Решение заданий ЕГЭ по математике профильного уровня (задание № 14)

Обобщенный план варианта КИМ ЕГЭ 2019 года
по МАТЕМАТИКЕ (профильный уровень)

Уровни сложности заданий: Б – базовый; П – повышенный; В – высокий

№	Проверяемые требования (умения)	Коды проверяемых требований к уровню подготовки (по кодификатору)	Коды проверяемых элементов содержания (по кодификатору)	Уровень сложности задания	Максимальный балл за выполнение задания	Примерное время выполнения задания выпускником, изучавшим математику на базовом уровне, в минутах
14	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	4.2, 4.3, 5.2, 5.3	5.2–5.6	П	2	40

Код контролируемого требования (умения)	Требования (умения), проверяемые заданиями экзаменационной работы
4.2	Решать простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов); использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы
4.3	Определять координаты точки; проводить операции над векторами, вычислять длину и координаты вектора, угол между векторами
5.2	Моделировать реальные ситуации на языке геометрии, исследовать построенные модели с использованием геометрических понятий и теорем, аппарата алгебры; решать практические задачи, связанные с нахождением геометрических величин
5.3	Проводить доказательные рассуждения при решении задач, оценивать логическую правильность рассуждений, распознавать логически некорректные рассуждения

Код	Элементы содержания, проверяемые заданиями экзаменационной работы
5.2	***Прямые и плоскости в пространстве*** 5.2.1 Пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые; перпендикулярность прямых 5.2.2 Параллельность прямой и плоскости, признаки и свойства 5.2.3 Параллельность плоскостей, признаки и свойства 5.2.4 Перпендикулярность прямой и плоскости, признаки и свойства; перпендикуляр и наклонная; теорема о трёх перпендикулярах 5.2.5 Перпендикулярность плоскостей, признаки и свойства 5.2.6 Параллельное проектирование. Изображение пространственных фигур
5.3	***Многогранники*** 5.3.1 Призма, её основания, боковые рёбра, высота, боковая поверхность; прямая призма; правильная призма 5.3.2 Параллелепипед; куб; симметрии в кубе, в параллелепипеде 5.3.3 Пирамида, её основание, боковые рёбра, высота, боковая поверхность; треугольная пирамида; правильная пирамида 5.3.4 Сечения куба, призмы, пирамиды 5.3.5 Представление о правильных многогранниках (тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр)
5.4	***Тела и поверхности вращения*** 5.4.1 Цилиндр. Основание, высота, боковая поверхность, образующая, развёртка 5.4.2 Конус. Основание, высота, боковая поверхность, образующая, развёртка 5.4.3 Шар и сфера, их сечения
5.5	***Измерение геометрических величин*** 5.5.1 Величина угла, градусная мера угла, соответствие между величиной угла и длиной дуги окружности 5.5.2 Угол между прямыми в пространстве, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями 5.5.3 Длина отрезка, ломаной, окружности; периметр многоугольника 5.5.4 Расстояние от точки до прямой, от точки до плоскости; расстояние между параллельными и скрещивающимися прямыми; расстояние между параллельными плоскостями 5.5.5 Площадь треугольника, параллелограмма, трапеции, круга, сектора 5.5.6 Площадь поверхности конуса, цилиндра, сферы 5.5.7 Объём куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара
5.6	***Координаты и векторы*** 5.6.1 Координаты на прямой, декартовы координаты на плоскости и в пространстве 5.6.2 Формула расстояния между двумя точками, уравнение сферы 5.6.3 Вектор, модуль вектора, равенство векторов, сложение векторов и умножение вектора на число 5.6.4 Коллинеарные векторы. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам 5.6.5 Компланарные векторы. Разложение по трём некомпланарным векторам 5.6.6 Координаты вектора, скалярное произведение векторов, угол между векторами

Критерии проверки и оценка решений задания 14

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б*	2
Выполнен только один из пунктов – *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	2

Типичные ошибки при решении задания 14

Неверное понимание логики построения доказательства.

Например, доказательство **пункта *а*** может начинаться так:

«Предположим, что треугольник прямоугольный, тогда …» – в случае, когда нужно доказать, что треугольник прямоугольный;

«Пусть прямые параллельны…» – в случае, когда нужно доказать параллельность прямых.

Учащиеся **неверно применяют признаки**: перпендикулярности прямой и плоскости, параллельности плоскостей и т. д., демонстрируют непонимание взаимосвязи элементов геометрической конструкции.

При выполнении **пункта *б*** учащиеся:

– допускают ошибки в геометрических формулах;

– не считают нужным доказывать неочевидные геометрические утверждения, используемые в решении;

– допускают вычислительные ошибки.

Учащиеся допускают ошибки при построении чертежа.

Особенности первого пункта задания 14

Возможны две ситуации в условии, описывающем геометрическую конфигурацию до формулировки пункта *а*. Условие до пункта *а* задания:

– не содержит числовых данных (в этом случае свойство, которое нужно доказать в пункте *а*, является общим и выполняется для всех конфигураций описанных в условии);

ЕГЭ 2017

На рёбрах AB и BC треугольной пирамиды $ABCD$ отмечены точки M и N, так что $AM : MB = CN : NB = 1 : 2$. Точки P и Q середины рёбер DA и DC соответственно.
а) Докажите, что точки P, Q, M и N лежат в одной плоскости.
б) Найдите отношение объёмов многогранников, на которые плоскость PQM разбивает пирамиду.

– содержит числовые данные (в этом случае доказываемое свойство обычно является частным и выполняется только для приведенного в условии набора числовых данных и доказательство основывается на вычислениях, то есть сводится к проверке указанного свойства).

Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Диагонали боковых граней AA_1B_1B и BB_1C_1C равны 15 и 9 соответственно, $AB = 13$.
а) Докажите, что треугольник BA_1C_1 прямоугольный.
б) Найдите объём пирамиды AA_1C_1B.

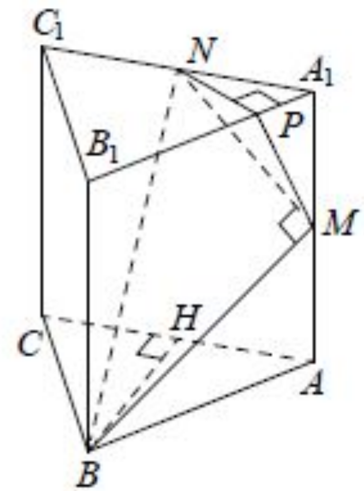
ЕГЭ 2017

Задача 14 (демонстрационный вариант 2019, 2018 г)

Все рёбра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину 6. Точки M и N — середины рёбер AA_1 и A_1C_1 соответственно.

а) Докажите, что прямые BM и MN перпендикулярны.

б) Найдите угол между плоскостями BMN и ABB_1.



Решение. а) Пусть точка H — середина AC. Тогда

$$BN^2 = BH^2 + NH^2 = \left(3\sqrt{3}\right)^2 + 6^2 = 63.$$

Вместе с тем,

$$BM^2 + MN^2 = (3^2 + 6^2) + (3^2 + 3^2) = 63,$$

а тогда по теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник BMN является прямоугольным с прямым углом M.

б) Проведём перпендикуляр NP к прямой A_1B_1. Тогда $NP \perp A_1B_1$ и $NP \perp A_1A$. Следовательно, $NP \perp ABB_1$. Поэтому MP — проекция MN на плоскость ABB_1.

Прямая BM перпендикулярна MN, тогда по теореме о трёх перпендикулярах $BM \perp MP$. Следовательно, угол NMP — линейный угол искомого угла.

Длина NP равна половине высоты треугольника $A_1B_1C_1$, то есть $NP = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

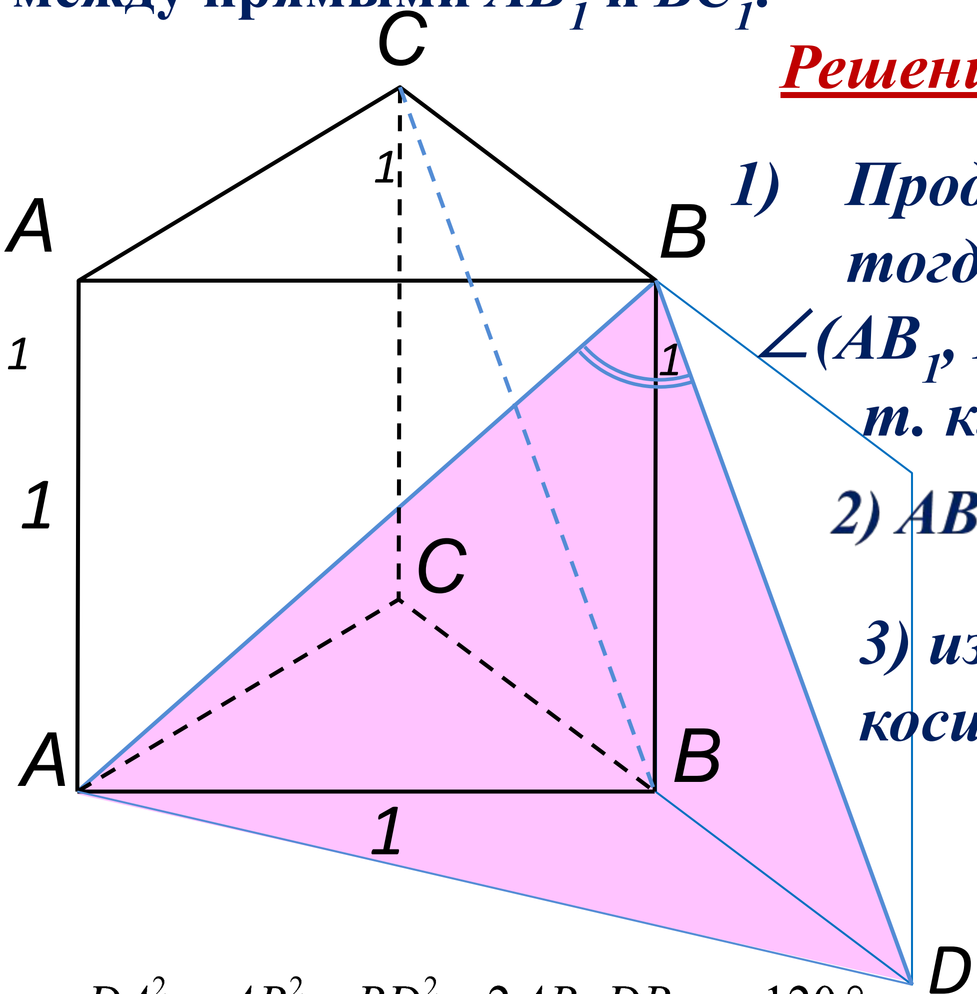
Поэтому $\sin\angle NMP = \frac{NP}{MN} = \frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$.

Следовательно, $\angle NMP = \arcsin\sqrt{\frac{3}{8}}$.

Ответ: б) $\arcsin\sqrt{\frac{3}{8}}$.

Задача № 1

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1.



Решение:

1) ***Продлим плоскость BCC_1, тогда $\angle(AB_1, BC_1) = \angle(AB_1, DB_1) = \angle AB_1D$, т. к. $C_1B \parallel B_1D$.***

2) ***$AB_1 = B_1D = \sqrt{2}$ из ΔABB_1***

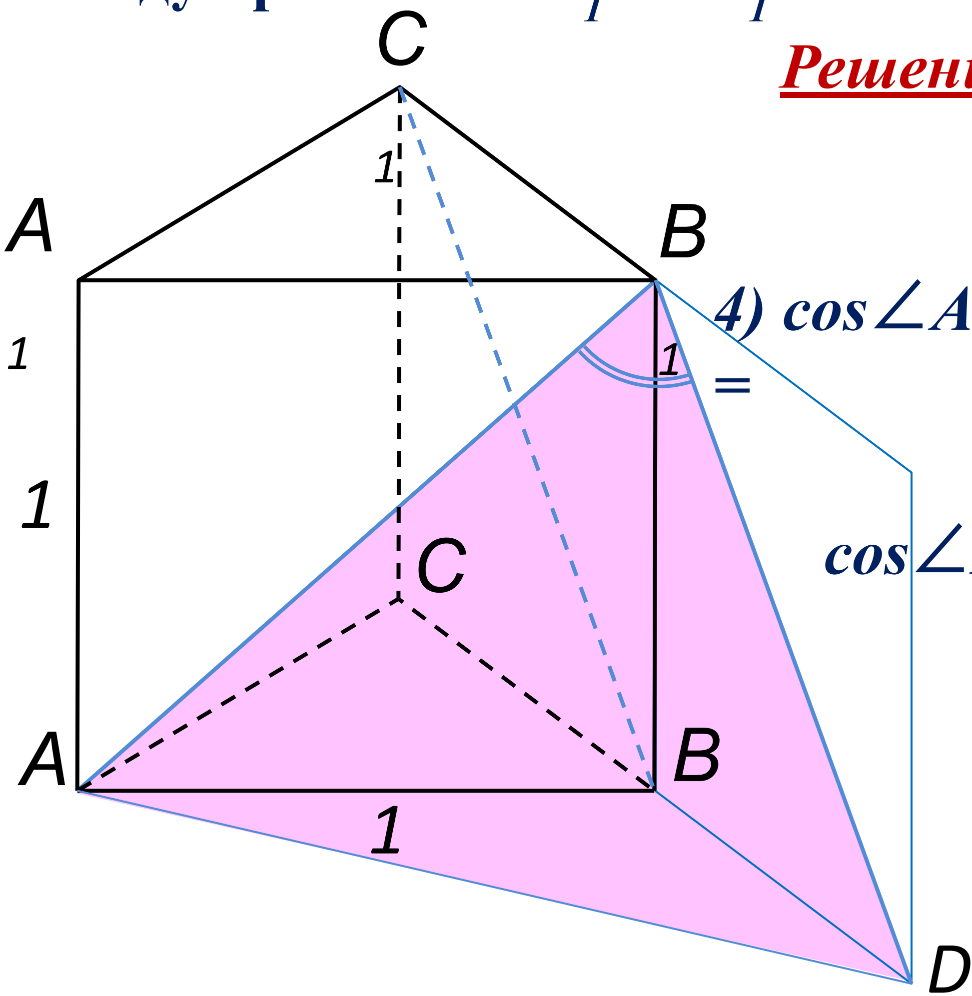
3) ***из ΔABD по теореме косинусов***

$$DA^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot DB \cdot \cos 120^\circ =$$

$$= 1 + 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-0,5) = 3$$

Задача № 1 (продолжение)

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1.



Решение:

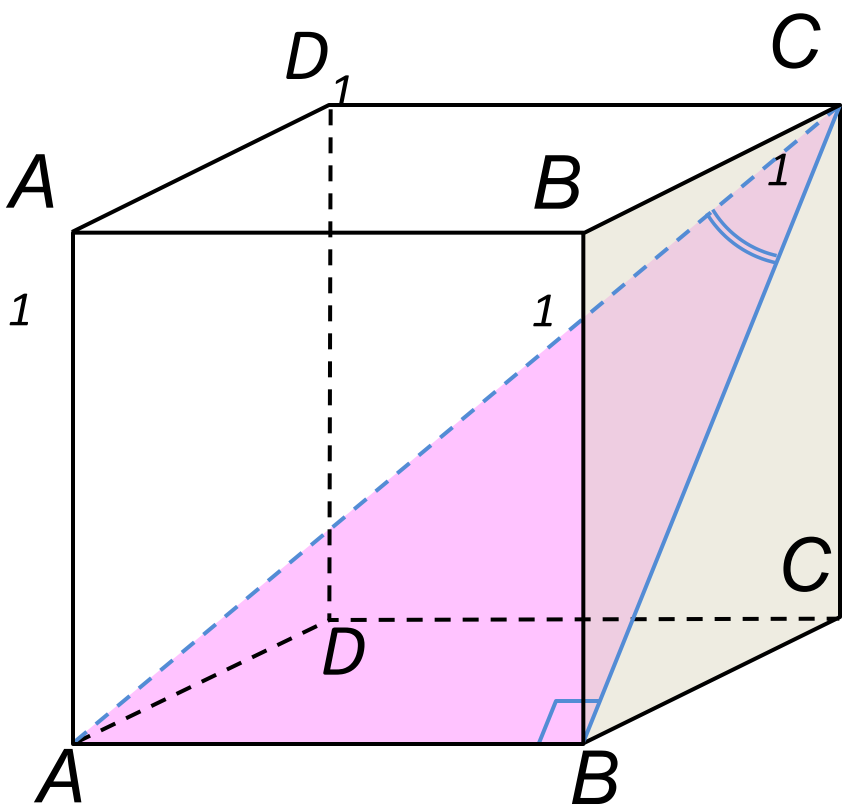
4) $\cos\angle AB_1D = \dfrac{AB_1^2 + B_1D^2 - AD^2}{2 \cdot AB_1 \cdot B_1D}$

$\cos\angle AB_1D = \dfrac{2+2-3}{2\cdot 2} = \dfrac{1}{4}$

Ответ: 0,25 .

Задача № 2

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямой AC_1 и плоскостью BCC_1.



Решение:

1) BC_1 - проекция прямой AC_1 на плоскость (BCC_1), так как $AB \perp (BCC_1)$ $AB \perp BC_1$; $\angle(AC_1, (BCC_1)) = \angle(AC_1, C_1B) = \angle AC_1B$, т.е. ΔABC_1 – прямоугольный

2) Пусть $AB = a$, тогда $BC_1 = a\sqrt{2}$ из ΔC_1CB

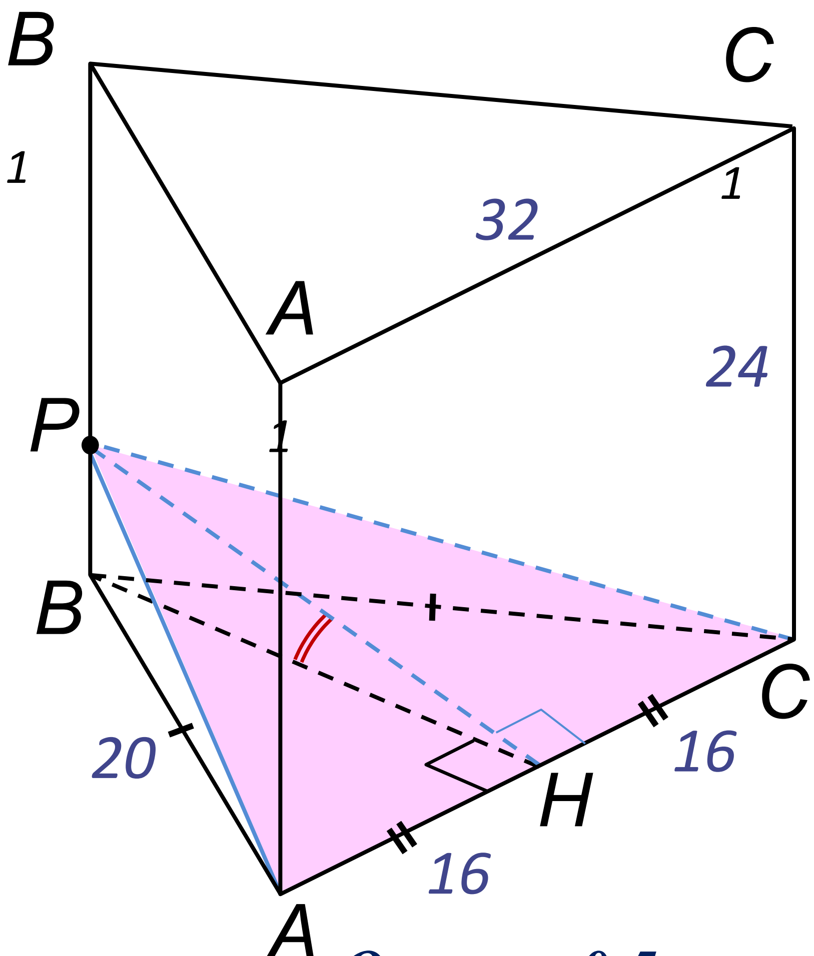
3) $tg\angle AC_1B = \dfrac{AB}{BC_1} = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

4) $\angle AC_1B = arctg\sqrt{2}/2$

Ответ: $arctg\sqrt{2}/2$

Задача № 3

Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, является равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB = BC = 20$, $AC = 32$. Боковое ребро призмы равно 24. Точка P принадлежит ребру BB_1, причем $BP : PB_1 = 1 : 3$. Найдите тангенс угла между плоскостями $A_1B_1C_1$ и ACP.



Решение:

1) Так как $(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$, то $\angle((A_1B_1C_1), (ACP)) = \angle((ABC),(ACP))$.

2) Т.к. $BH \perp AC$ (высота р/б Δ), то по теореме о трех перпендикулярах $PH \perp AC$.

3) Тогда $\angle PHB$ – линейный угол двугранного $\angle PACB$. Найдем его из прямоугольного ΔPHB.

4) $PB = ¼\, BB_1 = ¼ \cdot 24 = 6$,

5) $BH^2 = AB^2 - AH^2$ (из ΔAHB)

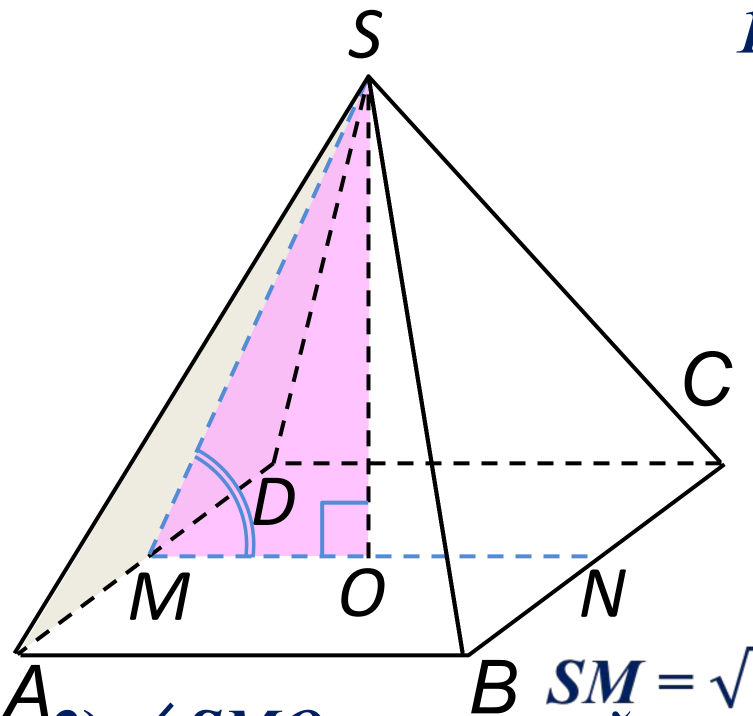
$BH^2 = 20^2 - 16^2 = 144$, $BH = 12$;

6) $tg\angle PHB = PB/HB = 6/12 = 0{,}5$.

Ответ: *0,5 .*

Задача № 4

В правильной четырехугольной пирамиде SABCD, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямой AB и плоскостью SAD.



Решение:

1) Так как ABCD – квадрат, то AB ⊥ AD. Поэтому проекция AB на плоскость (SAD) будет ⊥ AD.

Значит, искомый угол – двугранный угол при ребре основания AD.

2) SM – высота грани SAD,

$SM = \sqrt{3}/2$, MO ∥ AB; MO = ½AB = 0,5.

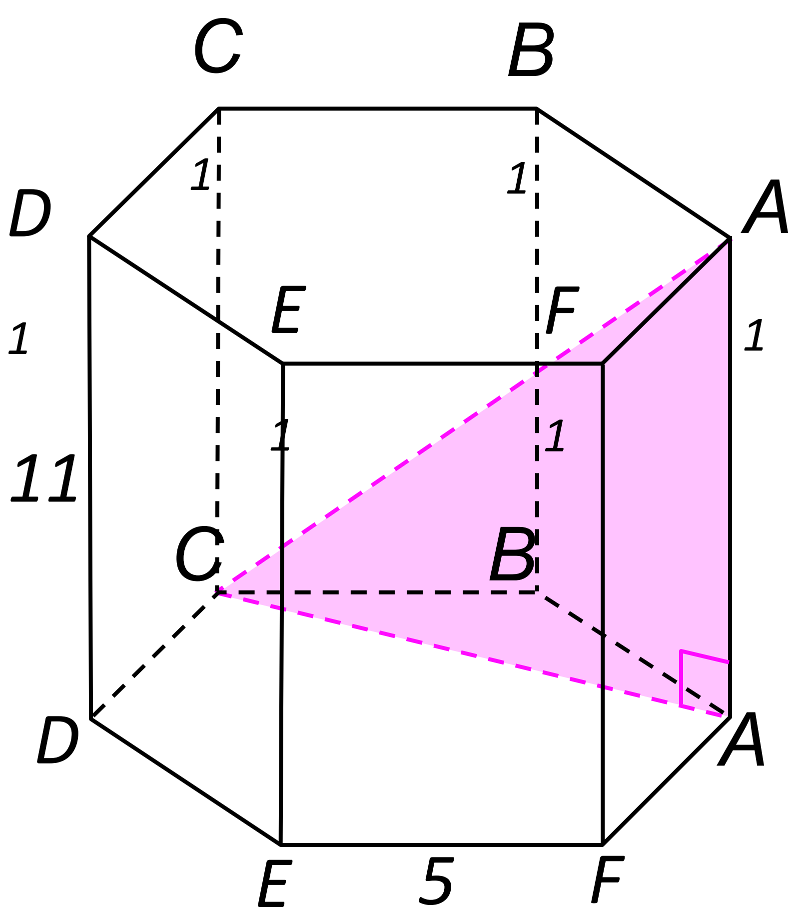
3) ∠SMO – искомый угол, косинус которого найдем из прямоугольного ∆SMO

$$\cos\angle SMO = \frac{MO}{SM} = \frac{0,5}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Ответ: $\sqrt{3}/3$

Задача № 5

В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, стороны основания которой равны 5, а боковые рёбра равны 11, найдите расстояние от точки C до прямой A_1F_1.



Решение:

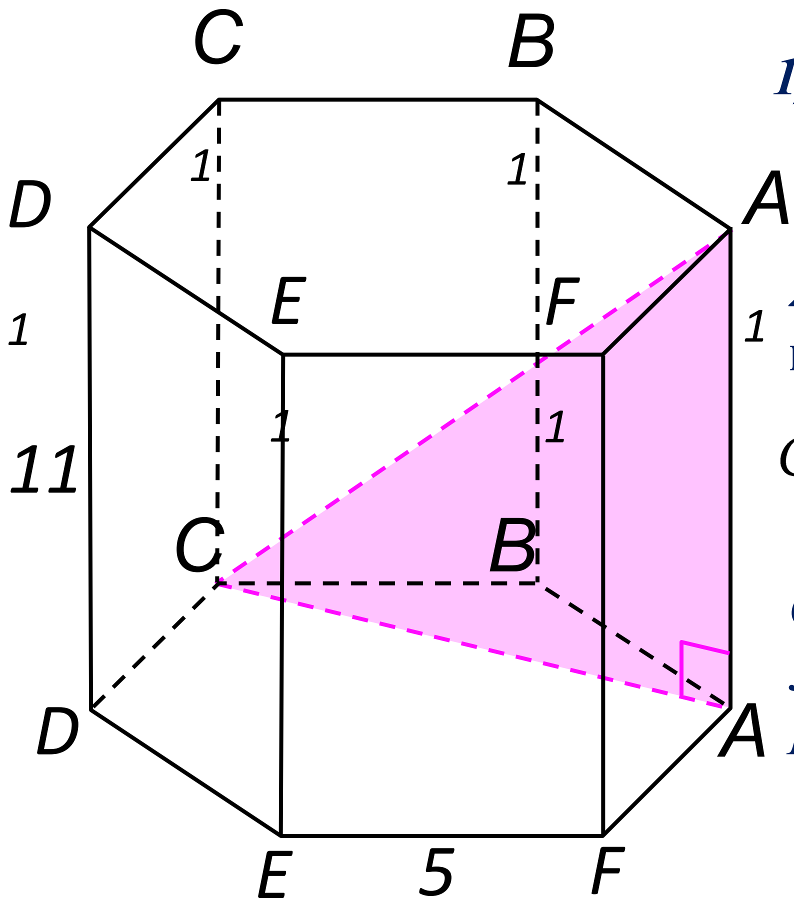
1)Так как ABCDEF – правильный шестиугольник, то $CA \perp AF$. $CA \perp A_1A$ по определению правильной призмы.

⇨ $CA \perp (AA_1F_1)$ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, т.е. CA –перпендикуляр к плоскости, CA_1 - наклонная , A_1A – проекция наклонной, $A_1A \perp A_1F_1$; A_1F_1 – прямая в плоскости.

Тогда по теореме о трёх перпендикулярах $CA_1 \perp A_1F_1$, значит длина отрезка CA_1 равна искомому расстоянию.

Задача № 5 (продолжение)

В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, стороны основания которой равны 5, а боковые рёбра равны 11, найдите расстояние от точки C до прямой A_1F_1.



Решение:

1) Доказано, что CA_1 - искомое расстояние.

2) *Из* Δ ABC (AB=BC=5, $\angle B = 120^0$) по теореме косинусов найдём CA:

$$CA^2 = CB^2 + BA^2 - 2CB \cdot AB \cdot \cos\angle B,$$

$$\cos 120^0 = -\cos 60^0 = -0{,}5,$$

$CA = 5\sqrt{3}$.

3) Из ΔCAA_1, $\angle A = 90^0$ ***по теореме Пифагора найдём*** CA_1:

$$CA_1^{\ 2} = CA^2 + AA_1^{\ 2}$$

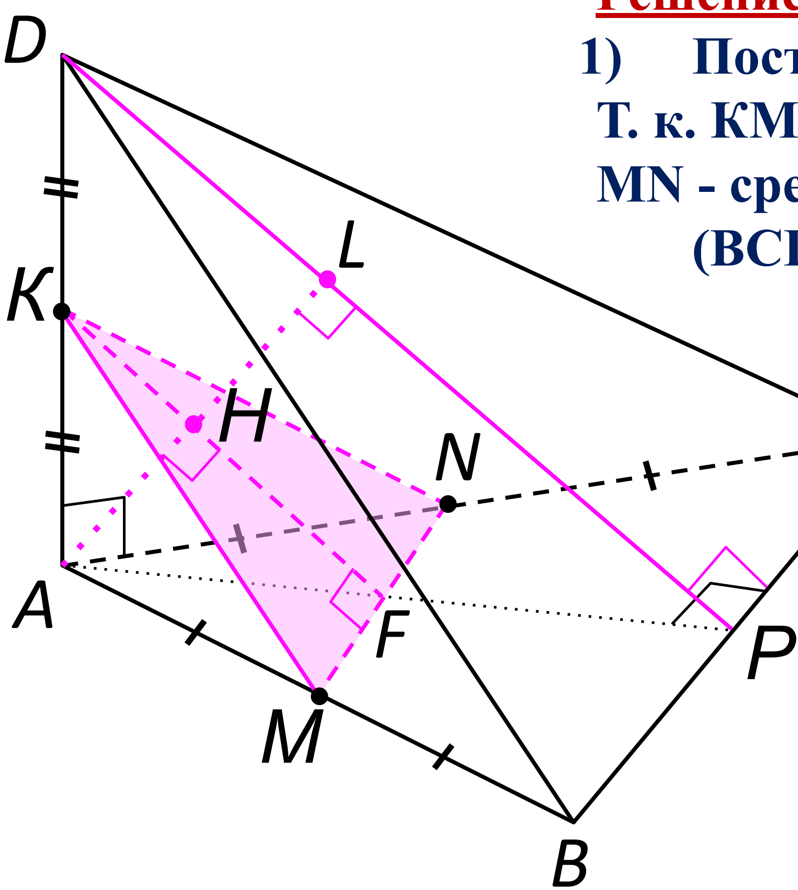
$CA_1^{\ 2} = 75 + 121 = 196.$

$CA_1 = 14$

Ответ: *14.*

Задача № 6

Ребро *AD* пирамиды *DABC* перпендикулярно плоскости основания *ABC*. Найдите расстояние от *A* до плоскости, проходящей через середины ребер *AB*, *AC* и *AD*, если $AD = 2\sqrt{5}$, $AB = AC = 10$, $BC = 4\sqrt{5}$.



Решение:

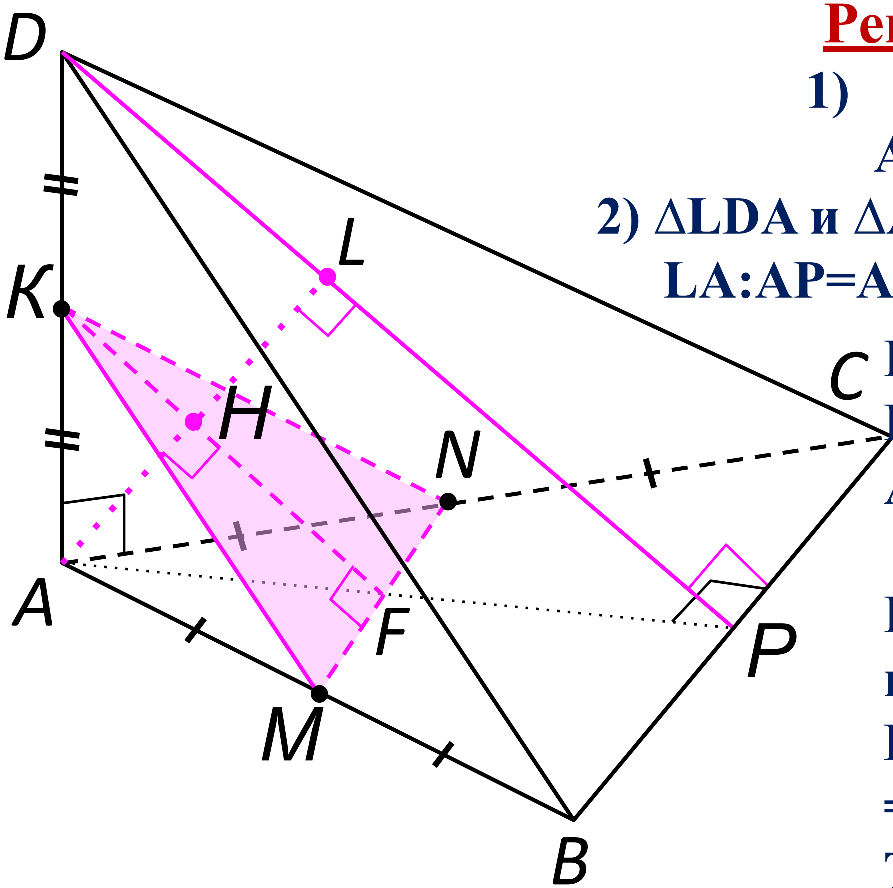
1) Построим плоскость KMN.

Т. к. KM – средняя линия ΔADB, KM // DB, MN - средняя линия ΔABC, MN // CB, то (KMN) // (BCD) по признаку // плоскостей. AP–медиана и высота р/б ΔABC , KF–медиана и высота р/б ΔKMN. DP ⊥ BC по теореме о трёх перпендикулярах. KF //DP.

Искомое расстояние AH равно половине расстояния от вершины A до плоскости BCD, т.к. (KMN) // (BCD) и KF – средняя линия Δ ADP.

Задача № 6 (продолжение).

Ребро *AD* пирамиды *DABC* перпендикулярно плоскости основания *ABC*. Найдите расстояние от *A* до плоскости, проходящей через середины ребер *AB*, *AC* и *AD*, если $AD = 2\sqrt{5}$, $AB = AC = 10$, $BC = 4\sqrt{5}$.



Решение:

1) Доказано, что AH - искомое расстояние.

2) ΔLDA и ΔADP подобны по двум углам, LA:AP=AD:DP, тогда AL=(AP*AD):DP.

Найдём AP из ΔABP по теореме Пифагора (AB=10, $BP = 2\sqrt{5}$):

$AP^2 = AB^2 – BP^2 = 100 – 20 =$

$= 80$; $AP= 4\sqrt{5}$

Найдём DP из ΔADP по теореме Пифагора:

$DP^2 = AD^2 + AP^2 =$

$= 20 + 80 = 100$; $DP = 10$.

Тогда $AL =(4\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}):10=4$

Итак, AH = ½ AL = 2.

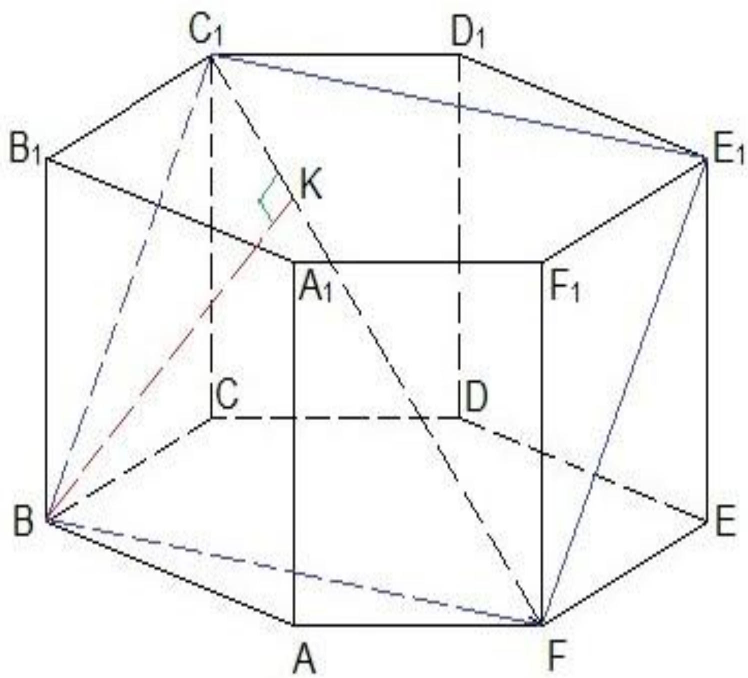
Ответ: 2.

Задача № 7

В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны 1.

а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки B, C_1 и F.

б) Найдите расстояние от точки B до прямой C_1F.



Решение:

а) 1) BC_1, BF, FE_1 // C_1B , E_1C_1 => Сечение – четырёхугольник BC_1E_1F с диагональю C_1F.

2) Сторона $BC_1 = \sqrt{2}$ - диагональ квадрата BB_1C_1C со стороной 1.

3) Сторону BF найдём из ΔABF по теореме косинусов:

$BF^2=AB^2+AF^2-2\cdot AB\cdot AF\cdot \cos\angle BAF$;

$BF^2=AB^2+AF^2-2\cdot AB\cdot AF\cdot \cos 120^0 = 3$.

Тогда $BF = \sqrt{3}$.

4) Так как $\angle CBF=90°$, то по теореме о трёх перпендикулярах, $BF \perp BC_1$. Значит, сечение BC_1E_1F – прямоугольник. Диагональ прямоугольника $C_1F^2=BF^2+BC_1^2$; $C_1F^2=3+2=5$.

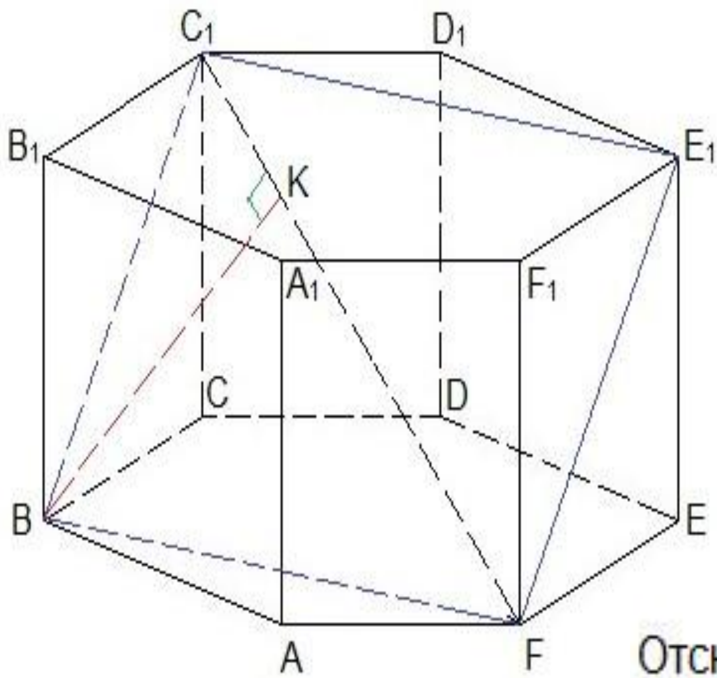
Отсюда $C_1F = \sqrt{5}$.

Задача № 7 (продолжение)

В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны 1.

а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки B, C_1 и F.

б) Найдите расстояние от точки B до прямой C_1F.



Решение.

б) Сечение – прямоугольник BC_1E_1F.

$BK \perp C_1F$, BK – искомое расстояние от точки B до прямой C_1F.

Найдем BK как высоту из ΔFBC_1,

Используя 2 формулы площади треугольника.

$$S_{\Delta FBC_1} = \frac{1}{2} BC_1 \cdot BF = \frac{1}{2} C_1F \cdot BK.$$

Отсюда следует $BK = \frac{BC_1 \cdot BF}{C_1F} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$.

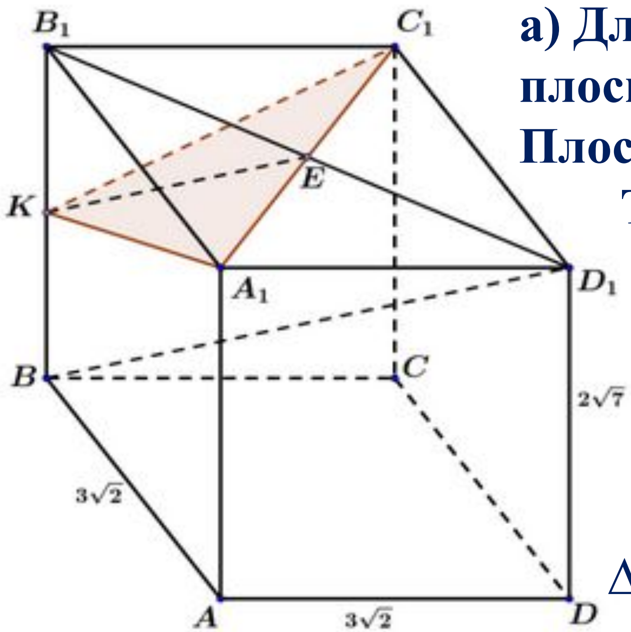
Ответ: $\sqrt{\frac{6}{5}}$.

Задача №8

Основанием прямой четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является квадрат ABCD со стороной $3\sqrt{2}$, высота призмы равна $2\sqrt{7}$. Точка K − середина ребра BB1. Через точки K и C1 проведена плоскость α, параллельная прямой BD1.

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью α является равнобедренным треугольником.

б) Найдите периметр треугольника, являющегося сечением призмы плоскостью α.



Решение.

а) Для построения сечения призмы плоскостью α, проведём KE||BD$_1$, E € B$_1$D$_1$. Плоскость α проходит через точки K, C$_1$ и E.

Так как K – середина BB$_1$ и KE||BD$_1$, то E – середина диагонали A$_1$C$_1$ квадрата A$_1$B$_1$C$_1$D$_1$. Значит, плоскость α пересекает грань A$_1$B$_1$C$_1$D$_1$ по диагонали A$_1$C$_1$. Соединив точки K, C$_1$ и A$_1$, получаем ΔA$_1$KC$_1$- сечение призмы плоскостью α.

ΔA$_1$KB$_1$= ΔC$_1$KB$_1$ по двум сторонам и углу между ними (A$_1$B$_1$=C$_1$B$_1$), B$_1$K – общая сторона, $\angle A_1B_1K = \angle C_1B_1K = 90^0$.

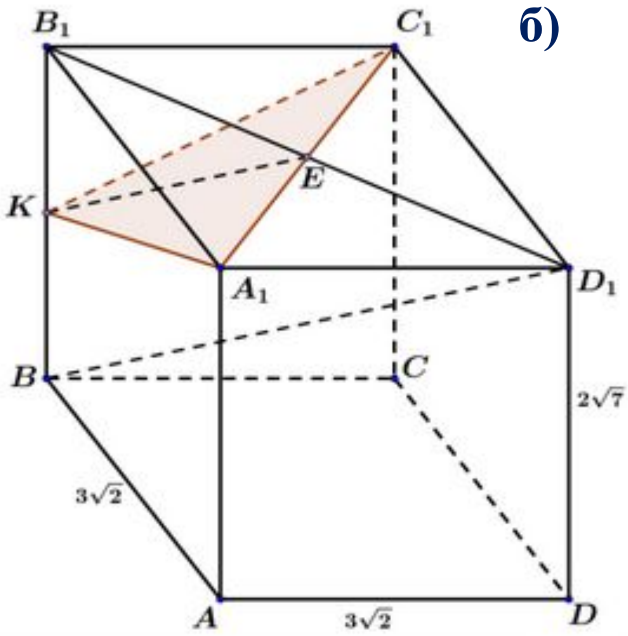
Из равенства треугольников следует, что A$_1$K=C$_1$K, значит ΔA$_1$KC$_1$ - равнобедренный.

Задача №8 (продолжение)

Основанием прямой четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является квадрат ABCD со стороной $3\sqrt{2}$, высота призмы равна $2\sqrt{7}$. Точка K − середина ребра BB_1. Через точки K и C_1 проведена плоскость α, параллельная прямой BD_1.

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью α является равнобедренным треугольником.

б) Найдите периметр треугольника, являющегося сечением призмы плоскостью α.



Решение.

б)

б) $P_{A_1KC_1} = A_1K + C_1K + A_1C_1.$

$$B_1K = \frac{1}{2}\cdot BB_1 = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{7} = \sqrt{7}.$$

$$A_1K = C_1K = \sqrt{B_1K^2 + B_1C_1^{\,2}} = \sqrt{\left(\sqrt{7}\right)^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{7+18} = 5.$$

$$A_1C_1 = \sqrt{A_1B_1^{\,2} + B_1C_1^{\,2}} = \sqrt{\left(3\sqrt{2}\right)^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{18+18} = 6.$$

$$P_{A_1KC_1} = 5+5+6 = 16.$$

Ответ: б) 16.

Задача 14

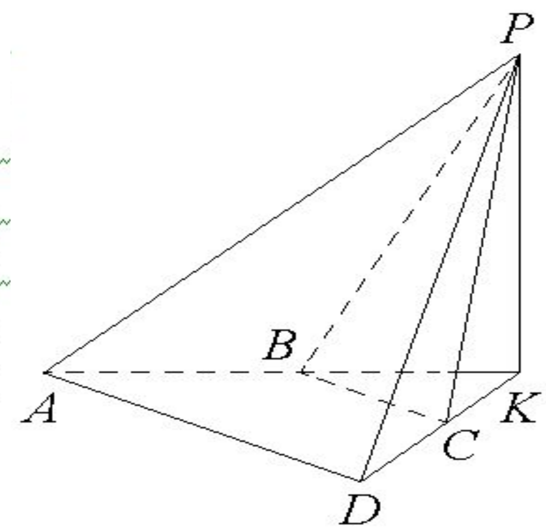
Основанием четырёхугольной пирамиды $PABCD$ является трапеция $ABCD$, причём $\angle BAD + \angle ADC = 90^\circ$. Плоскости PAB и PCD перпендикулярны плоскости основания, K — точка пересечения прямых AB и CD.

а) Докажите, что плоскости PAB и PCD перпендикулярны.

б) Найдите объём пирамиды $KBCP$, если $AB = BC = CD = 4$, а высота пирамиды $PABCD$ равна 9.

Решение.

а) Заметим, что $\angle AKD = 90^\circ$. Плоскости PAB и PCD перпендикулярны плоскости основания, поэтому они пересекаются по прямой, содержащей высоту пирамиды. Значит, PK — высота пирамиды. Таким образом, угол $\angle AKD$ является линейным углом двугранного угла между плоскостями PAB и PCD. Значит, они перпендикулярны.



Задача 14

Основанием четырёхугольной пирамиды $PABCD$ является трапеция $ABCD$, причём $\angle BAD + \angle ADC = 90°$. Плоскости PAB и PCD перпендикулярны плоскости основания, K — точка пересечения прямых AB и CD.

а) Докажите, что плоскости PAB и PCD перпендикулярны.

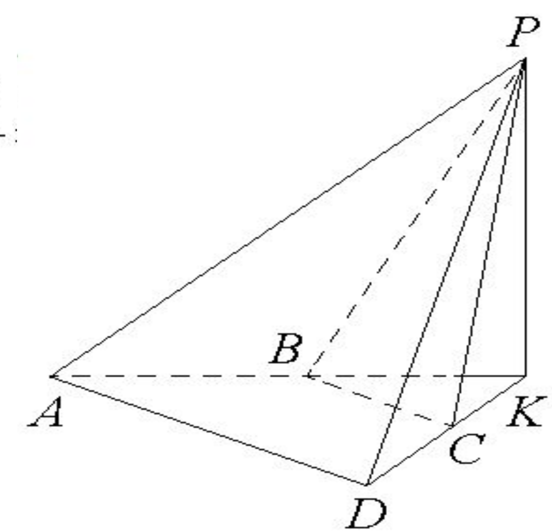
б) Найдите объём пирамиды $KBCP$, если $AB = BC = CD = 4$, а высота пирамиды $PABCD$ равна 9.

б) Поскольку $AB = CD$, трапеция $ABCD$ является равнобедренной. Значит,

$$\angle BAD = \angle ADC = \angle KBC = \angle KCB = 45°;$$

$$BK = CK = \frac{\sqrt{2}}{2} BC = 2\sqrt{2}.$$

Таким образом, площадь треугольника KBC равна $S_{KBC} = \dfrac{BK \cdot CK}{2}$



а объём пирамиды $KBCP$ равен $\dfrac{PK \cdot S_{KBC}}{3} = 12$.

Ответ: б) 12.

Задача 14

В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $2\sqrt{3}$. На рёбрах BC и C_1D_1 отмечены точки K и L соответственно, причём $BK = C_1L = 2$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L.

а) Докажите, что прямая A_1C перпендикулярна плоскости γ.

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой — точка A_1, а основание — сечение данной призмы плоскостью γ.

Решение.

а) Проведём через точки K и L прямые, параллельные BD. Пусть эти прямые пересекают рёбра CD и B_1C_1 в точках K_1 и L_1 соответственно (рис. 1). Тогда трапеция KL_1LK_1 является сечением исходной призмы плоскостью γ. Рассмотрим плоскость ACC_1. Пусть эта плоскость пересекает прямые KK_1 и LL_1 в точках E и F соответственно. Четырёхугольник AA_1C_1C — прямоугольник, причём $AA_1 = 2\sqrt{3}$, $AC = 6\sqrt{2}$.

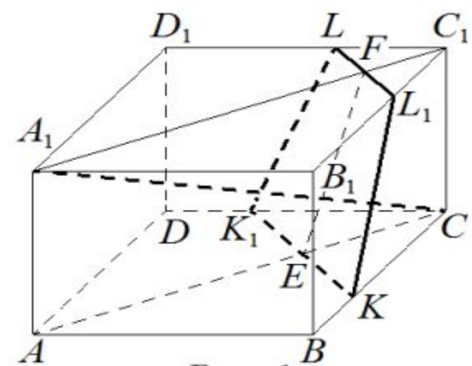


Рис. 1

Кроме того, $\frac{AC}{EC} = \frac{2BC}{KC} = 3$, $\frac{A_1C_1}{FC_1} = \frac{2D_1C_1}{LC_1} = 6$, откуда $AE = 4\sqrt{2}$, $A_1F = 5\sqrt{2}$.

Задача 14 (продолжение)

Пусть EH — высота трапеции EFA_1A (рис. 2), тогда $FH = A_1F - AE = \sqrt{2}$.

Поскольку $\operatorname{tg}\angle A_1FE = \dfrac{EH}{FH} = \sqrt{6} = \dfrac{A_1C_1}{CC_1} = \operatorname{tg}\angle A_1CC_1$,

$$\angle A_1FE = \angle A_1CC_1 = 90^\circ - \angle CA_1C_1,$$

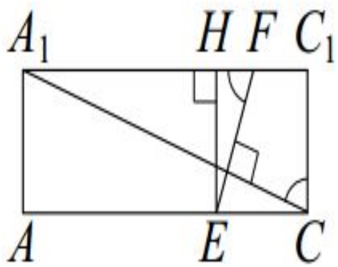
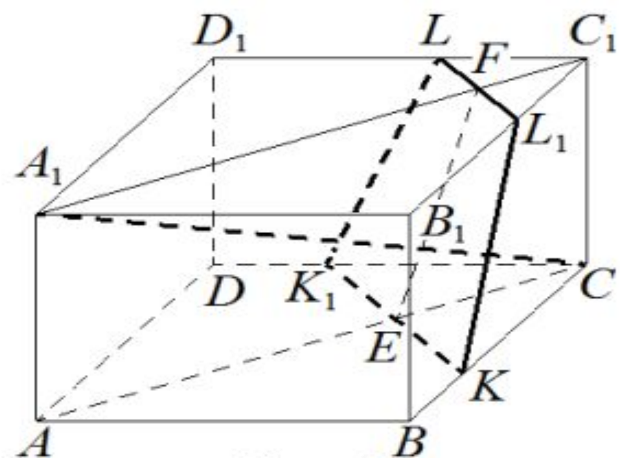


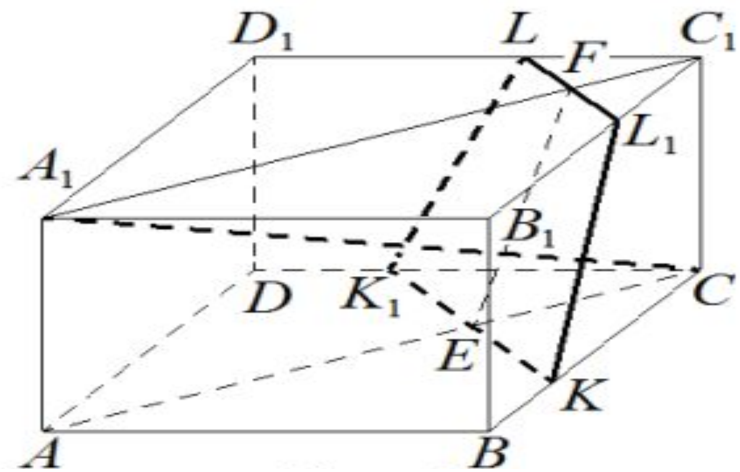
Рис. 2

то есть прямые EF и A_1C перпендикулярны.

Прямая KK_1 параллельна прямой BD, которая перпендикулярна плоскости AA_1C. Значит, прямые KK_1 и EF перпендикулярны прямой A_1C, поэтому прямая A_1C перпендикулярна плоскости γ.



Задача 14 (продолжение)



б) Расстояние от точки A_1 до плоскости γ равно $A_1F \cdot \sin\angle A_1FE$, а площадь трапеции KL_1LK_1 равна

$$\frac{KK_1 + LL_1}{2} \cdot EF = \frac{\frac{2}{3}BD + \frac{1}{3}B_1D_1}{2} \cdot \frac{EH}{\sin\angle A_1FE} = \frac{6\sqrt{6}}{\sin\angle A_1FE}.$$

Значит, искомый объём равен $\frac{1}{3} \cdot A_1F \cdot \sin\angle A_1FE \cdot \frac{6\sqrt{6}}{\sin\angle A_1FE} = 20\sqrt{3}$.

Ответ: б) $20\sqrt{3}$.

Задача 14

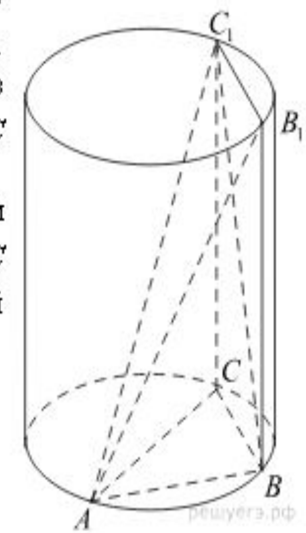
В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A и B, а на окружности другого основания — точки B_1 и C_1, причем BB_1 — образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра.

а) Докажите, что угол ABC_1 прямой.

б) Найдите угол между прямыми BB_1 и AC_1, если $AB = 6$, $BB_1 = 15$, $B_1C_1 = 8$.

Решение.

а) Рассмотрим плоскость, проходящую через ось цилиндра и прямую AC_1. Обозначим точку пересечения этой плоскости и окружности основания цилиндра, содержащую точку A, через точку C. Тогда CC_1 — образующая цилиндра. Отрезок AC пересекает ось цилиндра. Значит, он проходит через центр окружности основания цилиндра, то есть является ее диаметром. Следовательно угол ABC прямой.



Прямая CC_1 является образующей цилиндра, поэтому она перпендикулярна прямой AB. Таким образом, прямая AB перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости BCC_1 (BC и CC_1), а значит, прямая AB перпендикулярна плоскости BCC_1 и любой прямой, лежащей в этой плоскости, в том числе и BC_1. Значит, угол ABC_1 прямой.

б) Поскольку прямые BB_1 и CC_1 параллельны, искомый угол равен углу AC_1C.

Треугольники ABC и ACC_1 являются прямоугольными, поэтому:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{AB^2 + B_1C_1^2} = 10; \ \operatorname{tg}\widehat{AC_1C} = \frac{AC}{CC_1} = \frac{AC}{BB_1} = \frac{2}{3}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$.

Задача 14 (продолжение)

а) Введем систему координат, как показано на рисунке. Найдем координаты точек A, B и C_1. Пусть $BB_1 = x$, а радиус основания — r, тогда $A\ \{r;\ 0;\ 0\}$, $B\ \{0;\ r;\ 0\}$, $C_1\ \{-r;\ 0;\ x\}$.

Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC_1}$: $\overrightarrow{AB}\ \{-r;\ r;\ 0\}$, $\overrightarrow{BC_1}\ \{-r;\ -r;\ x\}$.

Найдем длины векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC_1}$: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{r^2+r^2}$, $\left|\overrightarrow{BC_1}\right| = \sqrt{r^2+r^2+x^2}$.

Найдем косинус угла между этими векторами:

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC_1}) = \frac{\left|r^2 - r^2 + 0\right|}{\sqrt{r^2+r^2}\cdot\sqrt{r^2+r^2+x^2}} = 0.$$

Значит, угол ABC_1 прямой.