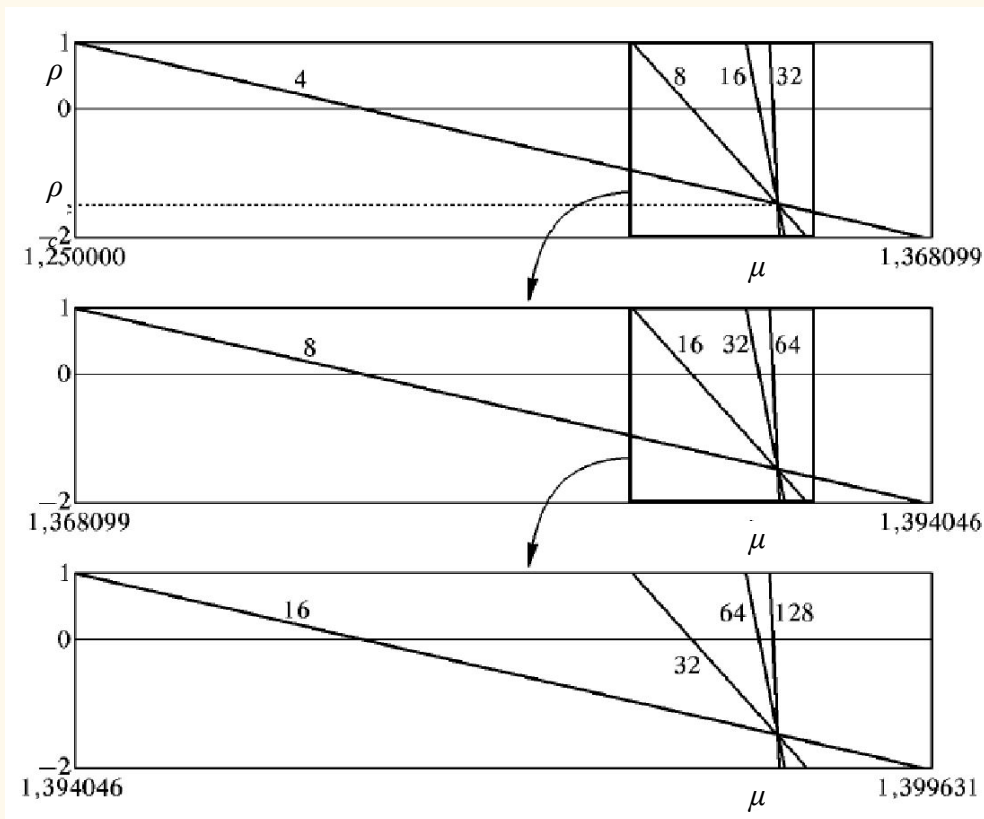
Обнаруженный Фейгенбаумом закон сходимости есть не что иное, как частное проявление свойства скейлинга: если при некотором значении  $\Delta\mu$  наблюдается бифуркация удвоения периода, то при отклонении от критической точки  $\Delta\mu/\delta$  оператор эволюции за удвоенный период времени должен быть подобен, т.е. тоже отвечать моменту бифуркации.

Более общая формулировка состоит в том, что структура разбиения оси параметра  $\mu$  на области различного типа динамики воспроизводит себя при уменьшении масштаба относительно критической точки в  $\delta$  раз. Иными словами, в сходственных точках  $\mu$  и  $\mu_\infty + (\mu - \mu_\infty)/\delta$  реализуются подобные режимы динамики. Это означает, во-первых, совпадение характера режимов (периодический, хаотический), а во-вторых, возможность определения характеристик одного режима по характеристикам другого с помощью надлежащего пересчета. Этот пересчет сопровождается изменением масштаба времени, так что характерный период движений возрастает при приближении к критической точке, а в ней самой обращается в бесконечность.



Пересчет масштаба по оси параметра  $\mu$  производится в  $\delta = 4,669\dots$  раза

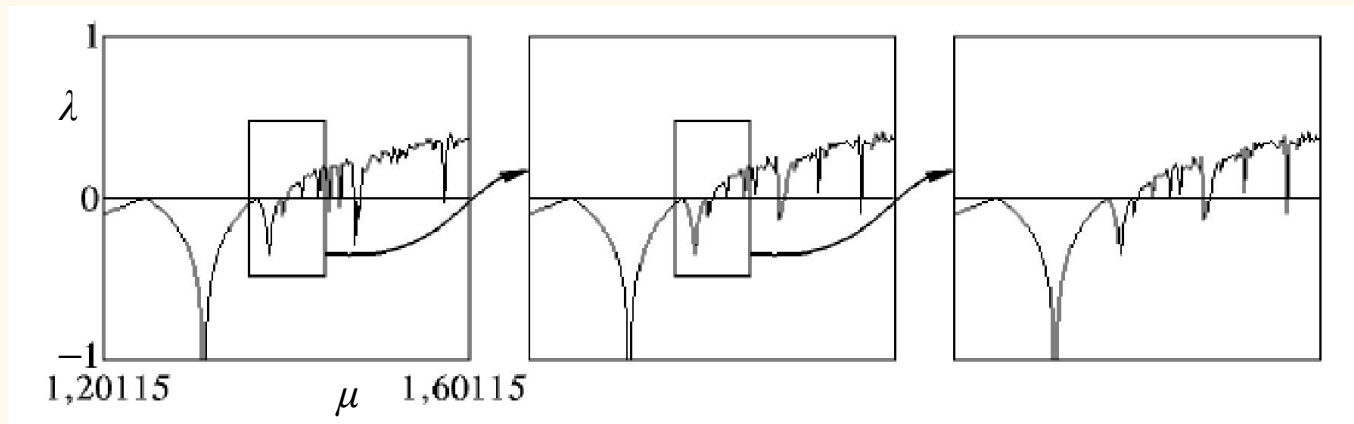
Одним из проявлений скейлинга является характерная зависимость мультипликаторов от параметра для циклов периода  $2^k$  вблизи критической точки.



В момент рождения каждого цикла его мультипликатор равен  $+1$ . При увеличении параметра  $\mu$  мультипликатор уменьшается, проходит через  $0$  и затем через  $-1$ . В это момент цикл перестает быть устойчивым, и рождается цикл удвоенного периода также с мультипликатором  $+1$ . Графики, отвечающие циклам периода  $2^k$  и  $2^{k+1}$ , переходят друг в друга при пересчете масштаба по оси параметра  $\mu$  на фактор  $\delta$ . Точка пересечения кривых кривых

зависимости  $\rho_k$  от  $\mu$  для циклов разного периода (в асимптотике по  $k$ ) есть критическая точка. Величина мультипликатора в точке пересечения стремится к универсальной константе  $\rho_c = -1,60119\dots$

## Иллюстрация скейлинга на графике ляпуновского показателя



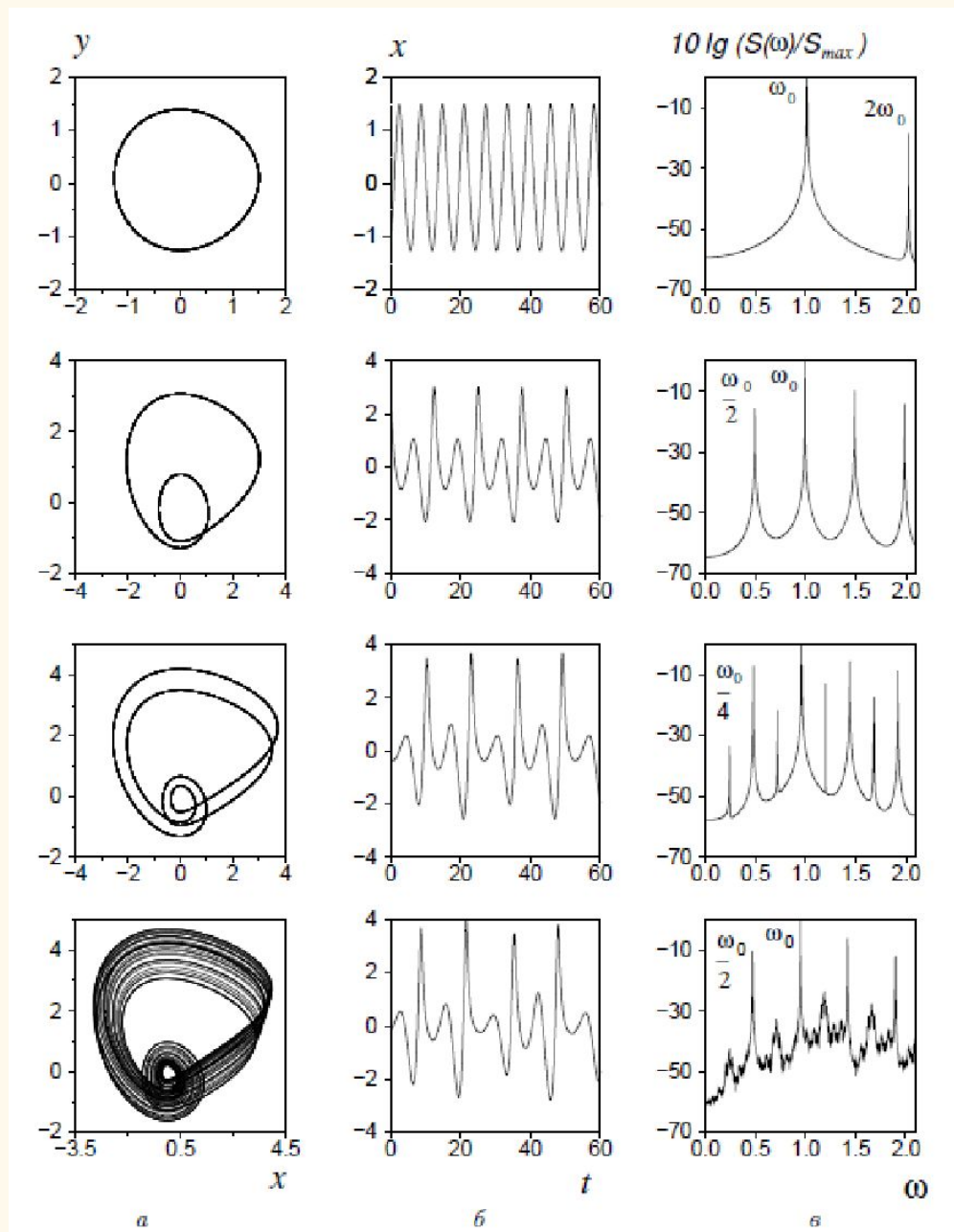
Масштаб по горизонтальной оси пересчитывается в  $\delta = 4,6692\dots$  раза относительно критической точки, а по вертикальной оси – в 2 раза. При пересчете управляющего параметра по правилу  $\Delta\mu \rightarrow \Delta\mu/\delta$  получается режим динамики, подобный исходному, но с удвоенным временным масштабом. Поэтому ляпуновский показатель (который имеет размерность обратного времени) пересчитывается по правилу  $\lambda \rightarrow \lambda/2$ . Из рисунка видно, что ожидаемый скейлинг подтверждается с высокой точностью, растущей при переходе к более глубоким уровням.

## О переходе к хаосу через удвоения периода в реальных системах и моделях в виде дифференциальных уравнений

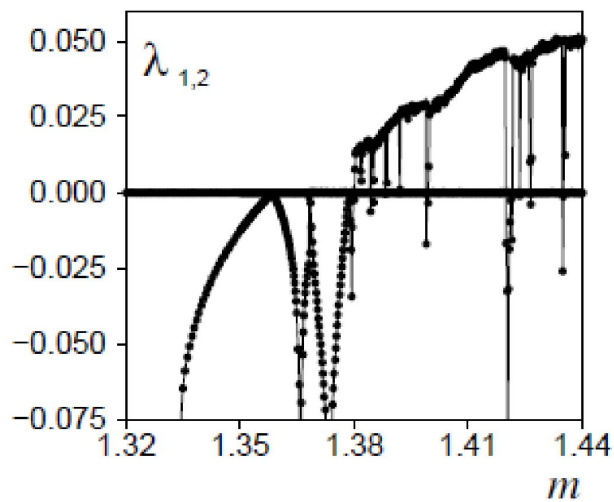
В реальных нелинейных диссипативных системах очень часто можно наблюдать переход к хаосу через удвоения периода. Из-за неизбежного присутствия шумов удастся различить в эксперименте только ограниченное число бифуркаций. Тем не менее, общая картина перехода очень характерна и демонстрирует многие тонкие детали, присущие данному классу универсальности. Оценки констант Фейгенбаума, полученные в экспериментах, находятся в разумном соответствии с теорией.

Рассмотрим переход к хаосу через удвоения периода на примере ГИН:

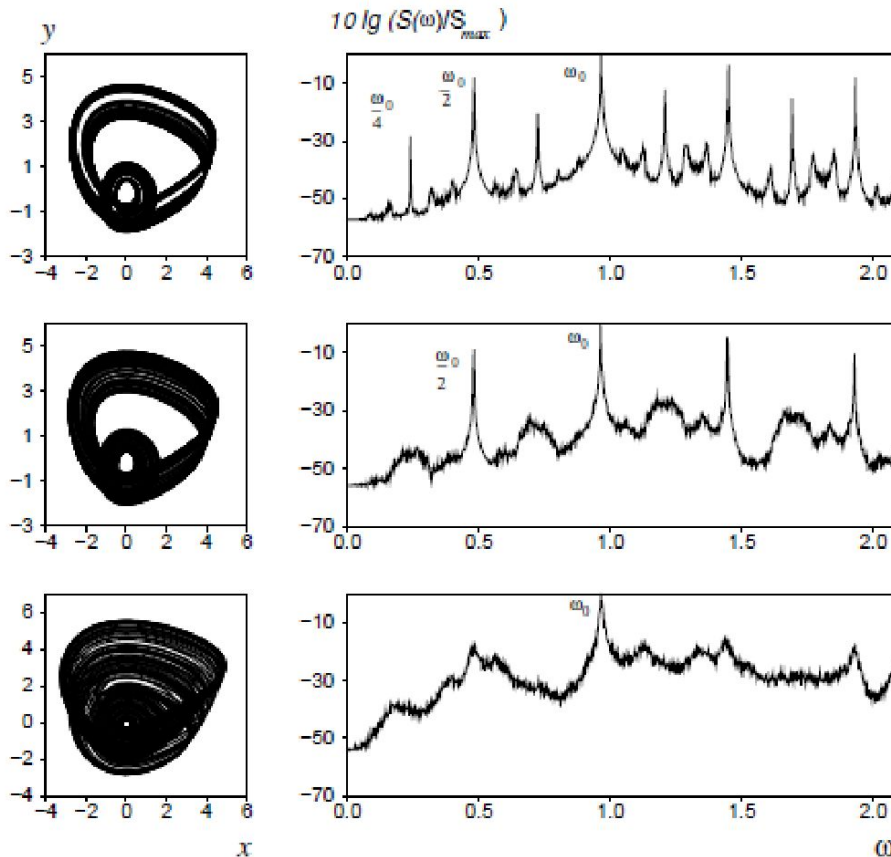
$$\dot{x} = tx + y - xz, \quad \dot{y} = -x, \quad \dot{z} = -gz + 1(x)x^2, \quad (10)$$



Последовательность бифуркаций удвоения периода в ГИН



Зависимость двух старших показателей Ляпунова от параметра  $m$  при  $g = 0.2$



Проекции фазовых портретов и спектры при бифуркациях связанности в ГИН

Универсальная постоянная Фейгенбаума  $\delta$  оценивалась по выражению:

$$\delta = \lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k = \frac{\Delta_k}{\Delta_{k+1}} = \frac{\alpha_{k+1} - \alpha_k}{\alpha_{k+2} - \alpha_{k+1}}, \quad (58)$$

где  $\alpha_k = m_k$  ( $g = \text{const}$ ) или  $\alpha_k = g_k$  ( $m = \text{const}$ ).

Расчеты проводились для значений  $k = 1, 2, 3, 4$ , т.е. до точки бифуркации удвоения цикла периода 16. Как показали эксперименты, разумная точность оценки универсальной постоянной Фейгенбаума достигается уже в этом случае, хотя соотношение (58) справедливо лишь в пределе при  $k \rightarrow \infty$ .

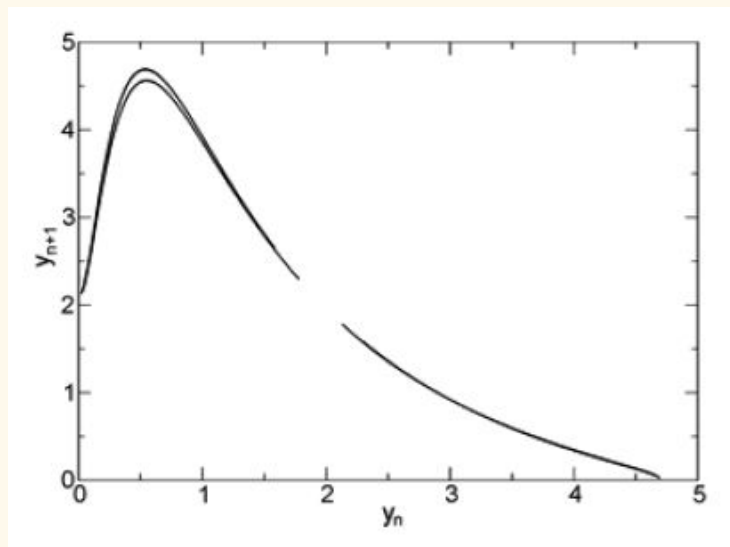
Критические значения параметров  $m^*$  (или  $g^*$ ), отвечающие точке бифуркации рождения хаотического аттрактора, оценивались по формуле:

$$\alpha^* = \frac{\alpha_k \delta - \alpha_{k-1}}{\delta - 1}, \quad \text{где } k = 4. \quad (59)$$

$k$	$g = 0.3$			$m = 1.45$		
	$m_k$	$\delta_k$	$m^*$	$g_k$	$\delta_k$	$g^*$
0	0.7700	—	—	0.1200	—	—
1	1.0200	—	1.0880	0.16898	—	0.18233
2	1.0713	4.873	1.0853	0.18162	3.876	0.18506
3	1.08216	4.724	1.08511	0.18438	4.582	0.18513
4	1.08449	4.66896	1.08512	0.18497	4.66836	0.18513



В связи с тем, что универсальность перехода к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода была доказана Фейгенбаумом для класса гладких одномерных отображений с квадратичным максимумом, возникает естественный вопрос: почему эти закономерности с высокой степенью точности выполняются для трехмерной ДС (10)? Ответ на этот вопрос заключается в том, что динамика системы (10) с высокой степенью точности может быть охарактеризована одномерным отображением класса Фейгенбаума.



Рассмотрим режим хаотического аттрактора в системе (10) при  $m = 1.5$  и  $g = 0.3$ . Введем в фазовом пространстве секущую плоскость условием  $x = 0$  и построим двумерное отображение  $(y_{n+1}, z_{n+1}) = F(y_n, z_n)$  на секущей плоскости. Как показали расчеты, полученное отображение близко к одномерному. Используя данные расчета отображения в секущей плоскости, построим численно одномерное отображение  $y_{n+1} = F(y_n)$ . Результаты представлены на рисунке. Как видно из графика, отображение действительно близко к одномерному и имеет гладкий квадратичный максимум.