

Теория множеств. Решение задач

1. Вычисление множеств

Дано

$$U = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11\},$$

$$A = \{1; 2; 3; 7; 9\},$$

$$B = \{3; 4; 5; 6; 10; 11\},$$

$$C = \{2; 3; 4; 7; 8\},$$

$$D = \{1; 7; 11\}.$$

Вычислить множества

$$1) A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 9; 10; 11\}$$

$$2) (A \cup C) \cap D = \{1; 2; 3; 4; 7; 8; 9\} \cap D = \{1; 7\}$$

$$3) (A \setminus D) \cup C = \{2; 3; 9\} \cup C = \{2; 3; 4; 7; 8; 9\}$$

$$4) (B \cap C) \cap D = \{2; 5; 6; 7; 8; 10; 11\} \cap D = \{7; 11\}$$

$$5) \overline{B \setminus C} \cap (D \setminus A) = \{\overline{5; 6; 10; 11}\} \cap (D \setminus A) = \{1; 2; 3; 4; 7; 8; 9\} \cap \{11\} = \emptyset$$

2. Выражение множеств

Пусть $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,

$A = \{1, 2, 3, 5\}$,

$B = \{2, 4, 6, 8\}$,

$C = \{1, 3, 5, 7\}$,

$D = \{4, 5, 7, 8\}$.

Выразить через известные множества A, B, C, D следующие множества.

1) $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\} = A \cup D$

2) $\{4, 7, 8\} = D \setminus A$

3) $\{2, 5, 6, 7\} = B \bar{\cap} D$

4) $\{2, 5\} = A \setminus (C \setminus D)$

5) $\{5, 7, 9\} = (A \cap D) \cup \overline{(A \cup B)}$

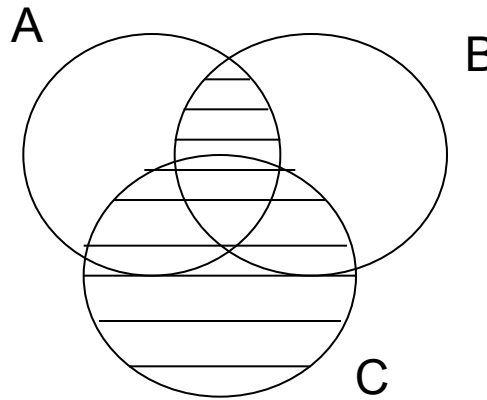
6) $\{4, 5\} =$

Невозможно выразить через данные множества, так как элементы 4 и 8 одновременно принадлежат или не принадлежат данным множествам.

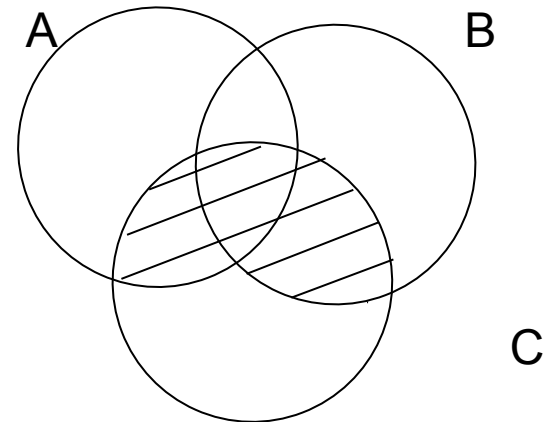
3. Изображение множеств с помощью кругов Эйлера

Изобразить с помощью кругов Эйлера следующие множества:

1) $(A \cap B) \cup C$

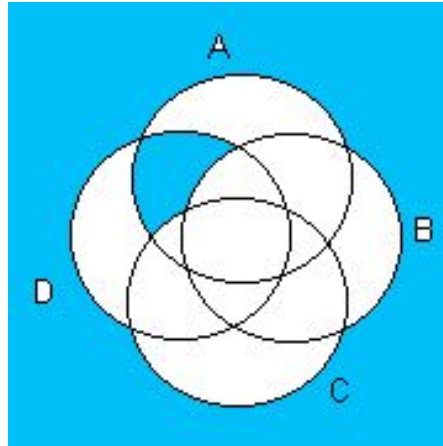


2) $(A \cup B) \cap C$

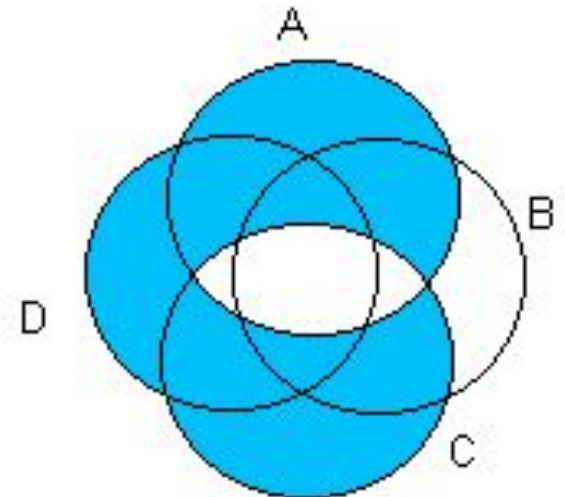


3. Изображение множеств с помощью кругов Эйлера

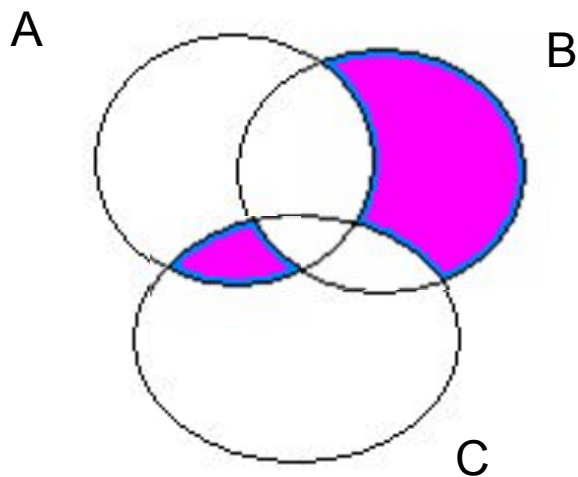
3) $\overline{B \cup C} \setminus (A \cap D)$



4) $(A \cap C) \cup (D \setminus A \setminus C)$

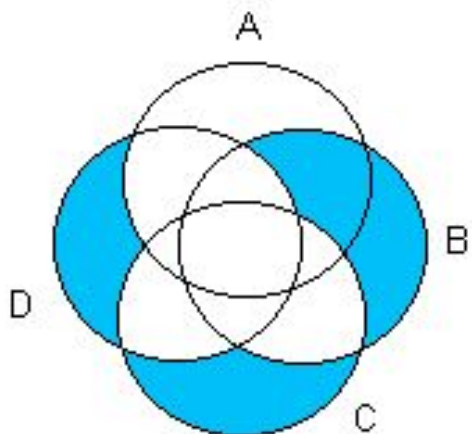


4. Выражение множеств, заданных с помощью кругов Эйлера

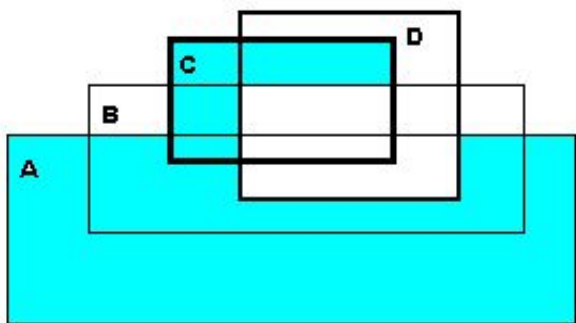


$$((A \cap C) \setminus B) \cup (B \setminus (A \cup C))$$

4. Выражение множеств, заданных с помощью кругов Эйлера



$$((B \setminus C) \setminus D) \cup (D \setminus A \setminus C)$$



$$(A \setminus D) \cup (C \setminus (B \cap D))$$

Декартово произведение

Декартово произведение

Под *упорядоченной парой* $(a; b)$ мы будем понимать двухэлементное множество, состоящее из элементов a и b , в котором зафиксирован порядок расположения элементов.

Упорядоченный набор длины n $(a_1; a_2; \dots; a_n)$, где $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n$, называют *вектором*, *кортежем*, или *упорядоченной n-кой*.

Определение 1

Декартовым (прямым) произведением множеств A и B называется множество

$$A \times B = \{(a; b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Пример

Пусть $A = \{1; 2\}$, $B = \{a, b, c\}$, тогда

$$A \times B = \{(1; a); (1; b); (1; c); (2; a); (2; b); (2; c)\};$$

$$B \times A = \{(a; 1); (b; 1); (c; 1); (a; 2); (b; 2); (c; 2)\}.$$

Вообще говоря, $B \times A \neq A \times B$

Декартово произведение

Определение 2

а) Множество $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1; a_2; \dots; a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\}$ называется декартовым (прямым) произведением n множеств;

б) $A^n = A \times A \times \dots \times A$ - (n сомножителей) – n -ая декартова степень множества A ;

Пример

Пусть $A_1 = \{1; 2; 3\}$, $A_2 = \{*; +\}$ $A_3 = \{\diamond; \boxtimes\}$

Тогда

$$A_1 \times A_2 \times A_3 = \{(1; *; \diamond), (1; *; \boxtimes), (1; +; \diamond), (1; +; \boxtimes), (2; *; \diamond), (2; *; \boxtimes), (2; +; \diamond), (2; +; \boxtimes), (3; *; \diamond), (3; *; \boxtimes), (3; +; \diamond), (3; +; \boxtimes)\}$$

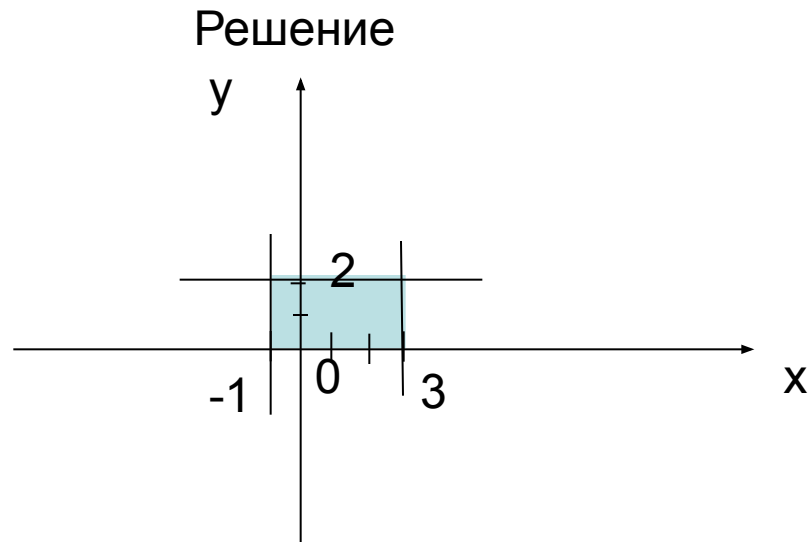
Декартово произведение

Пример

Очевидно, что $R \times R = R^2$, где R - множество действительных чисел, описывает множество всех точек декартовой плоскости

Задача

Изобразить множество $(-1;3] \times [0;2)$



Декартово произведение

Теорема 1

Пусть A, B, C – произвольные множества, тогда

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$$

Декартово произведение



Доказательство

$$(x, y) \in A \times (B \cup C) \leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \cup C \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (x; y) \in A \times B \vee (x; y) \in A \times C \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (x; y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$$

Следовательно $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

Декартово произведение

Доказательство

$$\begin{aligned}(x; y) \in A \times (B \cap C) &\leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \cap C \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \wedge y \in C \leftrightarrow \\ \leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \in C) &\leftrightarrow \\ &\leftrightarrow (x; y) \in A \times B \wedge (x; y) \in A \times C \leftrightarrow \\ \leftrightarrow (x; y) \in (A \times B) \cap (A \times C)\end{aligned}$$

Следовательно $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

Декартово произведение

Доказательство

$$(x; y) \in (A \times B) \setminus (A \times C) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x; y) \in A \times B \wedge (x; y) \notin A \times C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \wedge \overline{x \in A \wedge y \in C} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \wedge (x \notin A \vee y \notin C) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge y \in B \wedge y \notin C) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge (y \in B \wedge y \notin C) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \setminus C \Leftrightarrow (x; y) \in A \times (B \setminus C)$$

Следовательно $(A \times B) \setminus (A \times C) = A \times (B \setminus C)$

Декартово произведение

Теорема 4

Если множество A состоит из m элементов, а B – из n элементов, тогда $A \times B$ состоит из mn элементов.

Доказательство

ММИ по числу элементов множества B .

$$1) \quad n=1. \quad B = \{b_1\} \Rightarrow A \times B = \{(a; b_1) | a \in A\}$$

то есть AB имеет $m=m*1$ элементов.

2) Допустим, что теорема верна при $n=k$.

3) И пусть теперь B состоит из $k+1$ элемента, то есть

$$\text{где} \quad B = \{b_1; b_2; \dots; b_k; b_{k+1}\} = B' \cup \{b_{k+1}\}$$
$$B' = \{b_1; b_2; \dots; b_k\}$$

$$\text{Тогда} \quad A \times B = A \times (B' \cup \{b_{k+1}\}) = A \times B' \cup A \times \{b_{k+1}\}, \quad \text{где} \quad A \times B' \cap A \times \{b_{k+1}\} = \emptyset$$

поэтому множество AB состоит из $mk+m=m(k+1)$ элементов.