
Системы булевых функций

Операция отрицания $'$ является одной из четырех булевых функций от одной переменной, которые перечисляются в следующей таблице:

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Операции дизъюнкция $+$ и конъюнкция \cdot являются примерами двух из шестнадцати булевых функций от двух переменных, которые перечисляются в следующей таблице:

x	y	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
		0	\cdot	\rightarrow'	x	\leftarrow'	y	\oplus	$+$	\downarrow	\leftrightarrow	y'	\leftarrow	x'	\rightarrow	$ $	1

Функция $f_{15}(x, y) = f_2(x, y)'$ - *итрих Шеффера*, обозначается $x | y$.

Функция $f_9(x, y) = f_8(x, y)'$ - *стрелка Пирса*, обозначается $x \downarrow y$.

Определение. Суперпозицией булевых функций $g(y_1, \dots, y_m)$ и $h_1(x_1, \dots, x_n), \dots, h_m(x_1, \dots, x_n)$ называется булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$, значения которой определяются по формуле:

$$f(x_1, \dots, x_n) = g(h_1(x_1, \dots, x_n), \dots, h_m(x_1, \dots, x_n)).$$

Для упрощения записи суперпозиции булевых функций скобки по возможности опускаются с учетом следующего приоритета выполнения булевых операций: $'$, \cdot и затем все остальные операции.

Лемма. Булевы функции от двух переменных взаимосвязаны следующими свойствами:

- 1) $(x + y)' = x'y'$, $(xy)' = x' + y'$ – законы де Моргана;
- 2) $x + xy = x$, $x(x + y) = x$ – законы поглощения;
- 3) $x + x' = 1$, $xx' = 0$ – характеристическое свойство отрицания;
- 4) $x + 1 = 1$, $x \cdot 1 = x$ – характеристическое свойство элемента 1;
- 5) $x + 0 = x$, $x \cdot 0 = 0$ – характеристическое свойство элемента 0;
- 6) $x + y = (x'y)'$, $xy = (x' + y')'$ – взаимосвязь конъюнкции и дизъюнкции;
- 7) $x \rightarrow y = x' + y$, $x \rightarrow y = (xy)'$ – взаимосвязь импликации с дизъюнкцией, конъюнкцией и отрицанием;

8) $x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y)(y \rightarrow x)$, $x \leftrightarrow y = (x' + y)(x + y')$;

9) $x | y = (xy)'$, $x' = x | x$, $xy = (x | y)' = (x | y) | (x | y)$,
 $x + y = x' | y' = (x | x) | (y | y)$ – взаимосвязь штриха Шеффера с дизъюнкцией, конъюнкцией и отрицанием;

10) $x \downarrow y = (x + y)'$, $x' = x \downarrow x$, $x + y = (x \downarrow y)' = (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y)$,
 $xy = x' \downarrow y' = (x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)$ – взаимосвязь стрелки Пирса с дизъюнкцией, конъюнкцией и отрицанием;

11) $x \oplus y = y \oplus x$, $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$, $x(y \oplus z) = xy \oplus xz$,
 $x \oplus x = 0$, $x \oplus 0 = x$, $x \oplus 1 = x'$, $x \oplus x' = 1$ –
характеристическое свойство суммы Жегалкина;

12) $x \oplus y = xy' + x'y$, $x \rightarrow y = xy \oplus x \oplus 1$, $x \leftrightarrow y = x \oplus y \oplus 1$,
 $x + y = (x \oplus 1)(y \oplus 1) \oplus 1 = x \oplus y \oplus xy$ – взаимосвязь суммы Жегалкина с дизъюнкцией, конъюнкцией, отрицанием, импликацией и эквивалентностью.

Определение. Система булевых функций $F = \{f_1, \dots, f_k\}$ называется *полной*, если любая булева функция может быть представлена в виде суперпозиции функций из этой системы F .

Теорема Жегалкина. Любая булева функция f от n переменных представима в виде следующего полинома Жегалкина

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigoplus_{(i_1, \dots, i_k)} x_{i_1} \dots x_{i_k} \oplus c$$

для некоторых значений $c \in \{0, 1\}$ и $1 < i_1 < \dots < i_k \leq n$.
Причем такое представление булевой функции f единственно с точностью до порядка слагаемых.

Определение. Суперпозицией булевых функций $g(y_1, \dots, y_m)$ и $h_1(x_1, \dots, x_n), \dots, h_m(x_1, \dots, x_n)$ называется булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$, значения которой определяются по формуле:

$$f(x_1, \dots, x_n) = g(h_1(x_1, \dots, x_n), \dots, h_m(x_1, \dots, x_n)).$$

Для упрощения записи суперпозиции булевых функций скобки по возможности опускаются с учетом следующего приоритета выполнения булевых операций: $'$, \cdot и затем все остальные операции.

Лемма. Булевы функции от двух переменных взаимосвязаны следующими свойствами:

- 1) $(x + y)' = x'y'$, $(xy)' = x' + y'$ – законы де Моргана;
- 2) $x + xy = x$, $x(x + y) = x$ – законы поглощения;
- 3) $x + x' = 1$, $xx' = 0$ – характеристическое свойство отрицания;
- 4) $x + 1 = 1$, $x \cdot 1 = x$ – характеристическое свойство элемента 1;
- 5) $x + 0 = x$, $x \cdot 0 = 0$ – характеристическое свойство элемента 0;
- 6) $x + y = (x'y)'$, $xy = (x' + y')'$ – взаимосвязь конъюнкции и дизъюнкции;
- 7) $x \rightarrow y = x' + y$, $x \rightarrow y = (xy)'$ – взаимосвязь импликации с дизъюнкцией, конъюнкцией и отрицанием;

8) $x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y)(y \rightarrow x)$, $x \leftrightarrow y = (x' + y)(x + y')$;

9) $x | y = (xy)'$, $x' = x | x$, $xy = (x | y)' = (x | y) | (x | y)$,
 $x + y = x' | y' = (x | x) | (y | y)$ – взаимосвязь штриха Шеффера с дизъюнкцией, конъюнкцией и отрицанием;

10) $x \downarrow y = (x + y)'$, $x' = x \downarrow x$, $x + y = (x \downarrow y)' = (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y)$,
 $xy = x' \downarrow y' = (x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)$ – взаимосвязь стрелки Пирса с дизъюнкцией, конъюнкцией и отрицанием;

11) $x \oplus y = y \oplus x$, $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$, $x(y \oplus z) = xy \oplus xz$,
 $x \oplus x = 0$, $x \oplus 0 = x$, $x \oplus 1 = x'$, $x \oplus x' = 1$ –
характеристическое свойство суммы Жегалкина;

12) $x \oplus y = xy' + x'y$, $x \rightarrow y = xy \oplus x \oplus 1$, $x \leftrightarrow y = x \oplus y \oplus 1$,
 $x + y = (x \oplus 1)(y \oplus 1) \oplus 1 = x \oplus y \oplus xy$ – взаимосвязь суммы Жегалкина с дизъюнкцией, конъюнкцией, отрицанием, импликацией и эквивалентностью.

Определение. Система булевых функций $F = \{f_1, \dots, f_k\}$ называется *полной*, если любая булева функция может быть представлена в виде суперпозиции функций из этой системы F .

Теорема Жегалкина. Любая булева функция f от n переменных представима в виде следующего полинома Жегалкина

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigoplus_{(i_1, \dots, i_k)} x_{i_1} \dots x_{i_k} \oplus c$$

для некоторых значений $c \in \{0, 1\}$ и $1 < i_1 < \dots < i_k \leq n$.
Причем такое представление булевой функции f единственно с точностью до порядка слагаемых.

Определение. Булева функция f называется *линейной*, если ее представление полиномом Жегалкина не содержит произведения переменных.

Множество всех линейных булевых функций обозначим символом **L**.

Определение. Булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется *самодвойственной*, если $f(x_1, \dots, x_n) = (f(x'_1, \dots, x'_n))'$.

Множество всех самодвойственных булевых функций обозначим символом **S**.

Определение. Булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется *монотонной*, если для любых $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \{0, 1\}$ из $x_1 \leq y_1, \dots, x_n \leq y_n$ следует $f(x_1, \dots, x_n) \leq f(y_1, \dots, y_n)$.

Множество всех монотонных булевых функций обозначим символом **M**.

Пусть P_0 - класс всех булевых функций $f(x_1, \dots, x_n)$, удовлетворяющих условию $f(0, \dots, 0) = 0$.

Пусть P_1 - класс всех булевых функций $f(x_1, \dots, x_n)$, удовлетворяющих условию $f(1, \dots, 1) = 1$.

Определение. Классы булевых функций L, S, M, P_0, P_1 называются *классами Поста*.

Теорема Поста. Система булевых функций в том и только том случае является полной, если она не содержится ни в одном из классов Поста.

Алгоритм доказательства полноты системы булевых функций $F = \{f_1, \dots, f_k\}$:

1. Составить таблицу, столбцы которой помечены классами Поста L, S, M, P_0, P_1 и строки – функциями системы f_1, \dots, f_n .

2. Для каждой из функций f_1, \dots, f_n проверить принадлежность ее к классам Поста и результаты проверки зафиксировать словами «Да» или «Нет» в соответствующей клетке таблицы.

3. По теореме Поста данная система является полной в том и только том случае, если в каждом столбце таблицы имеется слово «Нет».

Пример.

Рассмотрим систему $F = \{ | \}$, состоящую из одной булевой функции $|$ – штрих Шеффера. Составляем таблицу, столбцы которой помечены классами Поста L, S, M, P_0, P_1 и одна строка – функцией $|$.

Функция	Классы Поста				
	L	S	M	P_0	P_1
$ $	Нет	Нет	Нет	Нет	Нет