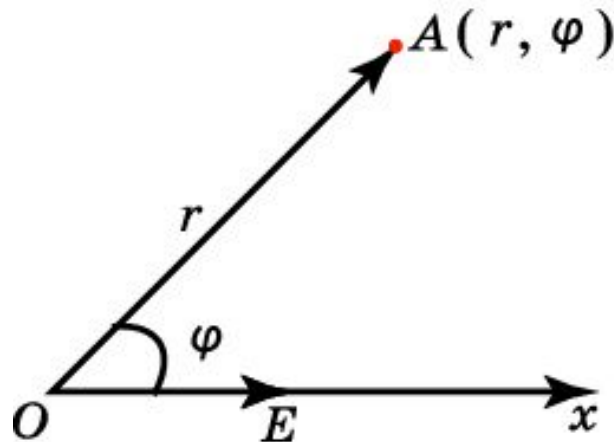


Полярные координаты

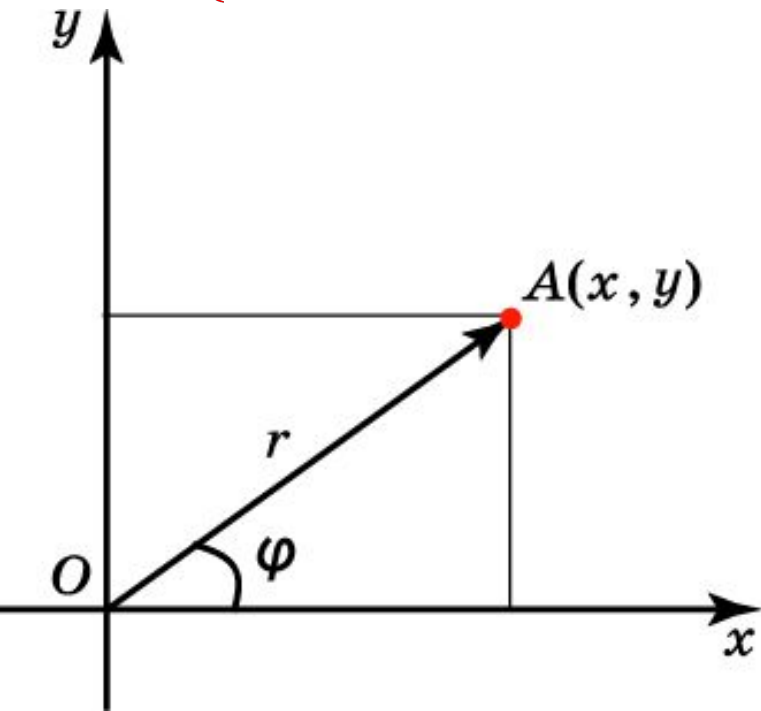
Пусть на плоскости задана координатная прямая с началом координат O и направляющим вектором. Эта прямая в данном случае будет называться **полярной осью**. **Полярными координатами** точки A на плоскости с заданной полярной осью называется пара (r, φ) , где r - расстояние от точки A до точки O , φ - угол между полярной осью и вектором \vec{OA} , отсчитываемый в направлении против часовой стрелки. При этом первая координата r называется **полярным радиусом**, а вторая φ - **полярным углом**. Полярный угол φ можно задавать в градусах или радианах.



Полярные координаты

Если на плоскости задана декартова система координат, то обычно за полярную ось принимается ось Ox . В этом случае каждой точке плоскости с декартовыми координатами (x, y) можно сопоставить полярные координаты (r, φ) . При этом декартовы координаты выражаются через полярные по формулам

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi. \end{cases}$$



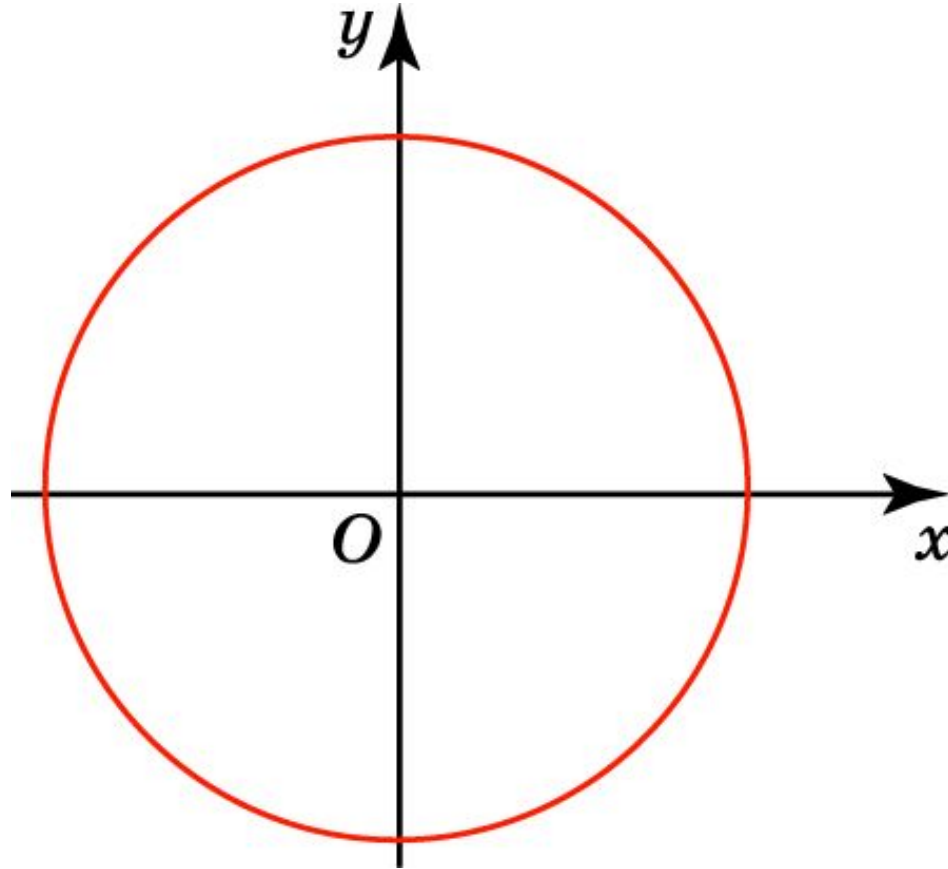
И, наоборот, полярные координаты выражаются через декартовы по формулам

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

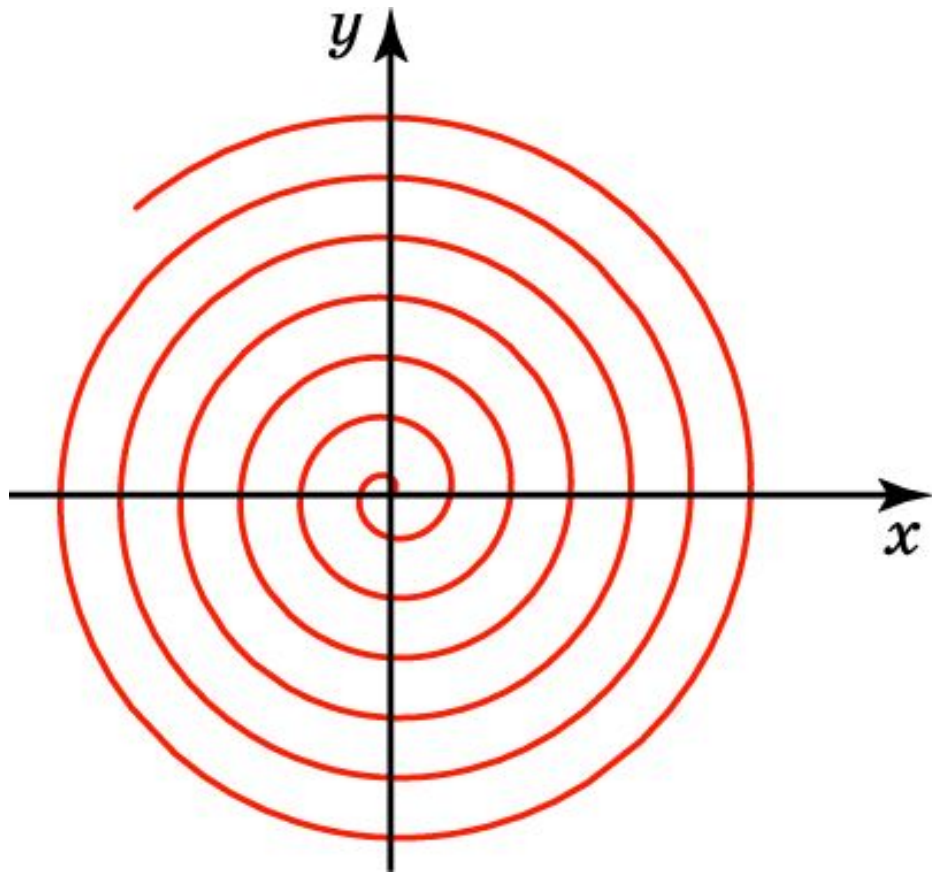
Окружность

Окружность радиуса R и центром в точке O задается уравнением $r = R$.



Спираль Архимеда

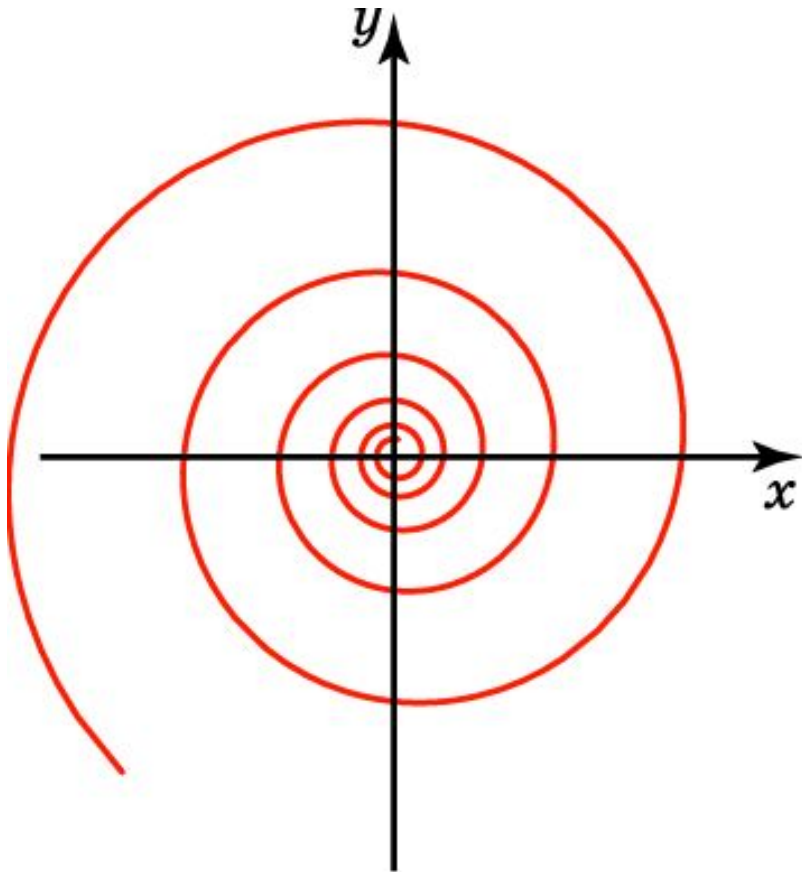
Спираль Архимеда - кривая, задаваемая уравнением $r = a\varphi$, где a - некоторое фиксированное число.



Геометрическим свойством, характеризующим спираль Архимеда, является постоянство расстояний между соседними витками. Каждое из них равно $2\pi a$. Действительно, если угол φ увеличивается на 2π , т.е. точка делает один оборот против часовой стрелки, то радиус увеличивается на $2\pi a$, что и составляет расстояние между соседними витками.

Логарифмическая спираль

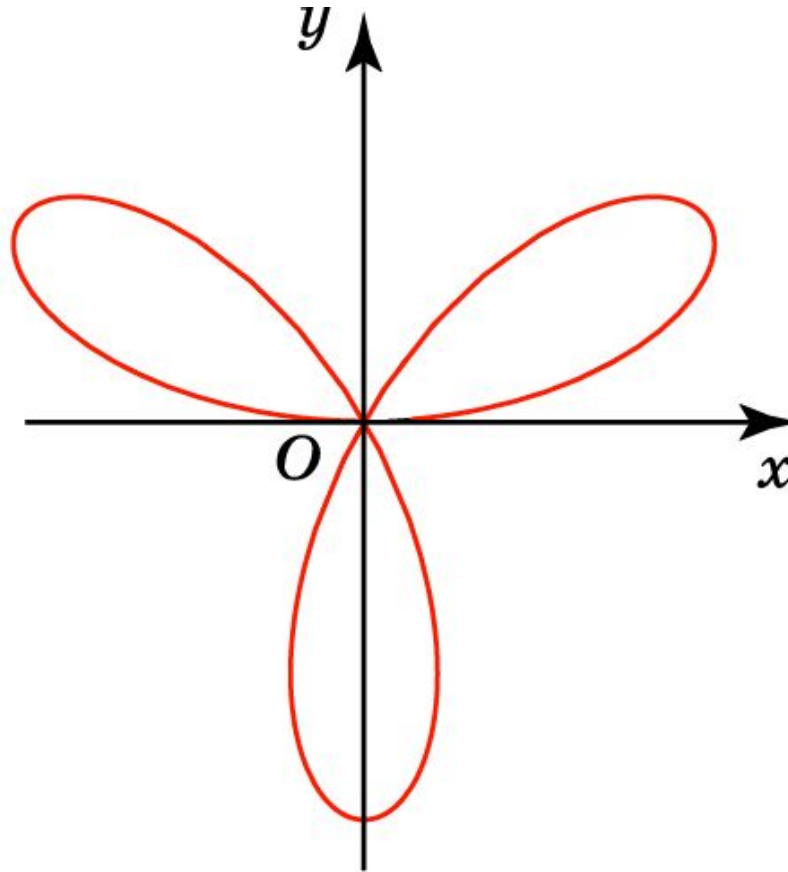
Логарифмическая спираль задается уравнением в полярных координатах $r = a^\varphi$, где a - некоторое фиксированное положительное число, φ - угол, измеряемый в радианах.



Геометрическим свойством этой спирали является то, что каждый следующий ее виток подобен предыдущему. Действительно, если угол увеличивается на 2π , т.е. точка делает один оборот против часовой стрелки, то радиус увеличивается в $a^{2\pi}$ раз. Это означает, что следующий виток подобен предыдущему, и коэффициент подобия равен $a^{2\pi}$.

Трилистник

Трилистник – кривая, задаваемая уравнением $r = \sin 3\varphi$.



Упражнение 1

Для следующих точек с заданными полярными координатами найдите их декартовы координаты: $A(1, \frac{\pi}{3})$, $B(2, -\frac{\pi}{4})$.

Ответ: $A(2, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $B(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

Упражнение 2

Для следующих точек с заданными декартовыми координатами найдите их полярные координаты:

а) $A(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, ;

б) $B(-10, 0)$;

в) $C(1, -\sqrt{3})$;

г) $D(-\sqrt{3}, 1)$.

Ответ: а) $A(2, 45^\circ)$;

б) $B(10, 180^\circ)$;

в) $C(2, -60^\circ)$;

г) $D(2, 150^\circ)$.

Упражнение 3

Могут ли разным полярным координатам соответствовать одинаковые точки на плоскости?

Ответ: Да.

Упражнение 4

Найдите геометрическое место точек на плоскости, для которых:

- а) полярный радиус r постоянен и равен r_0 ;
- б) полярный угол φ постоянен и равен φ_0 .

Ответ: а) Окружность;

б) луч.

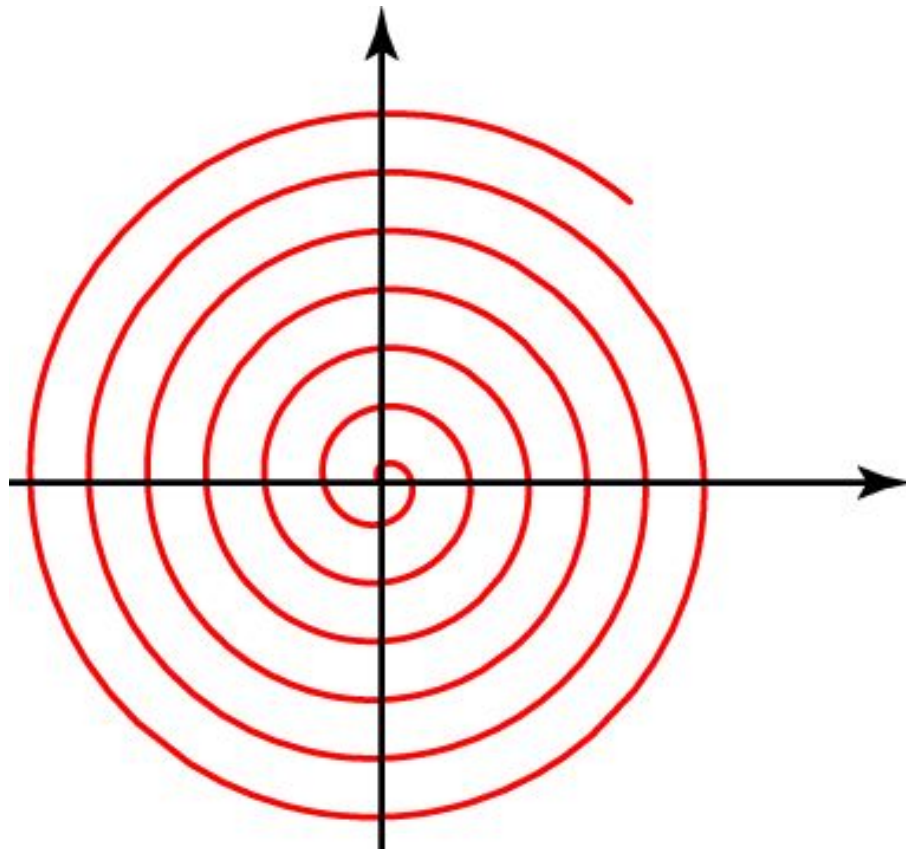
Упражнение 5

Центром правильного шестиугольника является начало координат. Одна из его вершин имеет полярные координаты $(1, 0)$. Найдите полярные координаты остальных вершин.

Ответ: $(1, 60^\circ)$, $(1, 120^\circ)$, $(1, 180^\circ)$, $(1, 240^\circ)$, $(1, 300^\circ)$.

Упражнение 6

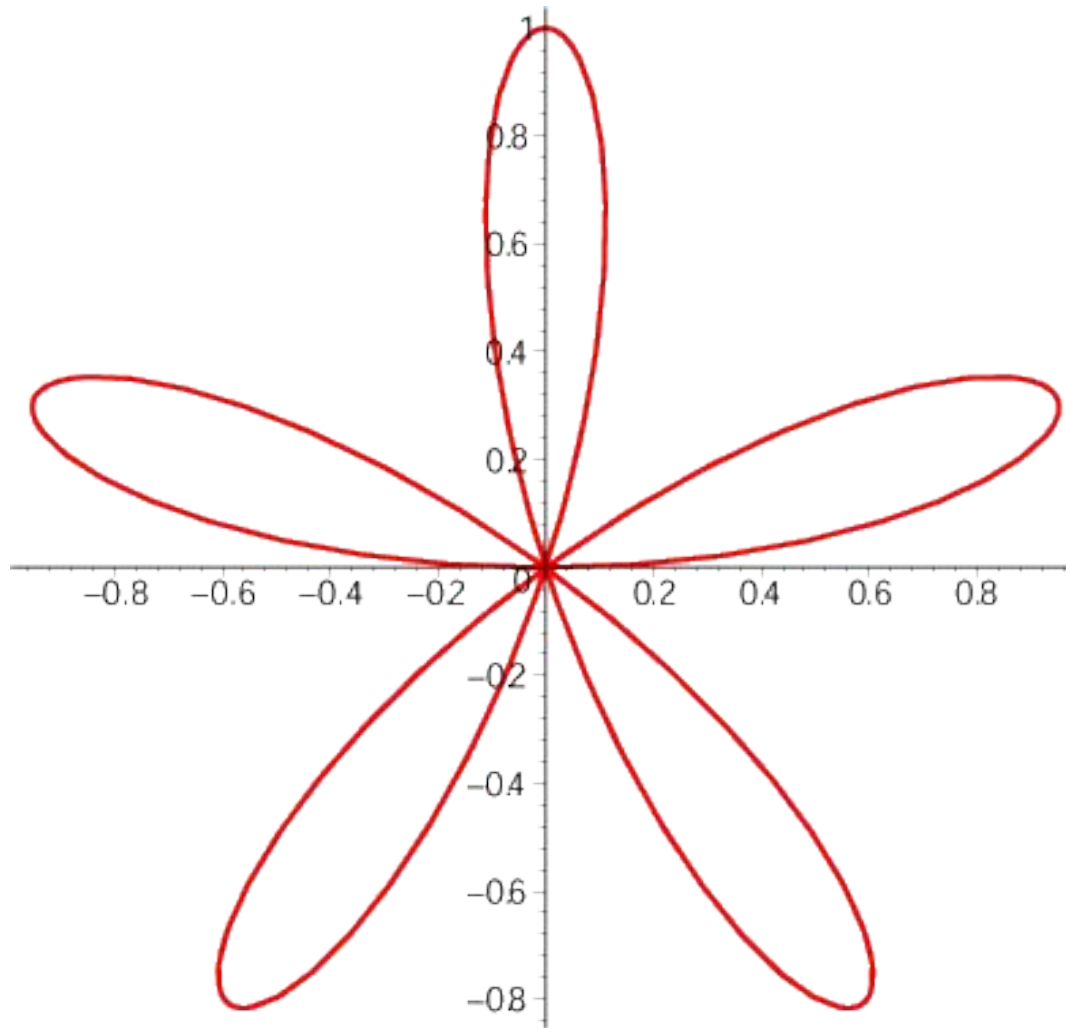
Нарисуйте спираль Архимеда, заданную уравнением $r = -\varphi$.



Ответ:

Упражнение 7

Нарисуйте пятилепестковую розу - кривую, задаваемую уравнением $r = \sin 5\varphi$.

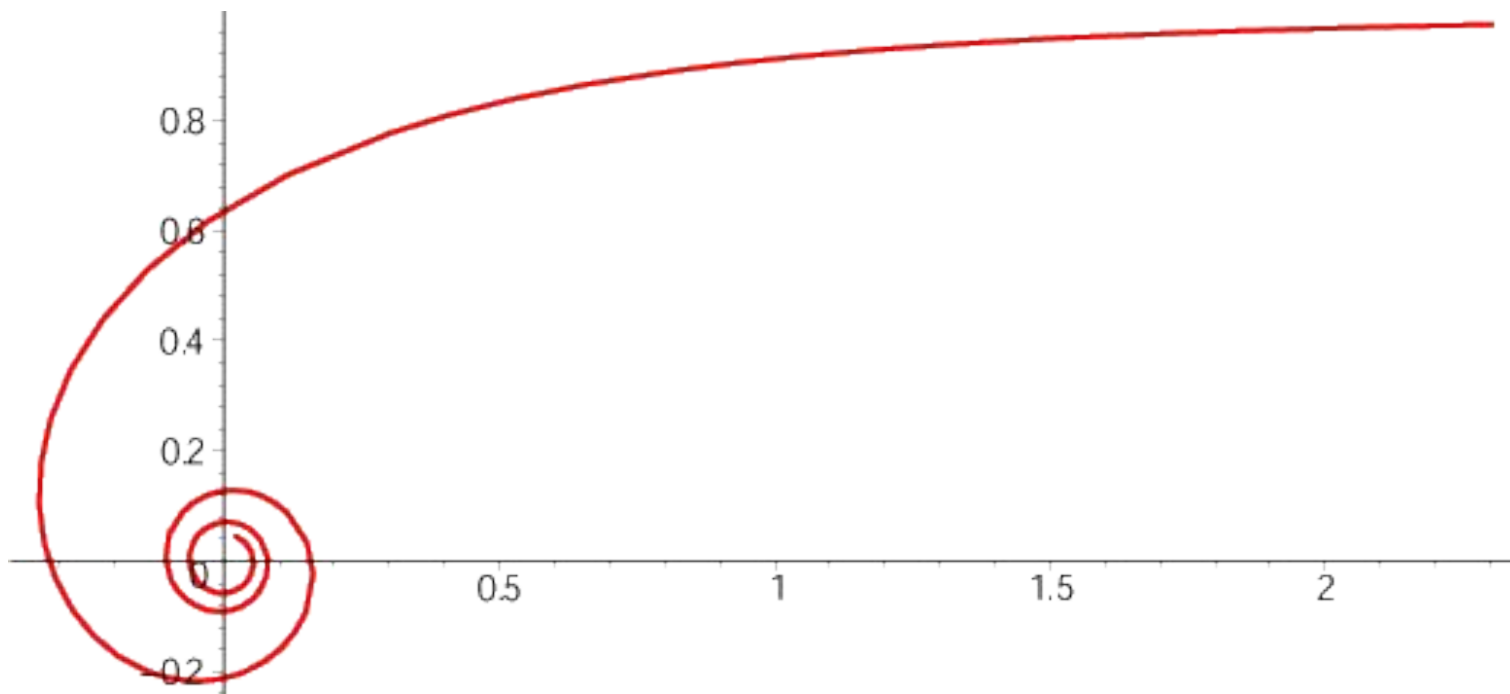


Ответ:

Упражнение 8

Нарисуйте гиперболическую спираль - кривую, задаваемую уравнением $r = \frac{1}{\varphi}$.

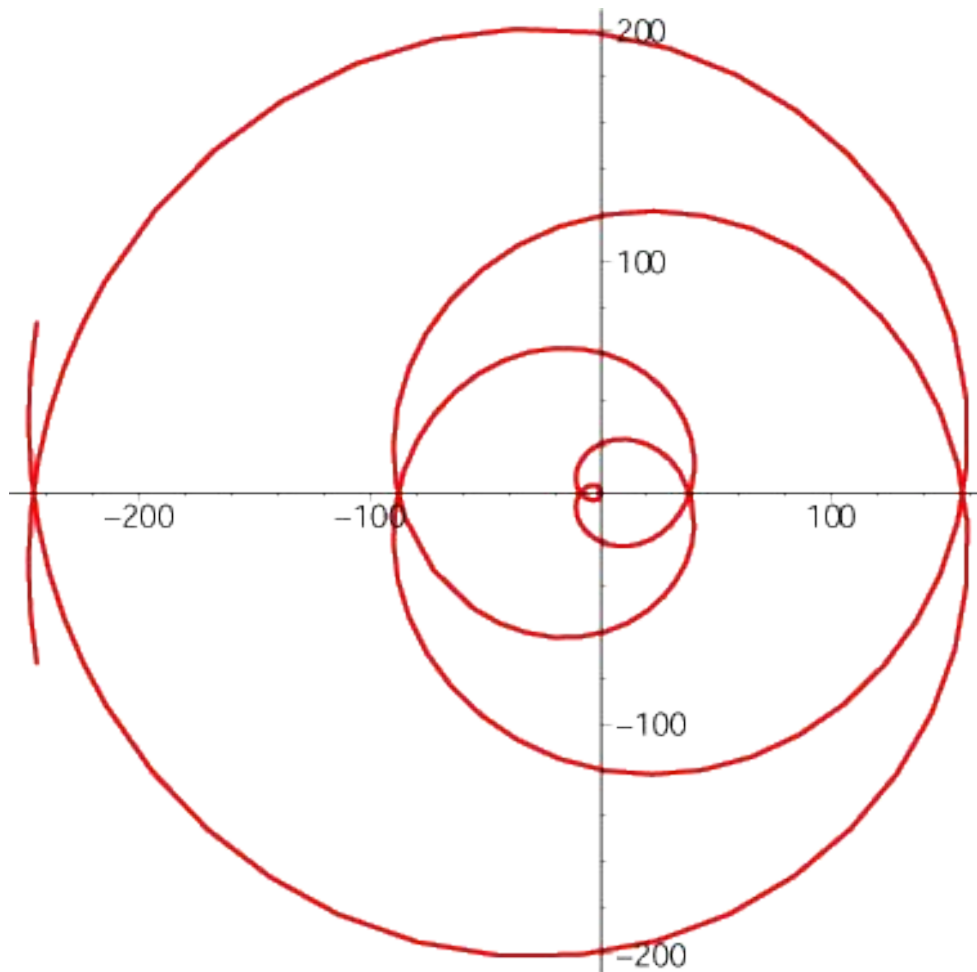
Ответ:



Упражнение 9

Нарисуйте спираль Гилилея - кривую, задаваемую уравнением

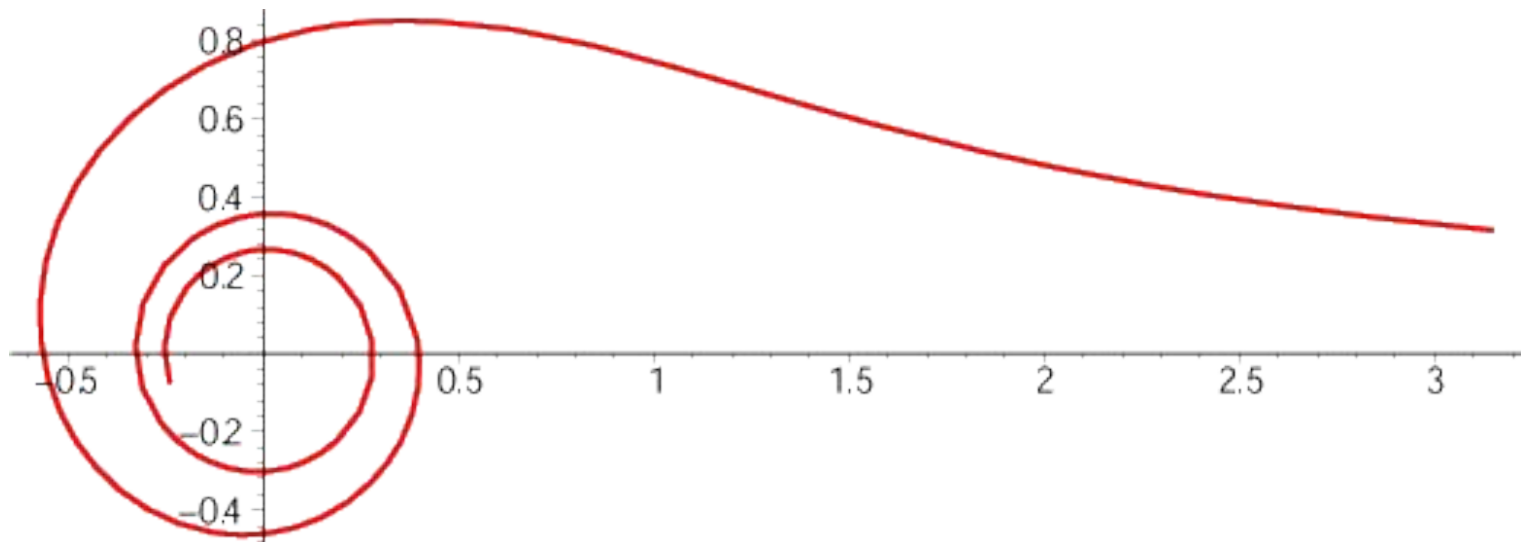
$$r = \varphi^2 - 1.$$



Ответ:

Упражнение 10

Нарисуйте Жезл - кривую, задаваемую уравнением $r = \frac{1}{\sqrt{\varphi}}$.

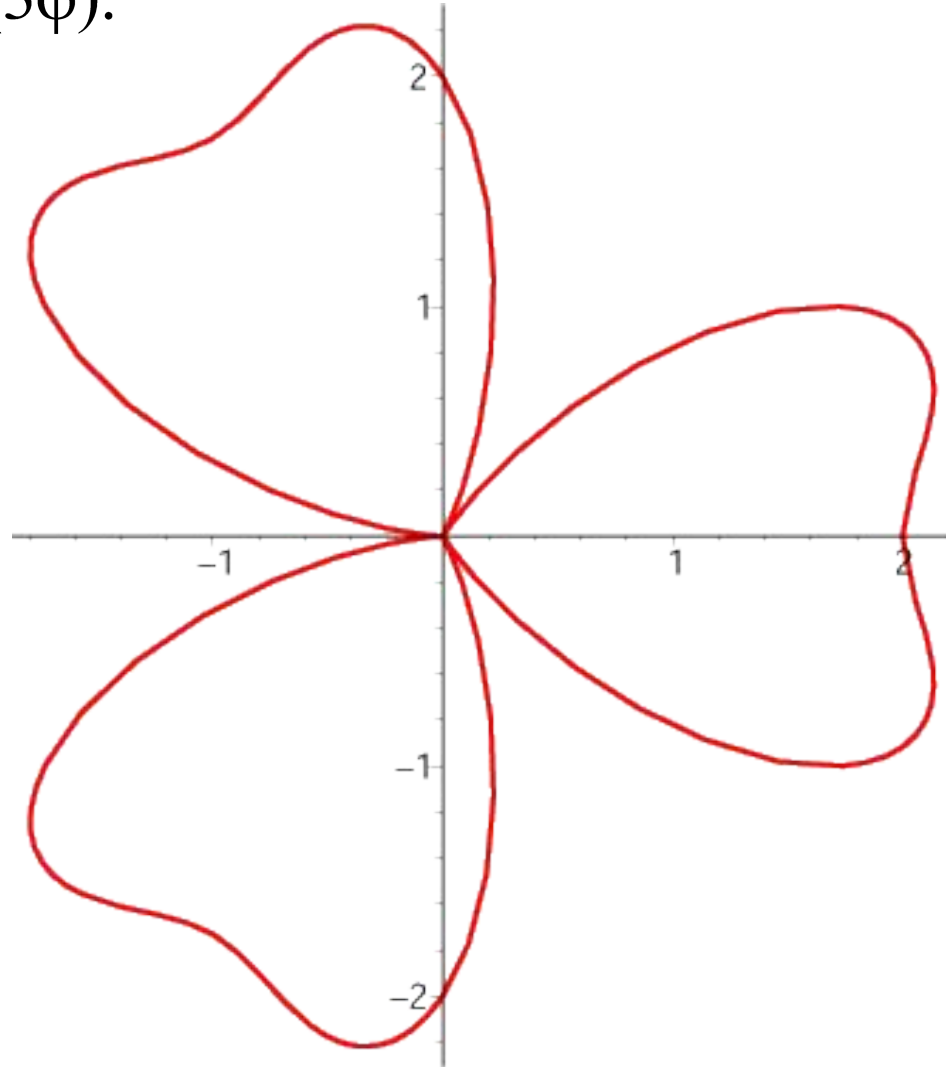


Ответ:

Упражнение 11

Нарисуйте «заячью капусту»- кривую, задаваемую уравнением

$$r = \cos(3\varphi) + \sin^2(3\varphi).$$

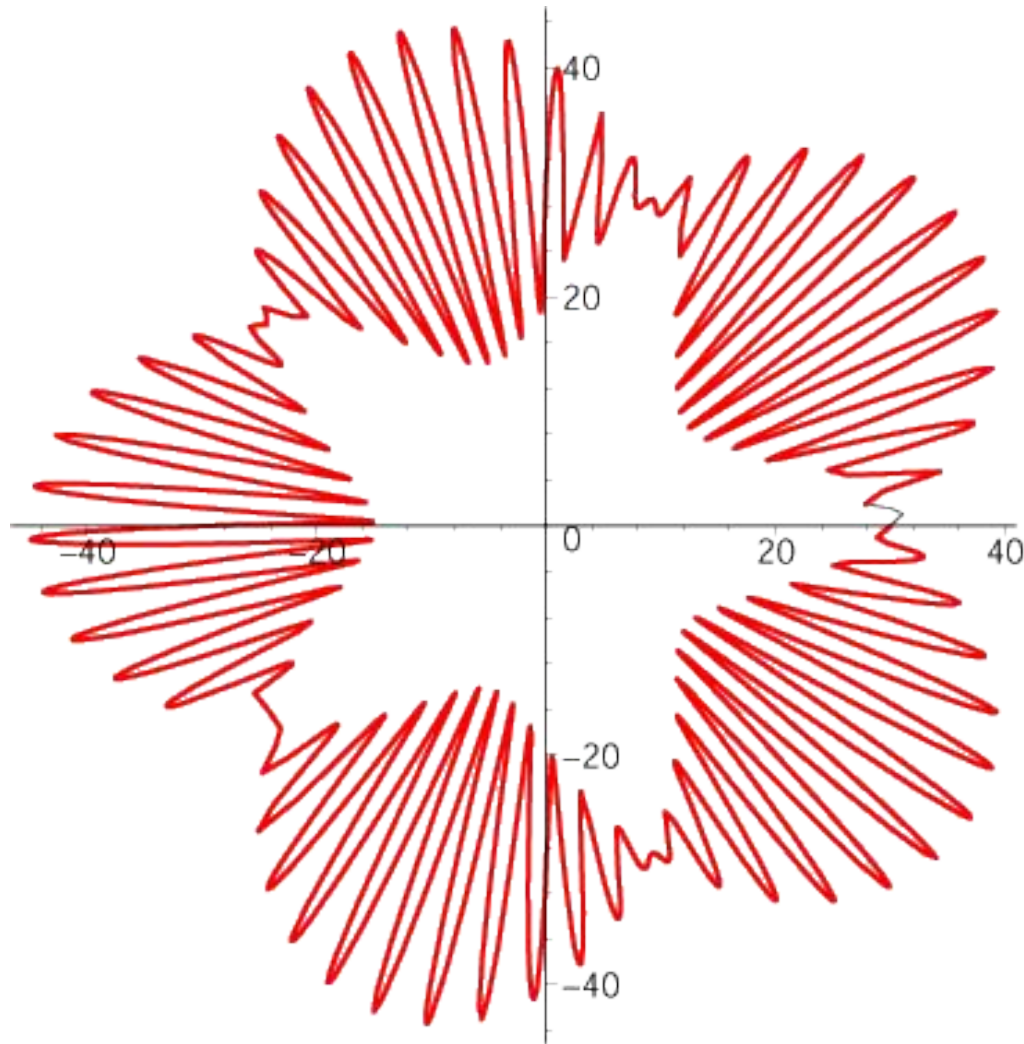


Ответ:

Упражнение 12

Нарисуйте кривую, задаваемую уравнением

$$r = 30 + 15 \sin(60\varphi) \sin(2,5\varphi).$$



Ответ: