УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА.

Решение неоднородного уравнения теплопроводности

ТемаIII. Задача Коши для неоднородного уравнения теплопроводности.

3.1. Общее решение для бесконечного стержня.

Уравнение этого вида описывает развитие одномерных нестационарных процессов в неподвижных средах и твёрдых телах. Если тело является стержнем, направленным по оси OX, то при наличии объёмного тепловыделения, когда источниковый член $\Phi(x,t)$зависит от пространственной координаты и времени, неоднородное линейное уравнение теплопроводности с постоянным коэффициентом теплопроводности имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Phi(x,t), \qquad a \neq 0, x \in (-\infty, +\infty), \qquad t \in (0, +\infty) \qquad (3.1.1)$$

где $a^2 = const = k/\rho\gamma$ – коэффициент внутренней теплопроводности, ρ - плотность вещества, γ - коэффициент теплоёмкости вещества.

Для неограниченного стержня $-\infty < x < +\infty$ решением уравнения (1.1) при начальном условии:

$$u\,(x,0) = \varphi(x) \qquad (3.1.2)$$

является следующая функция: $a^2 = const = k/\rho\gamma$

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s) G(x,s;t)\,ds + \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x,t) G(x,s;t-\tau)\,ds\,d\tau, \qquad (3.1.3)$$

где

$$G(x,s;t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} exp\left(-\frac{(s-x)^2}{4a^2 t}\right). \qquad (3.1.4)$$

Рассмотрим различные краевые задачи на полубесконечной прямой.

$$0 \le x < \infty$$

3.1.1. Первая краевая задача на $[0,+\infty)$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Phi(x,t), & x \in (0,+\infty), t \in (0,+\infty), \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in [0,+\infty), \\ u(0,t) = \psi(t), & t \in [0,+\infty). \end{cases}$$

Решение.

$$u(x,t) = \int_0^{+\infty} \varphi(s) G(x,s;t) ds + \int_0^t \psi(\tau) H(x,s;t-\tau) d\tau + \int_0^t \int_0^{+\infty} \Phi(s,t) G(x,s;t-\tau) ds d\tau, \qquad (3.2.1)$$

где

$$G(x,s;t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left\{ exp\left(-\frac{(s-x)^2}{4a^2 t}\right) - exp\left(-\frac{(s+x)^2}{4a^2 t}\right) \right\}. \qquad (3.2.2)$$

$$H(x,s;t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi t^3}} exp\left(-\frac{x^2}{4a^2 t}\right) \qquad (3.2.2)$$

3.1.2. Вторая краевая задача на $[0, +\infty)$.

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = \Phi(x,t), & x \in (0,+\infty), t \in (0,+\infty), \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in [0,+\infty), \\ u_x(0,t) = \psi(t), & t \in [0,+\infty). \end{cases}$$

Решение.

$$u(x,t) = \int_0^{+\infty} \varphi(s) G(x,s;t) ds - a^2 \int_0^t \psi(\tau) G(x,0;t-\tau) d\tau + \int_0^t \int_0^{+\infty} \Phi(s,\tau) G(x,s;t-\tau) ds d\tau,$$

где

$$G(x,s;t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left\{ exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right) + exp\left(-\frac{(x+s)^2}{4a^2 t}\right) \right\}$$

$$G(x,0;t) = \frac{1}{a\sqrt{\pi t}} exp\left(-\frac{x^2}{4a^2 t}\right)$$

3.1.3. Третья краевая задача на [0,+∞).

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = \Phi(x,t), & x \in (0,+\infty), t \in (0,+\infty), \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in [0,+\infty), \\ u_x(0,t) - ku = \psi(t), & t \in [0,+\infty). \end{cases}$$

Решение.

$$u(x,t) = \int_0^{+\infty} \varphi(s) G(x,s;t) ds - a^2 \int_0^t \psi(\tau) G(x,0;t-\tau) d\tau + \int_0^t \int_0^{+\infty} \Phi(x,\tau) G(x,s;t-\tau) ds d\tau,$$

где

$$G(x,s;t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left\{ exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right) exp\left(-\frac{(x+s)^2}{4a^2 t}\right) - 2k \int_0^{+\infty} exp\left[-\frac{(x+s+\eta)^2}{4a^2 t} - k\eta\right] d\eta \right\}$$

3.1.4. Первая краевая задача на отрезке $[0; l]$.

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = \Phi(x,t), & x \in (0 < x < l), \quad t \in (0, +\infty); \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in [0; l]; \\ u(0,t) = \psi_1(t), & t \in [0, +\infty), \\ u(l,t) = \psi_2(t), & t \in [0, +\infty) \end{cases}$$

Решение.

$$u(x,t) = \int_0^l \varphi(s) G(x,s;t) ds + \int_0^t \int_0^l \Phi(s,\tau) G(x,s;t-\tau) ds d\tau + a^2 \int_0^t \psi_1(\tau) H_1(x,t-\tau) d\tau -$$

$$- a^2 \int_0^t \psi_2(\tau) H_2(x,t-\tau) d\tau \,, \qquad (3.3.2)$$

Две формы представления функции Грина:

$$G(x,s;t) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} sin(\lambda_n x) sin(\lambda_n s) exp\left(-a^2\lambda_n^2 t\right) = \qquad (3.2.2)$$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{exp\left(-\frac{(x-s+2nl)^2}{4a^2t}\right) - exp\left(-\frac{(x+s+2nt)^2}{4a^2t}\right)\right\}.$$

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{l}$$

Первый ряд сходится быстро при больших t, а второй – при малых t. Функции H_1 и H_2 выражаются через функции Грина по формулам:

$$H_1(x,t) = \frac{\partial}{\partial s}G(x,s,t)|_{s=0}\,, \qquad H_2(x,t) = \frac{\partial}{\partial s}G(x,s,t)|_{s=l}$$

3.1.2. Вторая краевая задача на отрезке $[0; l]$.

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = \Phi(x,t), & x \in (0,+\infty), t \in (0,+\infty), \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in [0,+\infty), \\ u_x(0,t) = \psi_1(t), & t \in [0,+\infty) \\ u_x(l,t) = \psi_2(t), & t \in [0,+\infty) \end{cases}.$$

Решение.

$$u(x,t) = \int_0^l \varphi(s) G(x,s;t)ds + \int_0^t \int_0^l \Phi(s,\tau) G(x,s;t-\tau) ds d\tau -$$

$$-a^2 \int_0^t \psi_1(\tau) G(x,0;t-\tau) d\tau + a^2 \int_0^t \psi_2(\tau) G(x,l;t-\tau) d\tau,$$

где

Две формы представления функции Грина:

$$G(x,s;t)=\frac{1}{l}+\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}cos(\lambda_n x)\,cos(\lambda_n s)\,exp(-a^2\lambda_n^2 t)= \qquad (3.2.2)$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{exp\left(-\frac{(x-s+2nl)^2}{4a^2t}\right)exp\left(-\frac{(x+s+2nt)^2}{4a^2t}\right)\right\}.$$

$$\lambda_n=\frac{\pi n}{l}$$

Первый ряд сходится быстро при больших t, а второй – при малых t. Функции и выражаются через функции Грина по формулам:

3.3. Область: $0 \le x \le l$. Третья краевая задача ($k_1 > 0$, $k_2 > 0$).

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = \Phi(x,t), & x \in (0 < x < l), \quad t \in (0,+\infty); \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in [0;l]; \\ u_x(0,t) - k_1\, u(0,t) = \psi_1(t) & t \in [0,+\infty), \\ u_x(l,t) + k_2\, u(l,t) = \psi_2(t), & t \in [0,+\infty), \end{cases}$$

<u>Решение</u> :

$$u(x,t) = \int_0^l \varphi(s)\, G(x,s,t)ds - a^2 \int_0^t \psi_1(\tau) G(x,0,t-\tau)d\tau + a^2 \int_0^t \psi_2(\tau) G(x,l,t-\tau)d\tau +$$

$$+ \int_0^t \int_0^l \Phi(s,\tau) G(x,s;t-\tau)dsd\tau,$$

Здесь

$$G(x,s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\|y_n\|^2} y_n(x) y_n(s) exp(-\mu_n^2 a^2 t),$$

где

$$y_n(x) = cos(\mu_n x) + \frac{k_1}{\mu_n} sin(\mu_n x), \qquad \|y_n\|^2 = \frac{k_2}{2\mu_n^2} \frac{\mu_n^2 + k_1^2}{\mu_n^2 + k_2^2} + \frac{k_1}{2\mu_n^2} + \frac{l}{2}\left(1 + \frac{k_1^2}{\mu_n^2}\right)$$

μ_n – положительные корни трансцендентного уравнения:

$$\frac{tg(\mu l)}{\mu} = \frac{k_1 + k_2}{\mu^2 - k_1 k_2}$$

3.4. Область: $0 \le x \le l$. Смешанные краевые задачи на $[0; l]$.

Вариант 1.

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = \Phi(x,t), & x \in (0 < x < l), \quad t \in (0, +\infty); \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in [0; l]; \\ u(0,t) = \psi_1(t) & t \in [0, +\infty), \\ u_x(l,t) = \psi_2(t), & t \in [0, +\infty), \end{cases}$$

Решение :

$$u(x,t) = \int_0^l \varphi(s)\, G(x,s,t)ds + \int_0^t \int_0^l \Phi(s,\tau) G(x,s;t-\tau)dsd\tau +$$

$$+a^2 \int_0^t \psi_1(\tau) \left[\frac{\partial}{\partial s} G(x,s,t-\tau)\right]\Big|_{s=0} d\tau + a^2 \int_0^t \psi_2(\tau) G(x,l,t-\tau)d\tau$$

Две формы представления функции Грина:

$$G(x,s,t)=\frac{2}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\sin(\lambda_n x)\sin(\lambda_n s)\exp\left(-\lambda_n^2 a^2 t\right)=$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\left\{\exp\left(-\frac{(x-s+2nl)^2}{4a^2t}\right)-\exp\left(-\frac{(x+s+2nl)^2}{4a^2t}\right)\right\}.$$

$$\lambda_n=\frac{\pi(2n+1)}{2l}$$

Первый ряд сходится быстро при больших t, а второй – при малых t.

3.4. Область: $0 \le x \le l$. Смешанные краевые задачи на $[0; l]$.

Вариант 2.

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = \Phi(x,t), & x \in (0 < x < l), \quad t \in (0, +\infty); \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in [0; l]; \\ u_x(0,t) = \psi_1(t) & t \in [0, +\infty), \\ u(l,t) = \psi_2(t), & t \in [0, +\infty), \end{cases}$$

Решение :

$$u(x,t) = \int_0^l \varphi(s)\, G(x,s,t)ds + \int_0^t \int_0^l \Phi(s,\tau) G(x,s;t-\tau)ds d\tau -$$

$$-a^2 \int_0^t \psi_1(\tau) G(x,0,t-\tau)d\tau - a^2 \int_0^t \psi_2(\tau) \left[\frac{\partial}{\partial s} G(x,s,t-\tau)\right]\Big|_{s=l} d\tau$$

где

Две формы представления функции Грина:

$$G(x,s,t)=\frac{2}{l}\sum_{n=0}^{\infty}cos(\lambda_n x)\,cos(\lambda_n s)exp\left(-\lambda_n^2\,a^2t\right)=$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\left\{exp\left(-\frac{(x-s+2nl)^2}{4a^2t}\right)+exp\left(-\frac{(x+s+2nl)^2}{4a^2t}\right)\right\}.$$

$$\lambda_n=\frac{\pi(2n+1)}{2l}$$

Первый ряд сходится быстро при больших t, а второй – при малых t.

Задача 1. (Словесная формулировка).

Найдите распределение температуры в тонком однородном стержне $[0;\ \pi\,]$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если в начальный момент времени задано линейное распределение температуры $u(x,0) = u_0 + u_1 x$, где u_0, u_1 − константы. На концах стержня поддерживается нулевая температура и по стержню непрерывно распределены источники тепла с плотностью $F(x,t) = A\sin(3x)$, где $A - const$.

Математическая постановка краевой задачи имеет вид:

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = A\sin(3x), & x \in (0 < x < \pi), \quad t \in (0,+\infty); \\ u(x,0) = u_0 + u_1 x, & x \in [0;\pi]; \\ u(0,t) = \psi_1(t) = 0, & t \in [0,+\infty), \\ u(\pi,t) = \psi_2(t), = 0 & t \in [0,+\infty) \end{cases}$$

Внимание! Решить задачу, используя два представления функции Грина (см. сайт N 8).

Задача 2. (Словесная формулировка).

Найдите распределение температуры в тонком однородном стержне $[0;\ \pi]$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если в начальный момент времени задано линейное распределение температуры $u(x,0) = u_0 + u_1 x$, где u_0, u_1 – константы. Концы стержня теплоизолированы и по стержню непрерывно распределены источники тепла с плотностью $F(x,t) = \Phi(t)cos(2x)$, где $\Phi(t)$ –заданная функция.

Математическая постановка краевой задачи имеет вид:

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = \Phi(t)cos(2x), & x \in (0 < x < \pi), \quad t \in (0,+\infty); \\ u(x,0) = \varphi(x) = u_0 + u_1 x, & x \in [0;\pi]; \\ u_x(0,t) = \psi_1(t) = 0, & t \in [0,+\infty), \\ u_x(\pi,t) = \psi_2(t), = 0 & t \in [0,+\infty) \end{cases}$$

Внимание! Решить задачу, используя два представления функции Грина (см. сайт N 10).

БЛАГОДАРЮ

ЗА

ВНИМАНИЕ