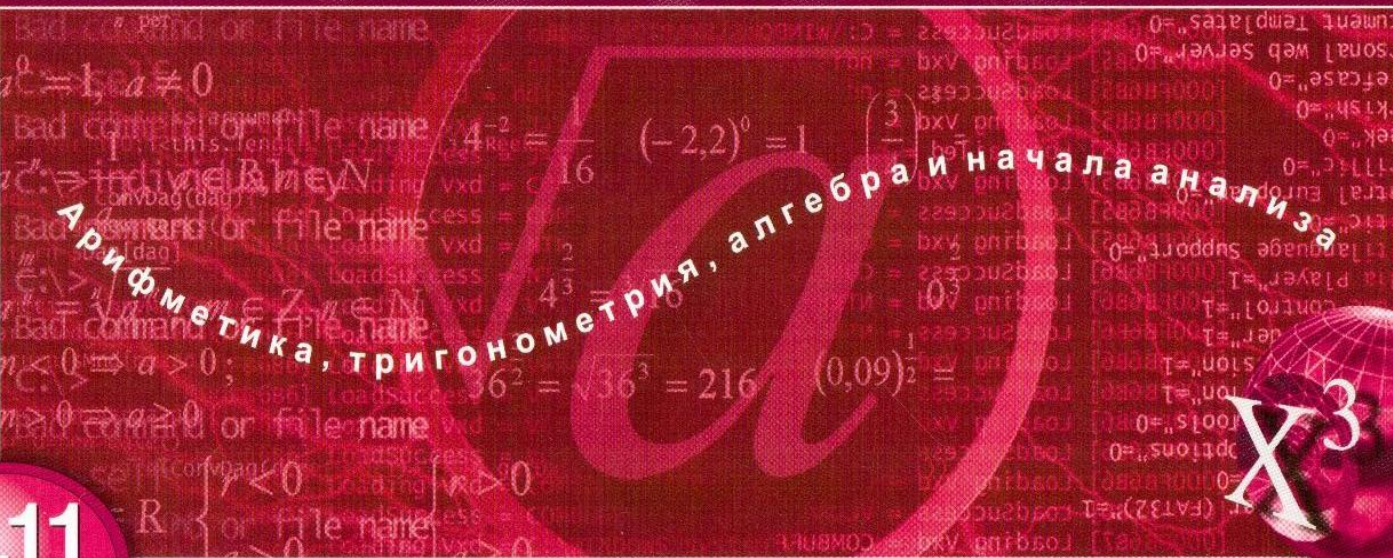


# МАТЕМАТИКА

РИСУНКИ И ТАБЛИЦЫ

РАЗРАБОТЧНЫЙ  
МАТЕРИАЛ



Арифметика, тригонометрия, алгебра и начала анализа

5-11  
классы



1. Рациональные числа	7. Квадратные корни	13.1. Свойства неравенств. Схемы решения неравенств	14.4. Соотношения между функциями. Формулы тройного аргумента
2. Математические правила и законы	8. Корни натуральной степени	13.2. Линейные и квадратные неравенства	15. Логарифмы
3. Арифметические действия над дробями	9. Прогрессия	13.3. Иррациональные неравенства. Показательные и логарифмические неравенства	16. Производная
4. Многочлены	10. Модуль	14. <b>Тригонометрия</b>	17. Первообразная и неопределенный интеграл
5. <b>Элементарные функции</b>	11. <b>Уравнения</b>	14.1. Основные формулы. Формулы приведения. Формулы сложения	18. <b>Определенный интеграл и его приложения</b>
5.1. Линейная функция	11.1. Линейные и квадратные уравнения	14.2. Формулы двойного аргумента. Формулы суммы и разности тригонометрических функций	18.1. Формула Ньютона-Лейбница. Свойства. Вычисление площадей
5.2. Функция $y = \frac{k}{x}$	11.2. Неолные и квадратные уравнения. Биквадратные и иррациональные уравнения	14.3. Формулы преобразования. Формулы понижения степени. Формулы половинного аргумента	18.2. Вычисление площадей. Вычисление объемов тел вращения
5.3. Квадратичная функция	11.3. Тригонометрические уравнения		19. Комбинаторика. Элементы теории вероятностей
5.4. Тригонометрические функции	11.4. Показательные и логарифмические уравнения		
5.5. Тригонометрические функции (продолжение)	12. Числовые промежутки		
5.6. Показательная и логарифмическая функции	13. <b>Неравенства</b>		
6. Степени			

ББК 22.1 я72  
М34

М 1602010000  
00(05) – 06

ISBN 9965-636-61-3

Рекомендовано Министерством образования и науки Республики Казахстан. / Редактор: Б.В. Бейсенова / Дизайн: В.А. Бондарев, Е.В. Мельникова  
Отпечатано с файлов заказчика на Полиграфкомбинате ТОО «Корпорация «Атамұра» Республики Казахстан. Тираж 500 экз. Заказ № 1797.

Составитель: Е.А. Туяков / Рецензенты: д.п.н., доц. А.М. Мубаракوف, к.ф.м.н., проф. Ш. Касенулы, к.ф.м.н., доц. Ш.К. Биболов, к.ф.м.н., доц. М.Е. Исин  
Под общей редакцией преподавателей Павлодарского государственного педагогического университета им. С. Торайгырова

По вопросам приобретения обращайтесь по следующему адресу: г. Астана, пр. Кабанбай батыра, 6/6, оф. 1. Тел.: 8 (7172) 92-50-50, 92-50-54. E-mail: armanpvastana@mail.ru  
г. Алматы, пр. Гагарина, 12, оф. 204, 206. Тел./факс: 8 (727) 242-60-70, 243-89-91, 269-40-73. E-mail: armanalmaty@mail.ru  
© Издательство «Арман-ПВ», 2008

# МАТЕМАТИКА

## СОДЕРЖАНИЕ

- Рациональные числа

- Математические правила и

- Арифметические действия над

дробями

- Многочлены

- Элементарные функции...

- Степени

- Квадратные корни

- Корни натуральной степени

- Прогрессии

- Модуль

- Уравнения...

- Числовые промежутки

- Неравенства...

- Тригонометрия...

- Логарифмы

- Производная

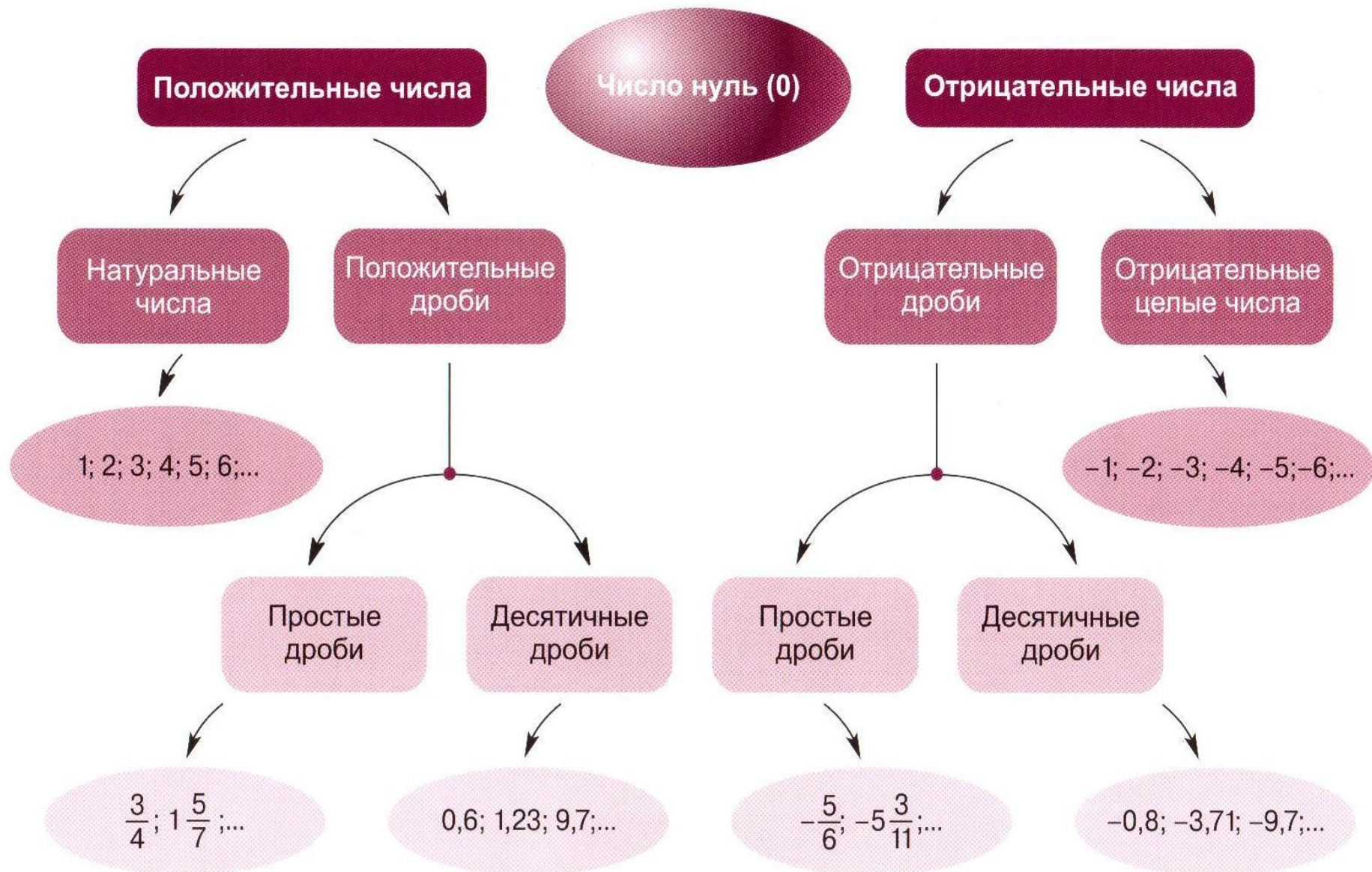
- Первообразная и  
неопределенный интеграл

- Определенный интеграл и  
его приложения...

- Комбинаторика. Элементы  
теории вероятностей



## РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА





## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРАВИЛА И ЗАКОНЫ

### Правила раскрытия скобок

$$a + (b + c) = a + b + c$$

$$a + (b - c) = a + b - c$$

$$a - (b + c) = a - b - c$$

$$a - (b - c) = a - b + c$$

### Законы сложения и умножения

$$a + b = b + a$$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

$$a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

$$(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$$

### Числа 0 и 1 в математических действиях

$$a + 0 = a$$

$$a \cdot 1 = a$$

$$a - 0 = a$$

$$a : 1 = a$$

$$a - a = 0$$

$$a : a = 1, a \neq 0$$

$$a \cdot 0 = 0$$

$$0 : a = 0, a \neq 0$$

На нуль  
делить нельзя

## АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ НАД ДРОБЯМИ

Сложение

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$$

Умножение

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b \cdot c}$$

Вычитание

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}$$

Деление

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a \cdot c}{b}$$



## МНОГОЧЛЕНЫ

### Формулы сокращенного умножения

Квадрат суммы

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Квадрат разности

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Куб суммы

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Куб разности

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Разность квадратов

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Сумма кубов

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

Разность кубов

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

### Основные приемы разложения многочлена на множители

Вынесение общего множителя за скобку

$$3ab + 12a^2 + 6a = 3a(b + 4a + 2)$$

$$4a^2b^3 - 16a^3b = 4a^2b(b^2 - 4a)$$

Метод группировки

$$ab + ac - b - c = a(b+c) - (b+c) = (b+c)(a-1)$$

Использование формул сокращенного умножения

$$a^2 + 6ab + 9b^2 = (a+3b)^2$$

$$a^4 + 4 = a^4 + 4a^2 + 4 - 4a^2 = (a^2 + 2)^2 - (2a)^2 = (a^2 - 2a + 2)(a^2 + 2a + 2)$$

# МАТЕМАТИКА



## Элементарные функции

- **Линейная функция**
- **Функция  $y=k/x$**
- **Квадратичная функция**
- **Тригонометрические функции...**
- **Показательная и логарифмические функции**



## ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

### Линейная функция

$$y = kx + b, \quad D(y) = \mathbb{R}$$

График функции – *прямая*

$$k = 0 \quad y = b \text{ – постоянная функция}$$

$$k \neq 0 \quad E(y) = \mathbb{R}$$

$k > 0$       возрастает

$k < 0$       убывает

на  $\mathbb{R}$

Пересекает ось  $(Oy)$  в точке  $(0; b)$ , а

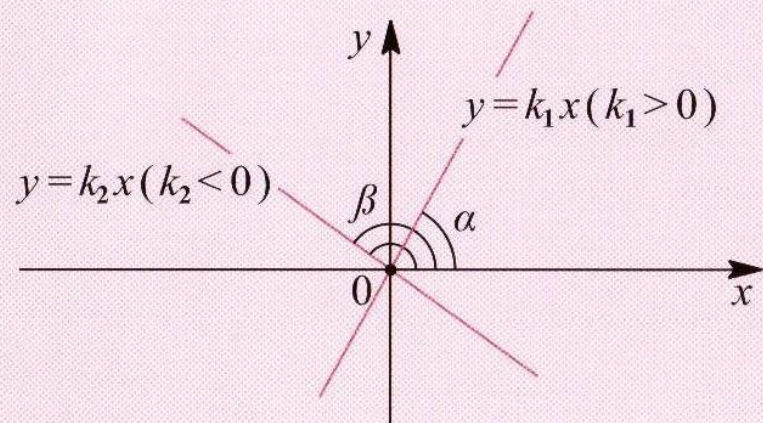
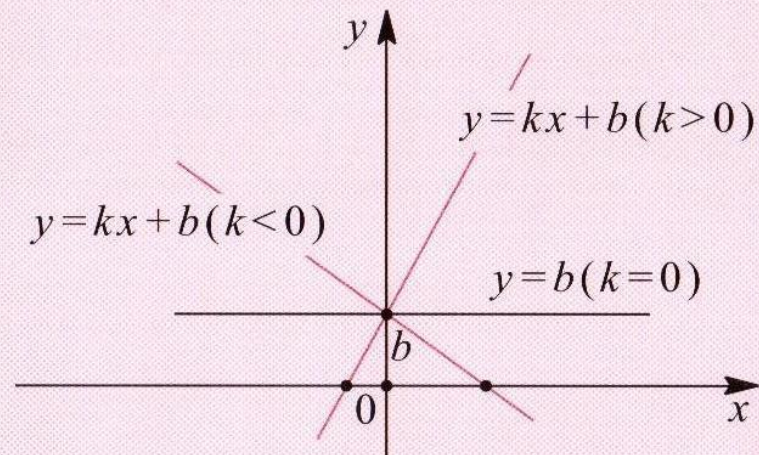
$$\text{ось } (Ox) \text{ — } \left(-\frac{b}{k}; 0\right)$$

$$b = 0 \quad y = kx \text{ – прямая пропорциональность}$$

Проходящая через точки  $O(0; 0)$  и  $(1; k)$  – прямая

$$k_1 = \operatorname{tg} \alpha; \quad k_2 = \operatorname{tg} \beta$$

$k_1 = k_2$       Графики функции –  
*параллельные прямые*







## ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

Функция  $y = \frac{k}{x}$

$y = \frac{k}{x}$ ,  $k \neq 0$  – обратная пропорциональность

$D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ ;       $E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

График функции – *гипербола*

$x=0$  – вертикальная асимптота;

$y=0$  – горизонтальная асимптота

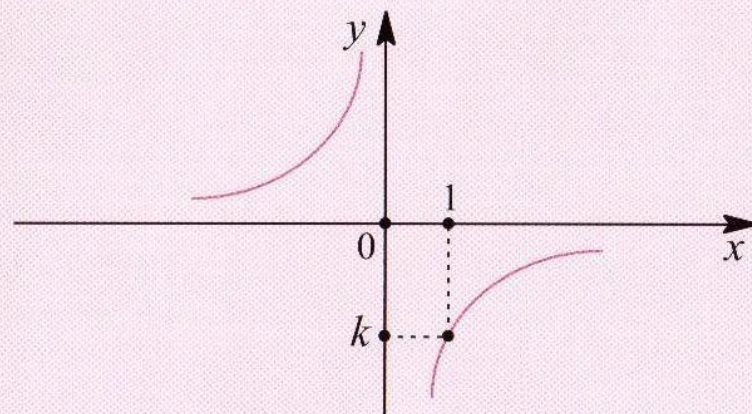
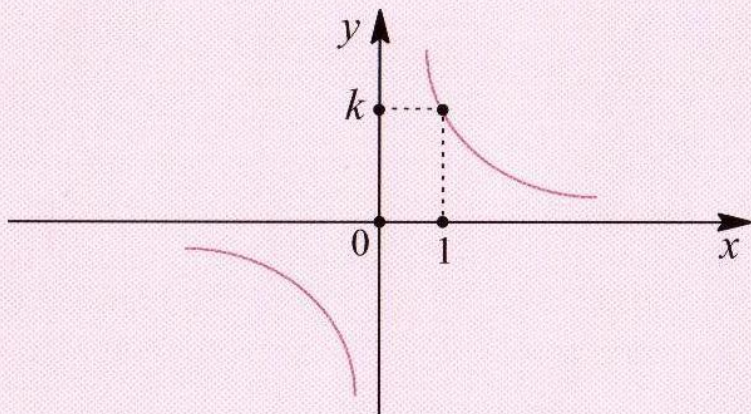
При  $k > 0$ ,

При  $k < 0$ ,

на промежутках  $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

убывает

возрастает





## ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

### Квадратичная функция

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0, \quad D(y) = R$$

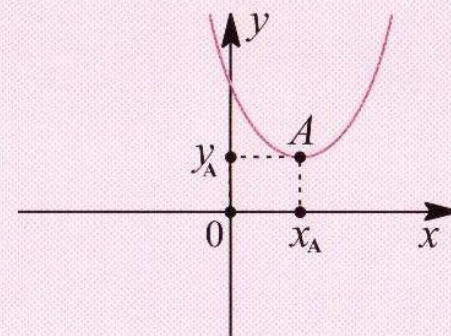
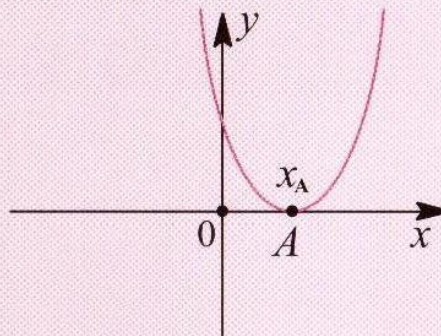
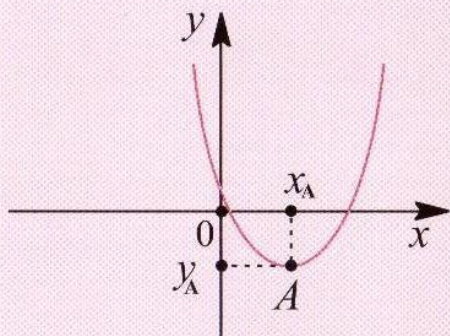
График функции – парабола

$$D = b^2 - 4ac > 0$$

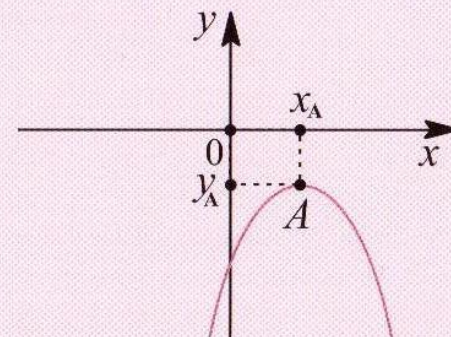
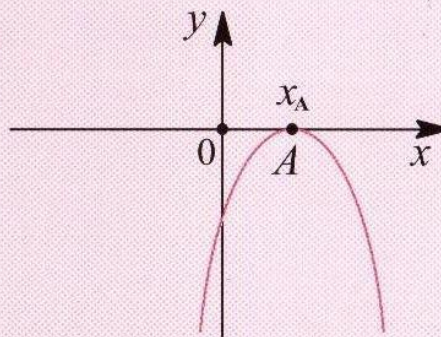
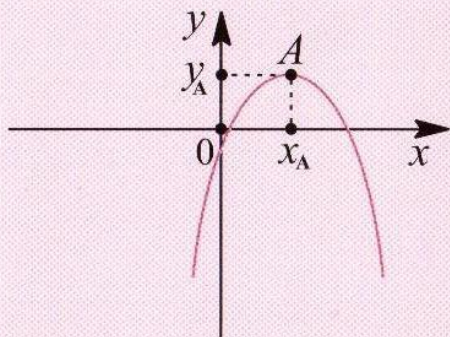
$$D = b^2 - 4ac = 0$$

$$D = b^2 - 4ac < 0$$

$$a > 0$$



$$a < 0$$



$$A(x_A; y_A) \text{ – вершина параболы: } x_A = -\frac{b}{2a}; \quad y_A = \frac{4ac - b^2}{4a}$$



## ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

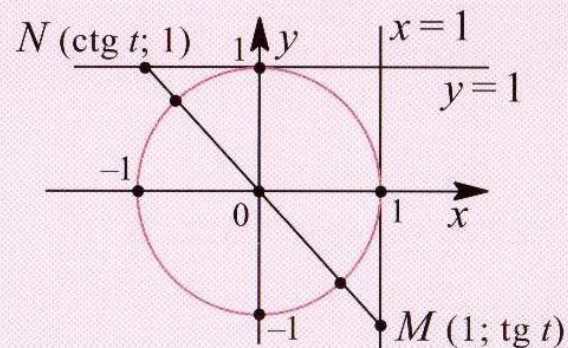
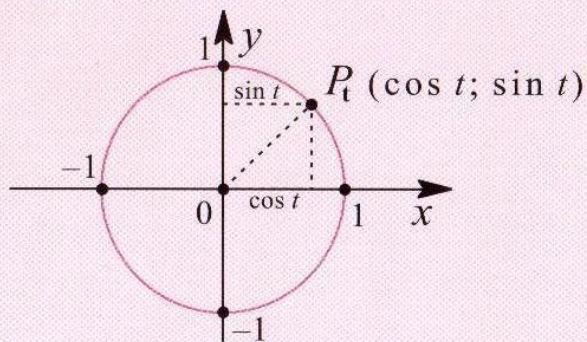
### Тригонометрические функции

Косинус числа  $t$  – абсцисса точки  $P_t$

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}, \cos t \neq 0; \text{ Ось тангенсов – прямая } x = 1$$

Синус числа  $t$  – ордината точки  $P_t$

$$\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}, \sin t \neq 0; \text{ Ось котангенсов – прямая } y = 1$$



### Соотношения в прямоугольном треугольнике

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

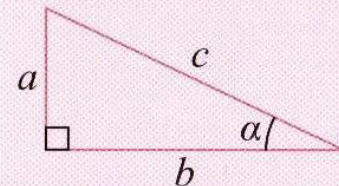
$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$$

$$\sec \alpha = \frac{c}{b}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{c}{a}$$



### Четность, нечетность

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$$



## ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

### Тригонометрические функции

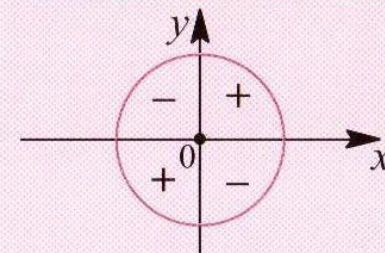
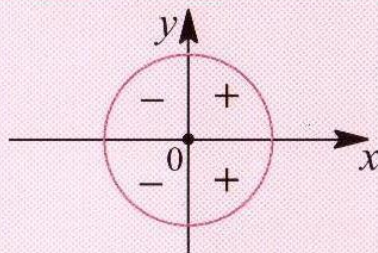
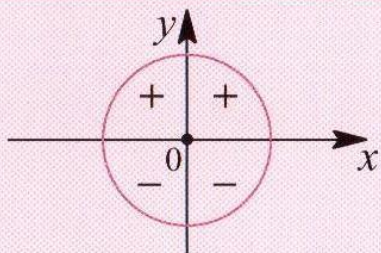
$$y = \sin x$$

$$y = \cos x$$

$$y = \operatorname{tg} x$$

$$y = \operatorname{ctg} x$$

### Знаки тригонометрических функций по четвертям



### Графики функции

*синусоида*

*косинусоида*

*тангенсоида*

*котангенсоида*

$$D(y) = R; \quad E(y) = [-1; 1]$$

$$x \neq \pi/2 + \pi n$$

$$x \neq \pi n, \quad n \in Z$$

$$\sin(x+2\pi) = \sin x$$

$$T_{\sin} = 2\pi$$

$$\cos(x+2\pi) = \cos x$$

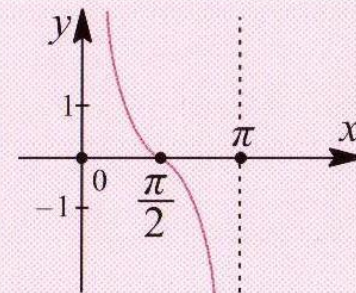
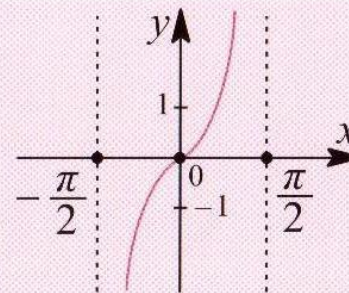
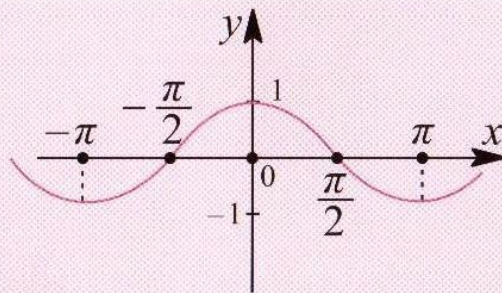
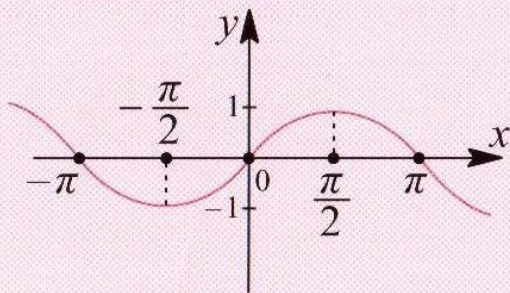
$$T_{\cos} = 2\pi$$

$$\operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg} x$$

$$T_{\operatorname{tg}} = \pi$$

$$\operatorname{ctg}(x+\pi) = \operatorname{ctg} x$$

$$T_{\operatorname{ctg}} = \pi$$





### Показательная функция

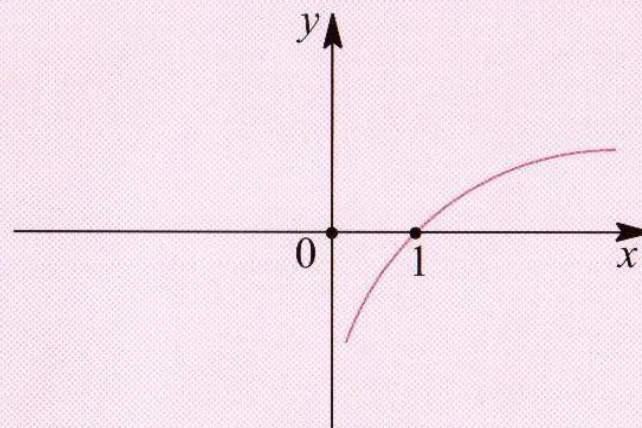
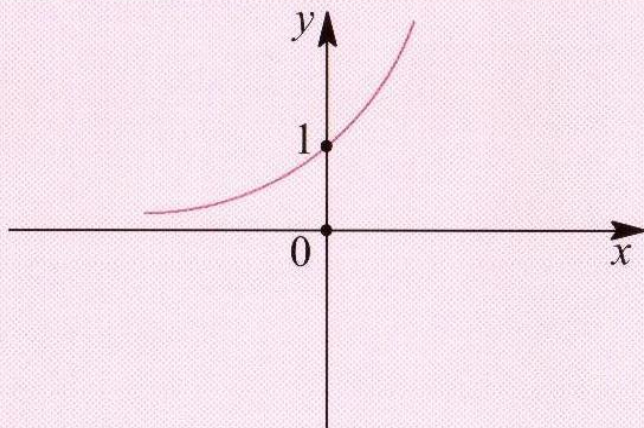
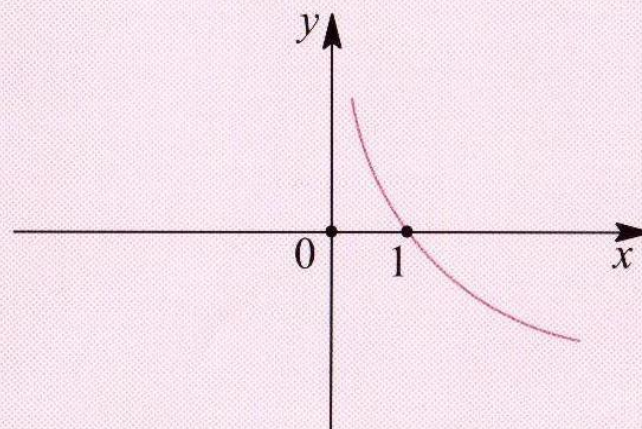
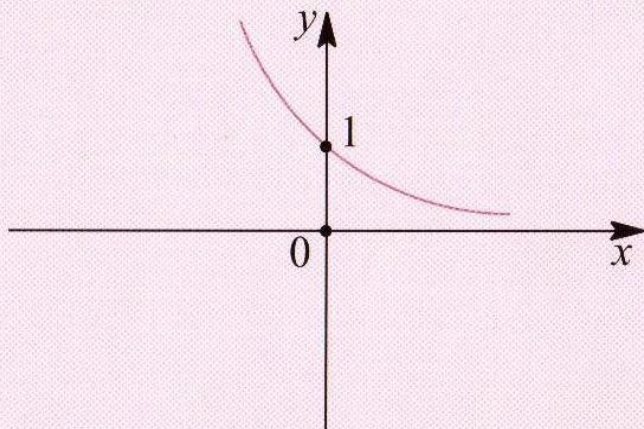
$$y = a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$D(y) = R; E(y) = (0; +\infty)$$

### Логарифмическая функция

$$y = \log_a x \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$D(y) = (0; +\infty); E(y) = R$$

 $a > 1$ 

 $a < 1$ 




## СТЕПЕНИ

Степень с натуральным показателем		$a^1 = a$			
		$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ раз}}, a \in R, n \in N$			
Степень с целым показателем		$a^0 = 1, a \neq 0$	$4^{-2} = \frac{1}{16}$	$(-2, 2)^0 = 1$	$\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27}$
		$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \in R, n \in N$			
Для неотрицательного числа $a$	степень с рациональным показателем	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, m \in Z, n \in N$ $m < 0 \Rightarrow a > 0;$ $m > 0 \Rightarrow a \geq 0$	$4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{16}$	$0^{\frac{2}{3}} = 0$	
	степень с действительным показателем	$a^r, r \in R$	$\begin{cases} r < 0 \\ a > 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} r > 0 \\ a \geq 0 \end{cases}$	$36^{\frac{3}{2}} = \sqrt{36^3} = 216$	$(0,09)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{0,09} = 0,3$

### Свойства степеней

$a^p \cdot a^r = a^{p+r}$	$a^p : a^r = a^{p-r}, a \neq 0$	$a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$
$(a^p)^r = a^{pr}$	$a^r : b^r = \left(\frac{a}{b}\right)^r, b \neq 0$	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-r} = \left(\frac{b}{a}\right)^r, a \neq 0, b \neq 0$

### Свойства, связанные с неравенствами

$\left. \begin{matrix} a > b \geq 0 \\ r > 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow a^r > b^r$	$\left. \begin{matrix} p > r \\ a > 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow a^p > a^r$	$\left. \begin{matrix} a > b > 0 \\ r < 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow a^r < b^r$	$\left. \begin{matrix} p > r \\ 0 < a < 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow a^p < a^r$
---	--	--	--



## КВАДРАТНЫЕ КОРНИ

$$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0, \\ b^2 = a \end{cases}$$

$$\sqrt{36} = 6, \text{ так как } 6 > 0; 6^2 = 36$$

$$\sqrt{0,64} = 0,8 \quad \sqrt{8100} = 90$$

$$\sqrt{49} \neq 8, \text{ так как } 8^2 \neq 49$$

$$\sqrt{0,0004} = 0,02$$

$$\sqrt{16} \neq -4, \text{ так как } -4 < 0$$

$$2 < \sqrt{8} < 3$$

$$\sqrt{-9} \text{ не определен}$$

$$0,8 < \sqrt{0,8} < 0,9$$

### Свойства

$$(\sqrt{a})^2 = a, \quad a \geq 0$$

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$$

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{|a|} \cdot \sqrt{|b|}$$

$$\sqrt{a^2} = |a|, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|}}$$

$$(\sqrt{a})^r = \sqrt{a^r}$$

$$\sqrt{a^r} = (\sqrt{|a|})^r$$

### Вынесение из-под корня

$$\sqrt{a^2 \cdot b} = |a| \cdot \sqrt{b}, \quad b \geq 0$$

$$\sqrt{28} = \sqrt{4 \cdot 7} = 2 \cdot \sqrt{7}$$

$$\sqrt{5b^2} = |b| \cdot \sqrt{5}$$

### Внесение под корень

$$a\sqrt{b} = \begin{cases} -\sqrt{a^2 \cdot b}, & a < 0, \\ \sqrt{a^2 \cdot b}, & a \geq 0 \end{cases}$$

$$7 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3 \cdot 7^2} = \sqrt{147}$$

$$-3 \cdot \sqrt{11} = -\sqrt{99}$$

## КОРНИ НАТУРАЛЬНОЙ СТЕПЕНИ

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt[n]{a} = b \\ n \in \mathbb{N}, a \geq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} b \geq 0 \\ b^n = a \end{array}$$

$$\sqrt[3]{64} = 4$$

$$\sqrt[7]{0,0000001} = 0,1$$

$$\sqrt[5]{243} = 3$$

$$\sqrt[4]{625} = 5$$

### Свойства

$$(\sqrt[n]{a})^n = a$$

$$\sqrt[2n-1]{a^{2n-1}} = a, a \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|, a \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

### Вынесение из-под корня

$$\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{3 \cdot 8} = 2 \cdot \sqrt[3]{3}$$

$$\sqrt[5]{(2-\sqrt{3})^5 \cdot 7} = (2-\sqrt{3}) \cdot \sqrt[5]{7}$$

### Внесение под корень

$$4 \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{4^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{128}$$

$$(1-\sqrt{3}) \cdot \sqrt[5]{5} = \sqrt[5]{(1-\sqrt{3})^5 \cdot 5}$$

### Иррациональность в знаменателе

$$\frac{2}{\sqrt[4]{3}} = \frac{2 \cdot \sqrt[4]{3^3}}{3} = \frac{2 \sqrt[4]{27}}{3}$$

$$\frac{6}{2-\sqrt[3]{2}} = \frac{6 \cdot (4+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})}{8-2} = 4+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$$



## ПРОГРЕССИЯ

Последовательность – функция натурального аргумента

Свойства	Арифметическая $\left(\begin{smallmatrix} \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix}\right)$	Геометрическая $\left(\begin{smallmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix}\right)$
Рекуррентная формула	$a_{n+1} = a_n + d, n \in \mathbb{N}$	$b_{n+1} = b_n \cdot q, n \in \mathbb{N}$
Допустимые значения	$a_1$ и $d$ – любые	$b_1 \neq 0, q \neq 0$
Формула общего члена	$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$	$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$
Характеристическое свойство	$\frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2} = a_n$	$b_{n+1} \cdot b_{n-1} = b_n^2, b \neq 0$
Формула суммы $n$ первых членов	$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$	$S_n = \frac{b_1 - b_n q}{1 - q}, q \neq 1$
	$S_n = \frac{2a_1 + (n-1) \cdot d}{2} \cdot n$	$S_n = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}, q \neq 1$

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия ( $0 < |q| < 1$ )

Формула суммы	$S = \frac{b_1}{1 - q}$	Пояснения
		$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0, S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{b_1}{1 - q}$



## МОДУЛЬ

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

### Свойства

$|a| \geq 0$

$|-a| = |a|$

$|a-b| = |b-a|$

$|a|-|b| \leq |a \pm b| \leq |a|+|b|$

### Геометрическая интерпретация модуля

Расстояние между точками  $A(a)$  и  $O(0)$  на прямой равно  $|a|$



Расстояние между точками  $A(a)$  и  $B(b)$  на прямой равно  $|a-b|$



### Уравнения с модулем

$|x| = a$

- а) если  $a < 0$ , решений нет;
- б) если  $a = 0$ ,  $x = 0$ ;
- в) если  $a > 0$ ,  $\begin{cases} x = a \\ x = -a \end{cases}$

$|x-b| = a$

- а) если  $a < 0$ , решений нет;
- б) если  $a = 0$ ,  $x = b$ ;
- в) если  $a > 0$ ,  $\begin{cases} x = b-a \\ x = b+a \end{cases}$

$|f(x)| = |g(x)|$

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$$

$|f(x)| = g(x)$

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

### Неравенства с модулем

$|x-b| < a$

- а) если  $a \leq 0$ , решений нет;
- б) если  $a > 0$ ,  $b-a < x < b+a$

$|x-b| \geq a$

- а) если  $a \leq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ;
- б) если  $a > 0$ ,  $x \leq b-a$  или  $x \geq b+a$

$|f(x)| < g(x)$

$$\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > -g(x) \end{cases}$$

$|f(x)| > g(x)$

$$\begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) < -g(x) \end{cases}$$

$$|f(x)| > |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) > g^2(x) \text{ или } (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) > 0$$

# МАТЕМАТИКА



## Уравнения

- **Линейные и квадратные уравнения**
- **Неполные квадратные уравнения. Биквадратные уравнения. Иррациональные уравнения**
- **Тригонометрические уравнения**
- **Показательные и логарифмические уравнения**



## УРАВНЕНИЯ

### Линейные уравнения

$$kx + b = 0$$

если  $k \neq 0$ , то  $x = -\frac{b}{k}$

если  $k = 0, b = 0$ , то  $x \in \mathbb{R}$   
бесконечное множество корней

если  $k = 0, b \neq 0$ , то  
решений нет

### Квадратные уравнения

полное

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$D = 0$$

$$x = \frac{-b}{2a}$$

$$D < 0$$

корней нет

### Дискриминант

приведенное

$$x^2 + px + q = 0$$

$$D = p^2 - 4q$$

$$D > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{D}}{2}$$

$$D = 0$$

$$x = -\frac{p}{2}$$

$$D < 0$$

корней нет

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

### Теорема Виета

$$x_1 + x_2 = -p; \quad x_1 \cdot x_2 = q$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

### Разложение на множители

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$$



## УРАВНЕНИЯ

### Неполные квадратные уравнения

$$ax^2 + bx = 0$$

$$ax^2 + c = 0$$

$$ax^2 = 0$$

$$x(ax + b) = 0$$

$$a \cdot c < 0$$

$$a \cdot c > 0$$

$$x = 0$$

$$x_1 = 0; \quad x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

решений нет

### Биквадратные уравнения

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, \quad x^2 = y$$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}; \quad x_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

### Иррациональные уравнения

$$\sqrt[2n]{f(x)} = g(x)$$

$$\sqrt[2n]{f(x)} = \sqrt[2n]{g(x)}$$

$$\sqrt[2n-1]{f(x)} = g(x)$$

$$\sqrt[2n-1]{f(x)} = \sqrt[2n-1]{g(x)}$$

$$n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = [g(x)]^{2n} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

$$f(x) = [g(x)]^{2n-1}$$

$$f(x) = g(x)$$

## УРАВНЕНИЯ

## Тригонометрические уравнения

$\sin t = a$

$\cos t = a$

$\operatorname{tg} t = a$

$\operatorname{ctg} t = a$

Если  $|a| > 1$ , решений нет

$|a| \leq 1$

$a \in (-\infty; +\infty)$

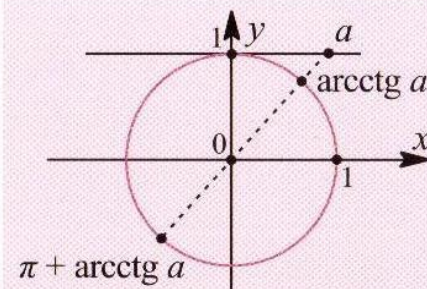
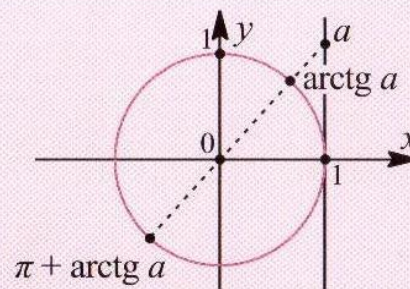
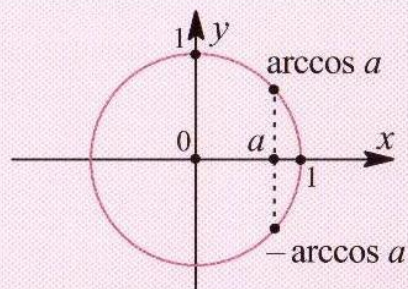
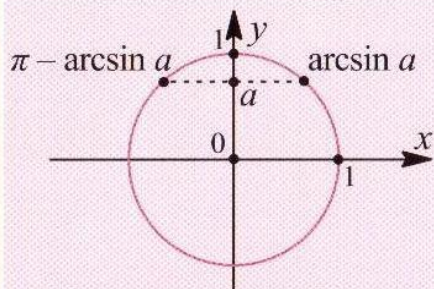
$t = (-1)^n \arcsin a + \pi n$

$t = \pm \arccos a + 2\pi n$

$t = \operatorname{arctg} a + \pi n$

$t = \operatorname{arctg} a + \pi n$

$n \in \mathbb{Z}$



## Частные решения

$\sin t = 0$

$\sin t = \pm 1$

$\cos t = 0$

$\cos t = 1$

$\cos t = -1$

$t = \pi n$

$t = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi n$

$t = \frac{\pi}{2} + \pi n$

$t = 2\pi n$

$t = \pi + 2\pi n$

$n \in \mathbb{Z}$

## УРАВНЕНИЯ

## Показательные уравнения

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}, a > 0, a \neq 1$$

$$f(x) = g(x)$$

$$\begin{aligned} 7^x &= 49 \\ 7^x &= 7^2 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^{5+x} &= 2^{4x-1} \\ 5+x &= 4x-1 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$$a^{f(x)} = b, a > 0$$

Если  $b > 0, a \neq 1$ , то  $f(x) = \log_a b$

$$\begin{aligned} 4^x &= 5 \\ x &= \log_4 5 \end{aligned}$$

Если  $b \leq 0$ , то решений нет

$$\begin{aligned} 49^x &= -8 \\ -8 &< 0 \\ \text{решений нет} \end{aligned}$$

## Логарифмические уравнения

$$\log_a f(x) = b \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = a^b \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \log_7 x &= 2 \\ \begin{cases} x > 0 \\ x = 7^2 \end{cases} &\Leftrightarrow x = 49 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{3}}(x-2) &= -3 \\ \begin{cases} x-2 > 0 \\ x-2 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \end{cases} &\Leftrightarrow x = 29 \end{aligned}$$

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \log_3(x^2 - 3x - 5) &= \log_3(7 - 2x) \\ \begin{cases} x^2 - 3x - 5 > 0 \\ 7 - 2x > 0 \\ x^2 - 3x - 5 = 7 - 2x \end{cases} &\Leftrightarrow x = -3 \end{aligned}$$



## ЧИСЛОВЫЕ ПРОМЕЖУТКИ

Вид промежутка	Геометрическое изображение	Обозначение	Запись с помощью неравенств
Интервал		$(a; b)$	$a < x < b$
Отрезок		$[a; b]$	$a \leq x \leq b$
Полуинтервал		$(a; b]$	$a < x \leq b$
		$[a; b)$	$a \leq x < b$
Луч		$[a; +\infty)$	$a \leq x < +\infty$
		$(-\infty; b]$	$-\infty < x \leq b$
Открытый луч		$(a; +\infty)$	$a < x < +\infty$
		$(-\infty; b)$	$-\infty < x < b$



# МАТЕМАТИКА



## Неравенства

- **Свойства неравенств. Схемы решения неравенств**
- **Линейные и нелинейные неравенства**
- **Иррациональные неравенства.  
Показательные и логарифмические неравенства**

## НЕРАВЕНСТВА

$$f(x) > g(x)$$

### Свойства

$$f(x) - g(x) > 0$$

$$g(x) - f(x) < 0$$

$$\frac{1}{f(x)} < \frac{1}{g(x)}$$

$$f(x) + \varphi(x) > g(x) + \varphi(x)$$

$$a \cdot f(x) > a \cdot g(x) \\ a > 0$$

$$a \cdot f(x) < a \cdot g(x) \\ a < 0$$

$$f(x) > 0, g(x) > 0$$

$$f(x) - \varphi(x) > g(x) - \varphi(x)$$

$$-f(x) < -g(x)$$

$$[f(x)]^{2n+1} > [g(x)]^{2n+1}$$

$$[f(x)]^{2n} > [g(x)]^{2n} \\ f(x) > 0, g(x) > 0$$

$$f(x) \cdot \varphi(x) > g(x) \cdot \varphi(x)$$

$$\varphi(x) > 0$$

$$n \in \mathbb{N}$$

### Схемы решения неравенств

$$f(x) \cdot g(x) > 0 \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{array}{l} f(x) < 0 \\ g(x) < 0 \end{array} \right.$$

$$f(x) \cdot g(x) < 0 \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} f(x) > 0 \\ g(x) < 0 \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{array}{l} f(x) < 0 \\ g(x) > 0 \end{array} \right.$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{array}{l} f(x) \leq 0 \\ g(x) < 0 \end{array} \right.$$

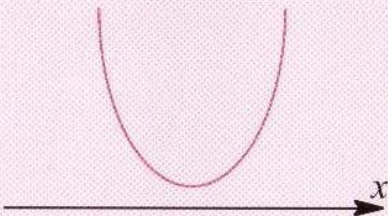
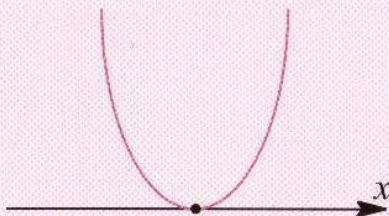
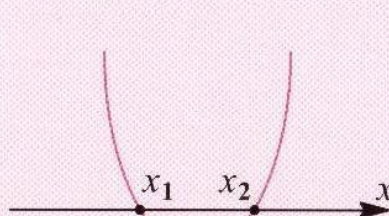
$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0 \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} f(x) \leq 0 \\ g(x) > 0 \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{array}{l} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{array} \right.$$

## НЕРАВЕНСТВА

## Линейные неравенства

$k \neq 0$	$kx + b > 0$	$kx + b < 0$	$kx + b \geq 0$	$kx + b \leq 0$
$k > 0$	$x \in \left(-\frac{b}{k}; +\infty\right)$	$x \in \left(-\infty; -\frac{b}{k}\right)$	$x \in \left[-\frac{b}{k}; +\infty\right)$	$x \in \left(-\infty; -\frac{b}{k}\right]$
$k < 0$	$x \in \left(-\infty; -\frac{b}{k}\right)$	$x \in \left(-\frac{b}{k}; +\infty\right)$	$x \in \left(-\infty; -\frac{b}{k}\right]$	$x \in \left[-\frac{b}{k}; +\infty\right)$

## Квадратные неравенства

		$D < 0$	$D = 0$	$D > 0$
Пояснение	Неравенство			
$a > 0$	$ax^2 + bx + c > 0$	$x \in \mathbb{R}$	$x \in (-\infty; x_0) \cup (x_0; +\infty)$	$x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$
	$ax^2 + bx + c < 0$	решений нет		$x \in (x_1; x_2)$

## НЕРАВЕНСТВА

### Иррациональные неравенства

$$\sqrt[2n]{f(x)} > g(x)$$

$$\sqrt[2n]{f(x)} < g(x)$$

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} > g(x)$$

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} < g(x)$$

$$n \in \mathbb{N}$$

$$\left. \begin{matrix} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{matrix} \right\} \cup \left\{ \begin{matrix} g(x) \geq 0 \\ f(x) > [g(x)]^{2n} \end{matrix} \right.$$

$$\left\{ \begin{matrix} f(x) \geq 0, g(x) > 0 \\ f(x) < [g(x)]^{2n} \end{matrix} \right.$$

$$f(x) > [g(x)]^{2n+1}$$

$$f(x) < [g(x)]^{2n+1}$$

### Показательные неравенства

$$a^{f(x)} > b$$

$$a^{f(x)} < b$$

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}$$

$$b \leq 0$$

$$b > 0$$

$$b \leq 0$$

$$b > 0$$

$$a > 1$$

$$x \in D(y)$$

$$f(x) > \log_a b$$

решений нет

$$f(x) < \log_a b$$

$$f(x) > g(x)$$

$$0 < a < 1$$

$$x \in D(y)$$

$$f(x) < \log_a b$$

решений нет

$$f(x) > \log_a b$$

$$f(x) < g(x)$$

### Логарифмические неравенства

$$b \in \mathbb{R}$$

$$\log_a f(x) > b$$

$$\log_a f(x) < b$$

$$\log_a f(x) < \log_a g(x)$$

$$a > 1$$

$$f(x) > a^b$$

$$\begin{cases} f(x) < a^b \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

$$0 < a < 1$$

$$\begin{cases} f(x) < a^b \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

$$f(x) > a^b$$

$$\begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

# МАТЕМАТИКА



## Тригонометрия

- Основные формулы. Формулы приведения.  
Формулы сложения
- Формулы двойного аргумента. Формулы суммы и  
разности тригонометрических функций
- Формулы преобразования. Формулы понижения  
степени.  
Формулы половинного аргумента
- Соотношения между функциями. Формулы  
тройного  
аргумента



## ТРИГОНОМЕТРИЯ

### Основные формулы

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

### Формулы приведения

	Название функции сохраняется			Название функции меняется на «кофункцию»			
	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$2\pi - \alpha$	$\pi/2 - \alpha$	$\pi/2 + \alpha$	$3\pi/2 - \alpha$	$3\pi/2 + \alpha$
$t$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$2\pi - \alpha$	$\pi/2 - \alpha$	$\pi/2 + \alpha$	$3\pi/2 - \alpha$	$3\pi/2 + \alpha$
$\sin t$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$
$\cos t$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$
$\operatorname{tg} t$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$
$\operatorname{ctg} t$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$

### Формулы сложения

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta \mp 1}{\operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta}$$

## ТРИГОНОМЕТРИЯ

## Формулы двойного аргумента

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2\operatorname{ctg} \alpha}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha}{2}$$

## Формулы суммы и разности тригонометрических функций

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2\sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2\sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$$

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

## ТРИГОНОМЕТРИЯ

### Формулы преобразования

$$\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta = \frac{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}$$

### Формулы понижения степени

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

### Формулы половинного аргумента

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}$$





## ТРИГОНОМЕТРИЯ

### Соотношения между функциями

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$$

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

### Формулы тройного аргумента

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$\sin 3\alpha = 3 \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha - \sin^3 \alpha$$

$$\cos 3\alpha = \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3 \alpha - 3 \operatorname{tg} \alpha}{3 \operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}$$



## ЛОГАРИФМЫ

$c = \log_a b$ , так как  $a^c = b$  ( $a > 0, b > 0, a \neq 1$ )

$$\log_3 9 = 2, \text{ так как } 3^2 = 9$$

$\log_6(-5)$  не определен, так как  $-5 < 0$

$a^{\log_a b} = b$  – основное логарифмическое тождество

$$6^{\log_6 5} = 5$$

$$7^{1 + \log_7 3} = 7^1 \cdot 7^{\log_7 3} = 21$$

$$27^{\log_3 5} = (3^3)^{\log_3 5} = (3^{\log_3 5})^3 = 5^3 = 125$$

$\log_{10} b = \lg b$  – десятичный логарифм

$\log_e b = \ln b$  – натуральный логарифм

$$e = 2,71828183\dots \approx 2,7$$

### Свойства

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a x^p = p \cdot \log_a x$$

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$\log_{a^r} x = \frac{1}{r} \cdot \log_a x$$

$$\log_a \left( \frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$$

### Свойства, связанные с неравенствами

$$\left. \begin{array}{l} 0 < a < 1 \\ 0 < p < r \end{array} \right\} \Rightarrow \log_a p > \log_a r$$

$$\left. \begin{array}{l} a > 1 \\ 0 < p < r \end{array} \right\} \Rightarrow \log_a p < \log_a r$$

$$\log_a b > 0 \Leftrightarrow (a-1)(b-1) > 0$$

$$\log_a b < 0 \Leftrightarrow (a-1)(b-1) < 0$$



## ПРОИЗВОДНАЯ

Производная функции  $f(x)$  в точке  $x_0$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

### Правила дифференцирования

$$u = u(x), \quad v = v(x), \quad u' = u'(x), \quad v' = v'(x), \quad C = \text{const}$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(C \cdot u)' = C \cdot u'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$(C)' = 0$$

$$\left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{u'}{C}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

### Таблица производных

$$(x)' = 1$$

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$$

### Производная сложной функции

$$(f(u(x)))' = f'(u) \cdot u'(x)$$

## ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

$F(x) + C$  первообразная  
для функции  $f(x)$

$$(F(x) + C)' = f(x)$$

Неопределенный интеграл  
 $\int f(x) dx = F(x) + C$

$$C = \text{const}, x \in I$$

### Таблица первообразных

$f(x)$	$k$ (const)	$x^n$ $n \in \mathbb{Z},$ $n \neq -1$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$a^x$	$\sin x$	$\cos x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$
$F(x) + C$	$kx + C$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\ln x  + C$	$2\sqrt{x} + C$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	$-\cos x + C$	$\sin x + C$	$\text{tg } x + C$	$-\text{ctg } x + C$

### Правила нахождения первообразных

$$F(x) \pm G(x)$$

$$kF(x)$$

$$\frac{1}{k} \cdot F(kx \pm b)$$

есть первообразная для

$$f(x) \pm g(x)$$

$$kf(x)$$

$$f(kx \pm b)$$

### Правила интегрирования

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = F(x) \pm G(x) + C$$

$$\int k \cdot f(x) dx = k \cdot F(x) + C$$

$$\int f(kx \pm b) dx = \frac{1}{k} \cdot F(kx \pm b) + C$$

# МАТЕМАТИКА



## Определённый интеграл и его приложения

- Формула Ньютона-Лейбница. Свойства.  
Вычисление площадей
- Вычисление площадей.  
Вычисление объёмов тел вращения

## ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

## Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b$$

## Свойства

$$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(z) dz$$

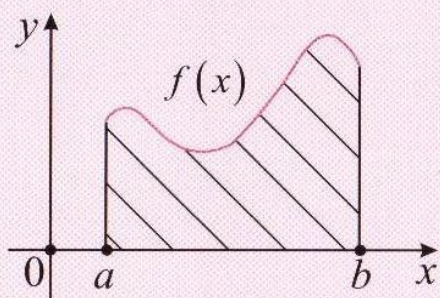
$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

$$\int_a^b kf(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx$$

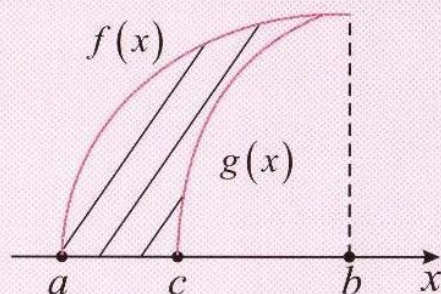
$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

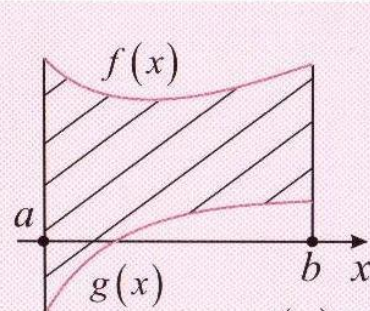
## Вычисление площадей



$$S = \int_a^b f(x) dx$$

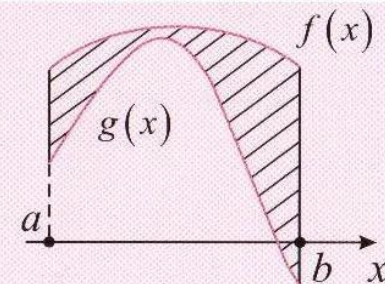


$$S = \int_a^b f(x) dx - \int_c^b g(x) dx$$



$$f(x) \geq g(x) \text{ на } [a, b]$$

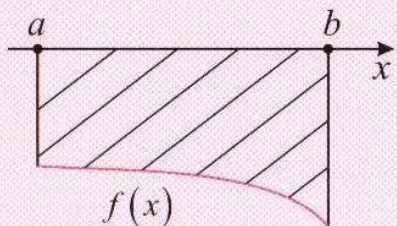
$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$



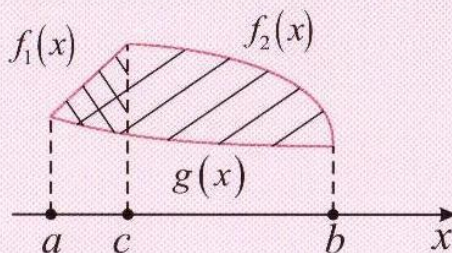


## ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

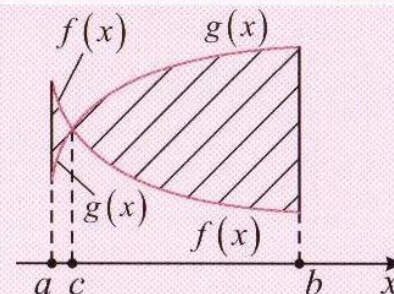
### Вычисление площадей



$$S = -\int_a^b f(x) dx$$



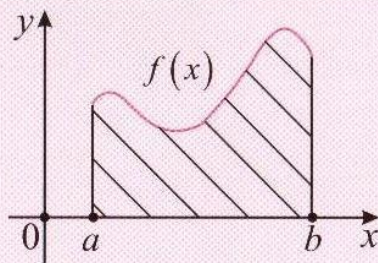
$$S = \int_a^c (f_1(x) - g(x)) dx + \int_c^b (f_2(x) - g(x)) dx$$



$$S = \int_a^c (f(x) - g(x)) dx + \int_c^b (g(x) - f(x)) dx$$

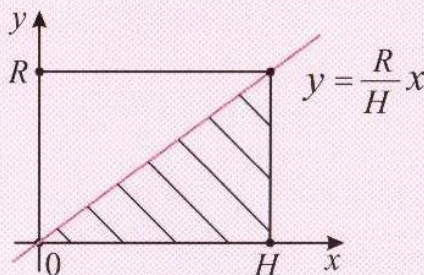
### Вычисление объемов тел вращения

Криволинейная трапеция  
(вокруг оси Ox)



$$V_{Ox} = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

Конус



$$V_{\kappa} = \pi \int_0^H \left( \frac{Rx}{H} \right)^2 dx = \frac{\pi R^2}{H^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^H = \frac{1}{3} \pi R^2 H$$

## КОМБИНАТОРИКА. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ



Размещения с повторениями

Размещения без повторений

из  $n$  элементов по  $k$

$$A_n^k = n^k$$

$$A_n^k = n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Перестановки без повторений из  $n$  элементов

Сочетания без повторений из  $n$  элементов по  $k$

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Вероятность событий и его свойства

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

$$P(U) = 1, \quad P(\emptyset) = 0$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

События  $A$  и  $B$

несовместны

независимы

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

Для любых двух событий  $A$  и  $B$

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$$

$$P(A \cdot B) = P(B) \cdot P_B(A) = P(A) \cdot P_A(B)$$